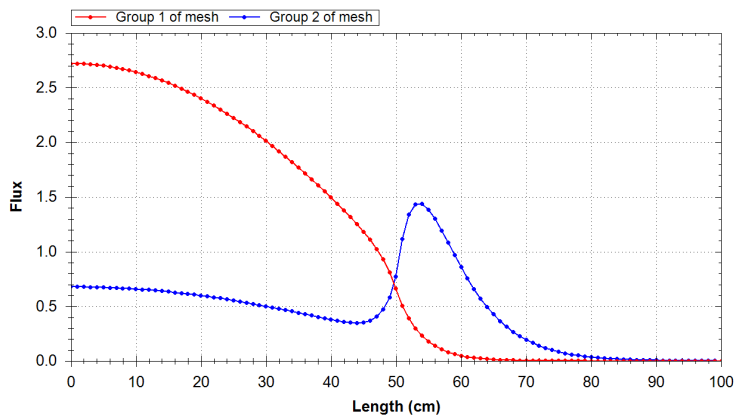


کد محاسباتی یک بعدی پخش نوترون به روش نودال تحلیلی



گزارش فنی ANOMOS-1D

بسته ششم - ویرایش ۰ - شهریور ۱۳۹۲

ANC-TEC-DES-NA-100

فهرست مطالب

- ۱- چکیده ۸
- ۲- کلیدواژه ۹
- ۳- اختصارات ۱۰
- ۴- مقدمه ۱۱
- ۵- دامنه گزارش ۱۱
- ۶- آشنایی با معادله پخش نوترون ۱۲

- ۷- حل معادله پخش نوترون به روش نودال تحلیلی برای مسائل چشمه ثابت..... ۱۶
- ۸- حل معادله پخش نوترون به روش نودال تحلیلی برای مسائل بحرانیت..... ۳۳
- ۹- حل معادله پخش الحاقی نوترون به روش نودال تحلیلی..... ۴۹
- ۱۰- راستی آزمایی نتایج..... ۵۲
- ۱۱- نتیجه گیری..... ۸۲
- ۱۲- مراجع..... ۸۳

لیست شکل‌ها

شکل ۱: تیغه یک بعدی مسئله ۱..... ۵۳

شکل ۲: مقایسه شار نوترونی حاصل از ANOMOS و حل دقیق برای تیغه ۱ سانتیمتری (طول مش ۰/۰۱ سانتیمتر)

..... ۵۶

شکل ۳: مقایسه شار نوترونی حاصل از ANOMOS و حل دقیق برای تیغه ۱۰ سانتیمتری (طول مش ۰/۱ سانتیمتر)

..... ۵۷

شکل ۴: مقایسه شار نوترونی حاصل از ANOMOS و حل دقیق برای تیغه ۱۰۰ سانتیمتری (طول مش ۰/۱

سانتیمتر)..... ۵۸

شکل ۵: مقایسه شار نوترونی حاصل از ANOMOS و حل دقیق برای تیغه ۱۰۰ سانتیمتری (طول مش ۱ سانتیمتر)

..... ۵۹

شکل ۶: مقایسه شار نوترونی حاصل از ANOMOS و حل دقیق برای تیغه ۱۰۰ سانتیمتری (طول مش ۱۰ سانتیمتر)

۶۰.....

شکل ۷: مقایسه شار نوترونی حاصل از ANOMOS و حل دقیق برای تیغه ۱۰۰ سانتیمتری (طول مش ۲۰ سانتیمتر)

۶۱.....

شکل ۸: خطای نسبی برای تیغه ۱ سانتیمتری (طول مش ۰/۰۱ سانتیمتر).....

شکل ۹: خطای نسبی برای تیغه ۱۰ سانتیمتری (طول مش ۰/۱ سانتیمتر).....

شکل ۱۰: خطای نسبی برای تیغه ۱۰۰ سانتیمتری (طول مش ۰/۱ سانتیمتر).....

شکل ۱۱: خطای نسبی برای تیغه ۱۰۰ سانتیمتری (طول مش ۱ سانتیمتر).....

شکل ۱۲: خطای نسبی برای تیغه ۱۰۰ سانتیمتری (طول مش ۲۰ سانتیمتر).....

شکل ۱۳: نواحی مختلف در تیغه مسئله ۲ (تست خلاً).....

- شکل ۱۴: شار نوترونی (طول مش ۰/۰۱ سانتیمتر)..... ۷۰
- شکل ۱۵: قلب راکتور مسئله ۳..... ۷۱
- شکل ۱۶: توزیع شار نوترونی در دو گروه انرژی..... ۷۴
- شکل ۱۷: توزیع شار الحاقی در دو گروه انرژی..... ۷۵
- شکل ۱۸: قلب راکتور مسئله ۴..... ۷۶
- شکل ۱۹: توزیع شار نوترونی در دو گروه انرژی..... ۷۹
- شکل ۲۰: توزیع شار الحاقی در دو گروه انرژی..... ۸۰
- شکل ۲۱: مقایسه توزیع قدرت بدست آمده از کد ANOMOS و مرجع ۸۱

لیست جدول‌ها

- جدول شماره ۱: مشخصات مسئله ۱ ۵۴
- جدول شماره ۲: مشخصات مسئله ۲ ۶۹
- جدول شماره ۳: مشخصات قلب راکتور و بازتابنده مسئله ۳ ۷۲
- جدول شماره ۴: محاسبه ضریب تکثیر مؤثر نوترونی در طول مش‌های مختلف ۷۳
- جدول شماره ۵: مشخصات قلب راکتور و بازتابنده مسئله ۴ ۷۷
- جدول شماره ۶: محاسبه ضریب تکثیر مؤثر نوترونی در طول مش‌های مختلف ۷۸

۱- چکیده

یکی از روش‌های حل معادله پخش نوترون، روش نودال است که به چندین زیرروش مختلف تقسیم می‌شود. نودال تحلیلی یکی از روش‌های متداول نودال می‌باشد که از دقت بسیار خوبی برخوردار است.

این روش در ابتدا توسط اسمیت در سال ۱۹۷۹ ارائه و بعدها توسط افراد دیگر توسعه داده شد. یکی از مشکلات بکارگیری این روش، حجم بسیار زیاد عملیات جبری و روابط ریاضی آن می‌باشد. در این پژوهش، نحوه حل معادله پخش و الحاقی نوترون مستقل از زمان در مسائل چشمه ثابت و بحرانیّت در تیغه یک‌بعدی به روش نودال تحلیلی ارائه خواهد شد.

۲- کلیدواژه

معادله پخش نوترون، معادله الحاقی، نودال تحلیلی، مسئله چشمه ثابت، مسئله بحرانیت، تیغه یک بعدی

۳- اختصارات

عبارت	عبارت اختصاری	توضیح
Analytic Nodal Modal Solver	ANOMOS	آنوموس، کد حل کننده معادله پخش به روش نودال تحلیلی
Deviation in multiplication factor calculation (pcm)	err	میزان اختلاف در محاسبه ضریب تکثیر مؤثر بر حسب pcm
Maximum relative percent error in power distribution	ϵ_{\max}	بیشترین درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت
Average relative percent error in power distribution	ϵ_{ave}	میانگین درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت
Multiplication factor	k_{eff}	ضریب تکثیر مؤثر نوترونی
Analytic Nodal Method	ANM	روش نودال تحلیلی

۴- مقدمه

در روش نودال تحلیلی، تابع تحلیلی شار نوترونی در هر نود بدست آمده و سپس از این تابع تحلیلی در محاسبه جریان خالص روی سطوح بین نودها استفاده می‌گردد و نهایتاً، با استفاده از جریان بدست آمده، تصحیح معادلات پخش انجام می‌شود. دو مزیت مهم روش نودال تحلیلی عبارت است از: اولاً، بر معادله تراز نوترون بنا شده است و ثانیاً، برای مش-های با طول زیاد (در حد ابعاد یک مجتمع سوخت) به پاسخ‌های با دقت خوبی می‌رسد [۱].

۵- دامنه گزارش

در این گزارش، روش نودال تحلیلی برای حل معادله پخش نوترون دوگروهی (به دلیل سادگی، از ارائه جزئیات حالت یک‌گروهی، صرف‌نظر می‌شود) در مسائل چشمه‌ثابت و بحرانیّت، بررسی می‌شود. هندسه موردنظر در این گزارش، تیغه یک‌بعدی می‌باشد. در نهایت، با حل چندین مسئله آزمون، صحت روش مزبور تأیید می‌گردد.

۶- آشنایی با معادله پخش نوترون

در اکثر وضعیت‌های موردنظر در آنالیز راکتورهای آب سبک، کافی است که رفتار نوترونی راکتور بوسیله روش‌های تقریبی مدل‌سازی شود. مرسوم‌ترین تقریب مورد استفاده، همان نظریه پخش نوترون چندگروهی می‌باشد [۲]. بدین منظور، مجموعه معادلات دیفرانسیل جزئی جفت‌شده فضا و زمان بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 & \nabla \cdot D_g(\vec{r}, t) \nabla \varphi_g(\vec{r}, t) - \Sigma_{t,g}(\vec{r}, t) \varphi_g(\vec{r}, t) \\
 & + \sum_{g'=1}^G [\Sigma_{g' \rightarrow g}(\vec{r}, t) + (1 - \beta) \chi_{g,p} \nu \Sigma_{f,g'}(\vec{r}, t)] \varphi_{g'}(\vec{r}, t) \\
 & + \sum_{d=1}^D \chi_{g,d} \lambda_d C_d(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_g(\vec{r}, t); \quad g = 1, 2, \dots, G
 \end{aligned} \tag{۱-۶}$$

$$\beta_d \sum_{g=1}^G \nu \Sigma_{f,g}(\vec{r}, t) \varphi_g(\vec{r}, t) - \lambda_d C_d(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} C_d(\vec{r}, t); \quad d = 1, 2, \dots, D$$

که در آن

$G \equiv$ تعداد گروه‌های انرژی

$D \equiv$ تعداد گروه نپاهسته‌های تولیدکننده نوترون تأخیری

$\varphi_g \equiv$ شار عددی نوترون در گروه g

$C_d \equiv$ چگالی نیهسته‌های تولیدکننده نوترون تأخیری در گروه d ام

$D_g \equiv$ ضریب پخش در گروه g ام

$\Sigma_{t,g} \equiv$ سطح مقطع ماکروسکوپی کل در گروه g ام

$\Sigma_{f,g} \equiv$ سطح مقطع ماکروسکوپی شکافت در گروه g ام

$\Sigma_{g \rightarrow g'} \equiv$ سطح مقطع ماکروسکوپی پراکندگی از گروه g' به گروه g

$\chi_{g,p} \equiv$ طیف شکافت نوترون‌های آنی در گروه g ام

$\chi_{g,d} \equiv$ طیف شکافت نوترون‌های تأخیری در گروه g ام

$\nu \equiv$ تعداد متوسط نوترون‌های تولیدشده در هر شکافت

$$\beta \equiv \text{کل کسر نوترون‌های تأخیری} \left(\beta = \sum_{d=1}^D \beta_d \right)$$

$\lambda_d \equiv$ ثابت واپاشی نیا هسته‌های تولیدکننده نوترون تأخیری در گروه d ام

اگر خصوصیات مواد در مکان و زمان، توزیع اولیه شار نوترون در مکان و انرژی، و شرایط مرزی مناسب مشخص باشند، یک پاسخ یکتا برای معادله (۶-۱) وجود خواهد داشت. با توجه به پیچیدگی هندسی راکتورهای آب سبک کنونی، امکان تعریف کل هندسه غیرهمگن بصورت یکجا، عملاً، امکان‌پذیر نمی‌باشد. نگرشی که برای حل این مشکل در نظر گرفته می‌شود این است که هندسه موردنظر بصورت مجموعه‌ای از نواحی همگن بزرگ‌تر نسبت به قبل تعریف شود. البته، جزئیات فضایی هر یک از نواحی همگن‌شده به کمک محاسبات جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرد، تا پارامترهای

"معادل پخش همگن" که در هر یک از نواحی موردنظر ثابت می‌باشند، محاسبه شوند. به طور معمول، این همگن-سازی برای نواحی شامل یک یا چند مجتمع سوخت انجام می‌شود. بنابراین، محاسبه توزیع قدرت فضایی در کل قلب (با هندسه واقعی و تمام جزئیات) به یک سری نواحی همگن شده کاهش می‌یابد [۲].

۷- حل معادله پخش نوترون به روش نودال تحلیلی برای مسائل چشمه ثابت

بخش اول از این فصل به نحوه گسسته‌سازی مکانی معادله پخش نوترون دوگروهی به روش نودال تحلیلی اختصاص دارد و در بخش دوم، نحوه اجرای فرایند حل ارائه می‌گردد.

۷-۱- گسسته‌سازی مکانی معادله پخش نوترون

معادله پخش نوترون وابسته به زمان چندگروهی بصورت معادله (۶-۱) نوشته می‌شود. اگر جمله زمانی آن حذف شود، معادله پخش نوترون چندگروهی در حالت پایا و برای مسائل چشمه‌ثابت بصورت معادله (۷-۱)، حاصل می‌شود.

$$-\nabla \cdot \vec{J}_g(\vec{r}) - \Sigma_{t,g}(\vec{r})\phi_g(\vec{r}) + \sum_{g'=1}^G [\Sigma_{g' \rightarrow g}(\vec{r})]\phi_{g'}(\vec{r}) + S_g(\vec{r}) = 0 \quad (1-7)$$

$$g = 1, \dots, G$$

با فرض دو گروه انرژی، معادله مستقل از زمان پخش نوترون بصورت دستگاه معادلات (۷-۲) در می‌آید:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \vec{J}_1(\vec{r}) - \Sigma_{r,1}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) + \Sigma_{2 \rightarrow 1}(\vec{r})\phi_2(\vec{r}) + S_1(\vec{r}) = 0 \\ -\nabla \cdot \vec{J}_2(\vec{r}) - \Sigma_{r,2}(\vec{r})\phi_2(\vec{r}) + \Sigma_{1 \rightarrow 2}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) + S_2(\vec{r}) = 0 \end{cases} \quad (2-7)$$

برای گسسته‌سازی معادله (۲-۷) در یک هندسه معین، ابتدا باید هندسه موردنظر به نواحی مشخصی تقسیم‌بندی شود. به هر یک از این نواحی مشخص شده "نود" گفته می‌شود.

با انتگرال‌گیری از معادله (۲-۷) بر روی حجم کنترل (طول نود h^m)، معادله تراز بصورت روابط (۳-۷) بدست می‌آید.

$$\begin{cases} \frac{1}{h^m} [J_1^{m+} - J_1^{m-}] + \sum_{r,1}^m \phi_1^m - \sum_{s,21}^m \phi_2^m = S_1^m \\ \frac{1}{h^m} [J_2^m - J_2^{m-}] + \sum_{r,2}^m \phi_2^m - \sum_{s,12}^m \phi_1^m = S_2^m \end{cases} \quad (3-7)$$

در روابط فوق از تعاریف (۴-۷) تا (۶-۷) استفاده شده است.

$$\int_{h^m} \sum_{r,g} (x) \phi_g(x) dx = h^m \sum_{r,g}^m \phi_g^m \quad (4-7)$$

$$\int_{h^m} S_g(x) dx = h^m S_g^m \quad (5-7)$$

$$\int_{h^m} \nabla \cdot \bar{J}_g(x) dx = (J_g^{m+} - J_g^{m-}) \quad (6-7)$$

با استخراج رابطه‌ای بین جریان متوسط روی سطوح و شار متوسط هر نود، معادله (۷-۳) حل خواهد شد. نحوه محاسبه این رابطه در ادامه بیان می‌شود.

۷-۱-۱- رابطه شار و جریان

معادله دیفرانسیل پخش نوترون در دو گروه انرژی برای یک نود همگن بصورت معادله (۷-۷) نوشته می‌شود: [۲]

$$\begin{cases} -D_1 \frac{\partial^2 \varphi_1(x)}{\partial x^2} + \Sigma_{r,1} \varphi_1(x) - \Sigma_{s,21} \varphi_2(x) = S_1 \\ -D_2 \frac{\partial^2 \varphi_2(x)}{\partial x^2} + \Sigma_{r,2} \varphi_2(x) - \Sigma_{s,12} \varphi_1(x) = S_2 \end{cases} \quad (7-7)$$

شکل ماتریسی معادلات فوق بصورت معادله (7-8) است:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 \varphi_1(x)}{dx^2} \\ \frac{d^2 \varphi_2(x)}{dx^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} & -\frac{\Sigma_{s,2 \rightarrow 1}}{D_1} \\ -\frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2} & \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{S_1}{D_1} \\ -\frac{S_2}{D_2} \end{bmatrix} \quad (8-7)$$

با استفاده از تعاریف (7-9) و (7-10)،

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} & -\frac{\Sigma_{s,2 \rightarrow 1}}{D_1} \\ -\frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2} & \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} \end{bmatrix} \quad (9-7)$$

$$\begin{cases} D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \\ |S\rangle = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (10-7)$$

معادله (۱۱-۷) بدست می آید:

$$\frac{d^2}{dx^2} |\varphi(x)\rangle - A |\varphi(x)\rangle = -D^{-1}(|S\rangle) \quad (11-7)$$

از آنجاییکه معادلات گروهی به هم جفت شده‌اند، می‌توان از یک سری عملیات مجاز و مناسب استفاده کرد و این دو معادله را از هم جدا کرد. به این روش جداسازی، "دی کوپلینگ" و به معادلات حاصله، "مودال" گفته می‌شود [۳ و ۴].

ابتدا باید مقدارویژه‌ها و بردارویژه‌های ماتریس A تعیین شوند.

$$A|u_M\rangle = \lambda_M|u_M\rangle \quad (۷-۱۲)$$

$$\begin{cases} \lambda_1; |u_1\rangle = \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \end{bmatrix} \\ \lambda_2; |u_2\rangle = \begin{bmatrix} u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{bmatrix} \end{cases}$$

سپس با تعاریف (۷-۱۳) و (۷-۱۴)،

$$[\mathbf{u}_M] = [|u_1\rangle \quad |u_2\rangle] \Rightarrow \mathbf{R}^{-1} = [\mathbf{u}_M] \quad (13-7)$$

$$[\lambda_M]_{\text{diag}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^{-1} = [\lambda_M]$$

$$\begin{cases} |\varphi(x)\rangle = \mathbf{R}^{-1} |\psi(x)\rangle \Rightarrow |\psi(x)\rangle = \mathbf{R} |\varphi(x)\rangle \\ (|\mathbf{S}\rangle) = \mathbf{D} \mathbf{R}^{-1} |\mathbf{S}\rangle \Rightarrow |\mathbf{S}\rangle = \mathbf{R} \mathbf{D}^{-1} (|\mathbf{S}\rangle) \end{cases} \quad (14-7)$$

معادله مودال (15-7) بدست خواهد آمد:

$$\frac{d^2}{dx^2} |\psi(x)\rangle - \lambda_M |\psi(x)\rangle = -|\mathbf{S}\rangle \quad (15-7)$$

پاسخ معادله فوق بصورت معادله (16-7) نوشته خواهد شد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_M(x) = A_M \text{Exp}(\alpha_M x) + B_M \text{Exp}(-\alpha_M x) + P_M(x) \\ \alpha_M = \sqrt{\lambda_M} \\ P_M(x) = \frac{S_M}{\lambda_M} \\ M = 1, 2 \end{array} \right. \quad (16-7)$$

با توجه به مقادیر شار و جریان مودال روی مرزهای نود و همچنین شار میانگین مودال، ضرایب مجهول A و B محاسبه می‌شوند.

نهایتاً، رابطه (17-7) بدست می‌آید:

$$\Psi_M\left(\mp \frac{h}{2}\right) - P_M\left(\mp \frac{h}{2}\right) = C_M^f [\bar{\Psi}_M - \bar{P}_M] \pm C_M^j \frac{h}{2} \left[J_M\left(\mp \frac{h}{2}\right) - P'_M\left(\mp \frac{h}{2}\right) \right]$$

$$\begin{cases} C_M^f = \frac{2\alpha_M h}{\text{Exp}(\alpha_M h) - \text{Exp}(-\alpha_M h)} = \frac{\alpha_M h}{\text{Sinh}(\alpha_M h)} \\ C_M^j = \frac{\text{Exp}(\alpha_M h) + \text{Exp}(-\alpha_M h) - 2}{\text{Exp}(\alpha_M h) - \text{Exp}(-\alpha_M h)} \times \frac{2}{\alpha_M h} = \frac{\text{Tanh}(\alpha_M h/2)}{\alpha_M h/2} \end{cases} \quad (17-7)$$

$$M = 1, 2$$

به ضرایب C^f و C^j ، "ضرایب مودال اسکالر" گفته می‌شود [۴].

برای خروج از فضای مودال و بازگشت به فضای نودال از رابطه (۷-۱۸) استفاده می‌شود:

$$T_M\left(\mp \frac{h}{2}\right) = C_M^f \bar{P}_M - P_M\left(\mp \frac{h}{2}\right) \mp C_M^j \frac{h}{2} P'_M\left(\mp \frac{h}{2}\right)$$

$$AF = [R]^{-1} \times [CF] \times [R]$$

$$(18-7)$$

$$AJ = [R]^{-1} \times [CJ] \times [R]$$

رابطه بین جریان و شار نوترونی روی سطوح نود در فضای نودال بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left| \varphi_g \left(\bar{x} \frac{h_x}{2} \right) \right\rangle = [AF] \left| \bar{\varphi}_g \right\rangle \pm \frac{h}{2} [AJ] [D_g]^{-1} \left| J_g \left(\bar{x} \frac{h}{2} \right) \right\rangle - R^{-1} \left| T_M \left(\bar{x} \frac{h}{2} \right) \right\rangle$$

(۱۹-۷)

$g = 1,2$
 $M = 1,2$

سپس با استفاده از شرط پیوستگی شار و جریان روی مرز بین نودها، یک ارتباط ریاضی بین شار متوسط هر نود و جریان خالص روی مرزهای همان نود بدست می‌آید.

شرایط پیوستگی شار و جریان بر روی سطوح نود m بصورت رابطه (۲۰-۷) نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{1,R}^m \\ \varphi_{2,R}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{1,L}^{m+1} \\ \varphi_{2,L}^{m+1} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} J_{1,R}^m \\ J_{2,R}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{1,L}^{m+1} \\ J_{2,L}^{m+1} \end{bmatrix} \quad (20-7)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{1,R}^{m-1} \\ \varphi_{2,R}^{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{1,L}^m \\ \varphi_{2,L}^m \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} J_{1,R}^{m-1} \\ J_{2,R}^{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{1,L}^m \\ J_{2,L}^m \end{bmatrix}$$

با استفاده از رابطه (۷-۱۹)، و جایگذاری آن در روابط فوق، معادله (۷-۲۱) بدست می آید:

$$\left\{ \frac{h^m}{2} [AJ]^m [D^{-1}]^m + \frac{h^{m+1}}{2} [AJ]^{m+1} [D^{-1}]^{m+1} \right\} \begin{bmatrix} J_1^{m_x+} \\ J_2^{m_x+} \end{bmatrix} = [AF]^{m_y} \begin{bmatrix} \varphi_1^m \\ \varphi_2^m \end{bmatrix} - [AF]^{m+1} \begin{bmatrix} \varphi_1^{m+1} \\ \varphi_2^{m+1} \end{bmatrix} + \left\{ -[R^{-1}]^m \begin{bmatrix} T_{1,R}^m \\ T_{2,R}^m \end{bmatrix} + [R^{-1}]^{m+1} \begin{bmatrix} T_{1,L}^{m+1} \\ T_{2,L}^{m+1} \end{bmatrix} \right\} \quad (21-7)$$

با استفاده از تعاریف (۷-۲۲)،

$$\begin{cases} [CJC]_{\mathbb{R}}^m = \left\{ \frac{h^m}{2} [AJ]^m [D^{-1}]^m + \frac{h^{m+1}}{2} [AJ]^{m+1} [D^{-1}]^{m+1} \right\} \\ [CJC]_{\mathbb{L}}^m = \left\{ \frac{h^m}{2} [AJ]^m [D^{-1}]^m + \frac{h^{m-1}}{2} [AJ]^{m-1} [D^{-1}]^{m-1} \right\} \\ [CJCN] = [CJC]^{-1} \end{cases} \quad (22-7)$$

روابط (۲۳-۷) حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} J_1^{m+} \\ J_2^{m+} \end{bmatrix} = [CJCN]_{\mathbb{R}}^m \left\{ [AF]^m \begin{bmatrix} \Phi_1^m \\ \Phi_2^m \end{bmatrix} - [AF]^{m+1} \begin{bmatrix} \Phi_1^{m+1} \\ \Phi_2^{m+1} \end{bmatrix} + \left\{ -[R^{-1}]^m \begin{bmatrix} T_{1,R}^m \\ T_{2,R}^m \end{bmatrix} + [R^{-1}]^{m+1} \begin{bmatrix} T_{1,L}^{m+1} \\ T_{2,L}^{m+1} \end{bmatrix} \right\} \right\} \\ \begin{bmatrix} J_1^{m-} \\ J_2^{m-} \end{bmatrix} = [CJCN]_{\mathbb{L}}^m \left\{ [AF]^{m-1} \begin{bmatrix} \Phi_1^{m-1} \\ \Phi_2^{m-1} \end{bmatrix} - [A]^m \begin{bmatrix} \Phi_1^m \\ \Phi_2^m \end{bmatrix} + \left\{ -[R^{-1}]^{m-1} \begin{bmatrix} T_{1,R}^{m-1} \\ T_{2,R}^{m-1} \end{bmatrix} + [R^{-1}]^m \begin{bmatrix} T_{x,1,L}^m \\ T_{x,2,L}^m \end{bmatrix} \right\} \right\} \end{cases} \quad (23-7)$$

برای نمایش جمله جریان از تعاریف (۲۴-۷) و (۲۵-۷) استفاده می‌شود:

$$\begin{cases} CP_{1,R,g}^m = (cjc n_1^{m+}) (af_{11}^m) + (cjc n_2^{m+}) (af_{21}^m) \\ CP_{1,R,g,R}^m = (cjc n_1^{m+}) (af_{11}^{m+1}) + (cjc n_2^{m+}) (af_{21}^{m+1}) \\ CP_{2,R,g}^m = (cjc n_1^{m+}) (af_{12}^m) + (cjc n_2^{m+}) (af_{22}^m) \\ CP_{2,R,g,R}^m = (cjc n_1^{m+}) (af_{12}^{m+1}) + (cjc n_2^{m+}) (af_{22}^{m+1}) \end{cases} \quad (24-7)$$

$g = 1,2$

$$\begin{cases} CP_{1,L,g}^m = (cjc n_1^{m-}) (af_{11}^m) + (cjc n_2^{m-}) (af_{21}^m) \\ CP_{1,L,g,L}^m = (cjc n_1^{m-}) (af_{11}^{m-1}) + (cjc n_2^{m-}) (af_{21}^{m-1}) \\ CP_{2,L,g}^m = (cjc n_1^{m-}) (af_{12}^m) + (cjc n_2^{m-}) (af_{22}^m) \\ CP_{2,L,g,L}^m = (cjc n_1^{m-}) (af_{12}^{m-1}) + (cjc n_2^{m-}) (af_{22}^{m-1}) \end{cases} \quad (25-7)$$

$g = 1,2$

به کمک تعاریف فوق، جملات جریان بصورت روابط (۲۶-۷) و (۲۷-۷) نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} J_1^{m+} \\ J_2^{m+} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} CP_{1,R,1}^m & CP_{2,R,1}^m \\ CP_{1,R,2}^m & CP_{2,R,2}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^m \\ \varphi_2^m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} CP_{1,R,1,R}^m & CP_{2,R,1,R}^m \\ CP_{1,R,2,R}^m & CP_{2,R,2,R}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^{m+1} \\ \varphi_2^{m+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} CT_{1,R,1}^m & CT_{2,R,1}^m \\ CT_{1,R,2}^m & CT_{2,R,2}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,R}^m \\ T_{2,R}^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} CT_{1,R,1,R}^m & CT_{2,R,1,R}^m \\ CT_{1,R,2,R}^m & CT_{2,R,2,R}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,L}^{m+1} \\ T_{2,L}^{m+1} \end{bmatrix} \right\} \quad (26-7)$$

$$\begin{bmatrix} J_1^{m-} \\ J_2^{m-} \end{bmatrix} = \left\{ - \begin{bmatrix} CP_{1,L,1}^m & CP_{2,L,1}^m \\ CP_{1,L,2}^m & CP_{2,L,2}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^m \\ \phi_2^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} CP_{1,L,1,L}^m & CP_{2,L,1,L}^m \\ CP_{1,L,2,L}^m & CP_{2,L,2,L}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{m-1} \\ \phi_2^{m-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} CT_{1,L,1}^m & CT_{2,L,1}^m \\ CT_{1,L,2}^m & CT_{2,L,2}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,L}^m \\ T_{2,L}^m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} CT_{1,L,1,L}^m & CT_{2,L,1,L}^m \\ CT_{1,L,2,L}^m & CT_{2,L,2,L}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1,R}^{m-1} \\ T_{2,R}^{m-1} \end{bmatrix} \right\} \quad (27-7)$$

با تعریف پارامترهای λ_L و λ_R بصورت روابط (28-7)،

$$\begin{cases} \frac{J_g^{1-}}{\phi_{g,L}^1} = -\lambda_L \Rightarrow \phi_{g,L}^1 = -\frac{J_g^{1-}}{\lambda_L} \\ \frac{J_g^{N+}}{\phi_{g,L}^N} = +\lambda_R \Rightarrow \phi_{g,R}^N = +\frac{J_g^{N+}}{\lambda_R} \end{cases} \quad (28-7)$$

و اعمال آنها به معادلات (19-7) و (20-7)، انواع شرایط مرزی تعریف می‌شوند.

همچنین، پارامتر λ بصورت زیر مقداردهی می‌شود:

$$\lambda = \begin{cases} 0.0 & \text{perfect reflector} \\ 0.5 & \text{zero incoming current (vacuum)} \\ \infty & \text{zero flux} \end{cases} \quad (29-7)$$

با جایگذاری جملات جریان داده شده در معادلات (۲۶-۷) و (۲۷-۷) در روابط (۳-۷)، دستگاه معادلات خطی (۷-۷) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} [A_1]\{\psi_1\} &= \{S_1\} - \{[A_2]\{\psi_2\} + \{C_1\}\} \\ [B_2]\{\psi_2\} &= \{S_2\} - \{[B_1]\{\psi_1\} + \{C_2\}\} \end{aligned} \quad (30-7)$$

که در آن ماتریس‌های A و B، ماتریس‌های ضرایب بوده و ماتریس C نیز ناشی از توزیع مکانی چشمه نوترون خارجی می‌باشد.

۷-۲- الگوریتم حل مسائل چشمه ثابت

روند حل معادله پخش نوترون در محیط غیر تکثیرپذیر بصورت زیر می باشد:

۱. خواندن مقادیر ورودی برنامه شامل:

۱.۱. ابعاد تیغه یک بعدی (بر حسب سانتیمتر L)

۲.۱. تعداد مش‌ها (نقاطی که شار نوترونی در آنها محاسبه می شود N)

۳.۱. ضریب پخش گروهی (D)

۴.۱. سطح مقطع گروهی ماکروسکوپی جذب پرتوزا $(\Sigma_{\text{capture}})$

۵.۱. سطح مقطع ماکروسکوپی پراکندگی بین گروه‌های انرژی $(\Sigma_{s,g \rightarrow g'})$

۶.۱. شرایط مرزی سمت چپ و راست در هر راستا (پارامترهای λ_L و λ_R)

۷.۱. معیار همگرایی شار (ϵ_{phi})

۸.۱. مقدار اولیه برای شارهای گروهی

۲. تعیین عناصر ماتریس‌های A و B در معادله (۷-۳۰).

۳. تعیین عناصر ماتریس C بر اساس توزیع مکانی چشمه خارجی.

۴. حل سیستم‌های خطی (۷-۳۰).

۸- حل معادله پخش نوترون به روش نودال تحلیلی برای مسائل بحرانی

بخش اول از این فصل به نحوه گسسته‌سازی مکانی معادله پخش در دو گروه انرژی به روش نودال تحلیلی اختصاص دارد و در بخش دوم، نحوه اجرای فرایند حل ارائه می‌گردد.

۸-۱- گسسته‌سازی مکانی معادله پخش نوترون

معادله پخش نوترون وابسته به زمان چندگروهی بصورت معادله (۶-۱) نوشته می‌شود. اگر جمله زمانی آن حذف شود، معادله پخش نوترون چندگروهی در حالت پایا و برای مسائل بحرانیت، بصورت معادله (۸-۱)، حاصل می‌شود.

$$-\nabla \cdot \vec{J}_g(\vec{r}) - \Sigma_{t,g}(\vec{r})\phi_g(\vec{r}) + \sum_{g'=1}^G \left[\Sigma_{g' \rightarrow g}(\vec{r}) + \chi_g \left(\frac{1}{k_{\text{eff}}} \right) \nu \Sigma_{f,g'}(\vec{r}) \right] \phi_{g'}(\vec{r}) = 0 \quad (1-8)$$

$g = 1, \dots, G$

با فرض دو گروه انرژی، معادله مستقل از زمان پخش نوترون بصورت معادله (۸-۲) در می‌آید:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \vec{J}_1(\vec{r}) - \Sigma_{r,1}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) + \Sigma_{2 \rightarrow 1}(\vec{r})\phi_2(\vec{r}) + \frac{1}{k_{\text{eff}}} [\nu \Sigma_{f,1}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) + \nu \Sigma_{f,2}(\vec{r})\phi_2(\vec{r})] = 0 \\ -\nabla \cdot \vec{J}_2(\vec{r}) - \Sigma_{r,2}(\vec{r})\phi_2(\vec{r}) + \Sigma_{1 \rightarrow 2}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) = 0 \end{cases} \quad (2-8)$$

برای گسسته‌سازی معادله (۲-۸) در یک هندسه معین، ابتدا باید هندسه موردنظر به نواحی مشخصی تقسیم‌بندی شود. به هر یک از این نواحی مشخص شده "نود" گفته می‌شود.

با انتگرال‌گیری از معادله (۲-۸) بر روی حجم کنترل (طول نود h^m)، معادله تراز نوترون بصورت معادله (۳-۸) نوشته می‌شود.

$$\begin{cases} \frac{1}{h^m} [J_1^{m+} - J_1^{m-}] + \Sigma_{r,1}^m \phi_1^m - \Sigma_{s,21}^m \phi_2^m = \frac{1}{k_{eff}} [v \Sigma_{f,1}^m \phi_1^m + v \Sigma_{f,2}^m \phi_2^m] \\ \frac{1}{h^m} [J_2^{m+} - J_2^{m-}] + \Sigma_{r,2}^m \phi_2^m - \Sigma_{s,12}^m \phi_1^m = 0 \end{cases} \quad (۳-۸)$$

در روابط فوق از تعاریف (۴-۸) تا (۶-۸) استفاده شده است.

$$\int_{h^m} \Sigma_{r,g}^m(x) \phi_g^m(x) dx = h^m (\Sigma_{r,g}^m) \phi_g^m \quad (۴-۸)$$

$$\int_{h^m} \nu \Sigma_{r,g}^m(x) \phi_g^m(x) dx = h^m (\nu \Sigma_{f,g}^m) \phi_g^m \quad (5-8)$$

$$\int_{h^m} \nabla \cdot \bar{J}_g(x) dx = (J_g^{m+} - J_g^{m-}) \quad (6-8)$$

با استخراج رابطه‌ای بین جریان متوسط روی سطوح و شار متوسط هر نود، معادله (۳-۸) حل خواهد شد. نحوه محاسبه این رابطه در ادامه بیان می‌شود.

۸-۱-۱- رابطه شار و جریان [۵]

معادله دیفرانسیل پخش نوترون در دو گروه انرژی برای یک نود همگن بصورت معادله (۷-۸) نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} -D_1 \frac{\partial^2 \varphi_1(x)}{\partial x^2} + \Sigma_{r,1} \varphi_1(x) - \Sigma_{s,21} \varphi_2(x) = \frac{1}{k_{\text{eff}}} [(v\Sigma_{f,1})\varphi_1(x) + (v\Sigma_{f,2})\varphi_2(x)] \\ -D_2 \frac{\partial^2 \varphi_2(x)}{\partial x^2} + \Sigma_{r,2} \varphi_2(x) - \Sigma_{s,12} \varphi_1(x) = 0 \end{cases} \quad (7-8)$$

شکل ماتریسی معادله فوق بصورت معادله (8-8) است:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 \varphi_1(x)}{dx^2} \\ \frac{d^2 \varphi_2(x)}{dx^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma_{r,1} - \frac{v\Sigma_{f,1}}{k_{\text{eff}}} & -\Sigma_{s,2 \rightarrow 1} + \frac{v\Sigma_{f,2}}{k_{\text{eff}}} \\ D_1 & D_1 \\ -\frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2} & \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8-8)$$

با استفاده از تعاریف (8-9) و (8-10)،

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\Sigma_{r,1} - \frac{v\Sigma_{f,1}}{k_{eff}}}{D_1} & \frac{\Sigma_{s,2 \rightarrow 1} + \frac{v\Sigma_{f,2}}{k_{eff}}}{D_1} \\ -\frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2} & \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} \end{bmatrix} \quad (9-8)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \quad (10-8)$$

معادله (۱۱-۸) بدست می آید:

$$\frac{d^2}{dx^2} |\varphi(x)\rangle - A |\varphi(x)\rangle = 0 \quad (11-8)$$

از آنجایی که معادلات گروهی به هم جفت شده‌اند. می‌توان از یک سری عملیات مجاز و مناسب استفاده کرد و این دو معادله را از هم جدا کرد. به این روش جداسازی، "دی کوپلینگ" و به معادلات حاصله، "مودال" گفته می‌شود.

ابتدا باید مقدارویژه‌ها و بردارویژه‌های ماتریس A تعیین شوند:

$$A|u_M\rangle = \lambda_M|u_M\rangle \Rightarrow \begin{cases} |u_1\rangle = \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \end{bmatrix} \\ |u_2\rangle = \begin{bmatrix} u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (۱۲-۸)$$

سپس با تعاریف (۱۳-۸) و (۱۴-۸)،

$$\begin{cases} [u_M] = [|u_1\rangle \quad |u_2\rangle] \Rightarrow R^{-1} = [u_M] \\ [\lambda_M]_{\text{diag}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow RAR^{-1} = [\lambda_M] \end{cases} \quad (۱۳-۸)$$

$$|\varphi(x)\rangle = R^{-1}|\psi(x)\rangle \Rightarrow |\psi(x)\rangle = R|\varphi(x)\rangle \quad (۱۴-۸)$$

معادله مودال (۱۵-۸) بدست خواهد آمد:

$$\frac{d^2}{dx^2} |\psi(x)\rangle - \lambda_M |\psi(x)\rangle = 0 \quad (15-8)$$

پاسخ معادله فوق بصورت معادله (۱۶-۸) نوشته خواهد شد:

$$\begin{aligned} \psi_M(x) &= A_M \text{Exp}(\alpha_M x) + B_M \text{Exp}(-\alpha_M x) \\ \alpha_M &= \sqrt{\lambda_M} \\ M &= 1,2 \end{aligned} \quad (16-8)$$

با توجه به مقادیر شار و جریان مودال روی مرزهای نود و همچنین شار میانگین مودال، ضرایب مجهول A و B محاسبه می شوند.

نهایتاً، رابطه (۱۷-۸) بدست می آید:

$$\psi_M(\mp \frac{h}{2}) = C_M^f [\bar{\psi}_M] \pm C_M^j \frac{h}{2} \left[J_M(\mp \frac{h}{2}) \right]$$

$$\begin{cases} C_M^f = \frac{2\alpha_M h}{\text{Exp}(\alpha_M h) - \text{Exp}(-\alpha_M h)} = \frac{\alpha_M h}{\text{Sinh}(\alpha_M h)} \\ C_M^j = \frac{\text{Exp}(\alpha_M h) + \text{Exp}(-\alpha_M h) - 2}{\text{Exp}(\alpha_M h) - \text{Exp}(-\alpha_M h)} \times \frac{2}{\alpha_M h} = \frac{\text{Tanh}(\alpha_M h/2)}{\alpha_M h/2} \end{cases} \quad (17-8)$$

$$M = 1,2$$

به ضرایب C^f و C^j ، "ضرایب مودال اسکالر" گفته می‌شود.

رابطه بین جریان و شار نوترونی روی سطوح نود در فضای نودال بصورت رابطه (۸-۱۸) نوشته می‌شود:

$$\left| \varphi_g \left(\mp \frac{h}{2} \right) \right\rangle = [AF] \left| \bar{\varphi}_g \right\rangle \pm \frac{h}{2} [AJ] [D_g]^{-1} \left| J_g \left(\mp \frac{h}{2} \right) \right\rangle \quad (18-8)$$

$$g = 1,2$$

سپس با استفاده از شرایط پیوستگی شار و جریان روی مرز بین نودها، یک ارتباط ریاضی بین شار متوسط هر نود و جریان خالص روی مرزهای همان نود بدست می‌آید.

شرایط پیوستگی شار و جریان بر روی سطوح نود m بصورت روابط (۱۹-۸) نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \phi_{1,R}^m \\ \phi_{2,R}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,L}^{m+1} \\ \phi_{2,L}^{m+1} \end{bmatrix} & \text{and} & \begin{bmatrix} J_{1,R}^m \\ J_{2,R}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{1,L}^{m+1} \\ J_{2,L}^{m+1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \phi_{1,R}^{m-1} \\ \phi_{2,R}^{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,L}^m \\ \phi_{2,L}^m \end{bmatrix} & \text{and} & \begin{bmatrix} J_{1,R}^{m-1} \\ J_{2,R}^{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{1,L}^m \\ J_{2,L}^m \end{bmatrix} \end{cases} \quad (19-8)$$

با استفاده از رابطه (۱۸-۸)، و جایگذاری آن در رابطه فوق، معادله (۲۰-۸) بدست می‌آید:

$$\Rightarrow \left\{ \frac{h^m}{2} [AJ]^m [D^{-1}]^m + \frac{h^{m+1}}{2} [AJ]^{m+1} [D^{-1}]^{m+1} \right\} \begin{bmatrix} J_1^{m+1} \\ J_2^{m+1} \end{bmatrix} = [AF]^m \begin{bmatrix} \phi_1^m \\ \phi_2^m \end{bmatrix} - [AF]^{m+1} \begin{bmatrix} \phi_1^{m+1} \\ \phi_2^{m+1} \end{bmatrix} \quad (20-8)$$

با استفاده از تعاریف (۲۱-۸)،

$$\begin{cases} [\text{CJC}]_{\text{R}}^m = \left\{ \frac{h^m}{2} [\text{AJ}]^m [\text{D}^{-1}]^m + \frac{h^{m+1}}{2} [\text{AJ}]^{m+1} [\text{D}^{-1}]^{m+1} \right\} \\ [\text{CJC}]_{\text{L}}^m = \left\{ \frac{h^m}{2} [\text{AJ}]^m [\text{D}^{-1}]^m + \frac{h^{m-1}}{2} [\text{AJ}]^{m-1} [\text{D}^{-1}]^{m-1} \right\} \\ [\text{CJCN}] = [\text{CJC}]^{-1} \end{cases} \quad (21-8)$$

روابط (۲۲-۸) حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} J_1^{m+} \\ J_2^{m+} \end{bmatrix} = [\text{CJCN}]_{\text{R}}^m \left\{ [\text{AF}]^m \begin{bmatrix} \Phi_1^m \\ \Phi_2^m \end{bmatrix} - [\text{AF}]^{m+1} \begin{bmatrix} \Phi_1^{m+1} \\ \Phi_2^{m+1} \end{bmatrix} \right\} \\ \begin{bmatrix} J_1^{m-} \\ J_2^{m-} \end{bmatrix} = [\text{CJCN}]_{\text{L}}^m \left\{ [\text{AF}]^{m-1} \begin{bmatrix} \Phi_1^{m-1} \\ \Phi_2^{m-1} \end{bmatrix} - [\text{AF}]^m \begin{bmatrix} \Phi_1^m \\ \Phi_2^m \end{bmatrix} \right\} \end{cases} \quad (22-8)$$

برای نمایش جمله جریان از تعاریف (۲۳-۸) و (۲۴-۸) استفاده می‌شود:

$$\begin{cases} CP_{1,R,g}^m = (cjc n_1^{m+,m_y}) (af_{11}^m) + (cjc n_2^{m+}) (af_{21}^m) \\ CP_{1,R,g,R}^m = (cjc n_1^{m+}) (af_{11}^{m+1}) + (cjc n_2^{m+}) (af_{21}^{m+1}) \\ CP_{2,R,g}^m = (cjc n_1^{m+}) (af_{12}^m) + (cjc n_2^{m+}) (af_{22}^m) \\ CP_{2,R,g,R}^m = (cjc n_1^{m+}) (af_{12}^{m+1}) + (cjc n_2^{m+}) (af_{22}^{m+1}) \end{cases} \quad (23-8)$$

$g = 1, 2$

$$\begin{cases} CP_{1,L,g}^m = (cjc n_1^{m-}) (af_{11}^m) + (cjc n_2^{m-}) (af_{21}^m) \\ CP_{1,L,g,L}^m = (cjc n_1^{m-}) (af_{11}^{m-1}) + (cjc n_2^{m-}) (af_{21}^{m-1}) \\ CP_{2,L,g}^m = (cjc n_1^{m-}) (af_{12}^m) + (cjc n_2^{m-}) (af_{22}^m) \\ CP_{2,L,g,L}^m = (cjc n_1^{m-}) (af_{12}^{m-1}) + (cjc n_2^{m-}) (af_{22}^{m-1}) \end{cases} \quad (24-8)$$

$g = 1, 2$

به کمک تعاریف فوق، جملات جریان بصورت روابط (۲۵-۸) و (۲۶-۸) نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} J_1^{m+} \\ J_2^{m+} \end{bmatrix} = \left\{ + \begin{bmatrix} CP_{1,R,1}^m & CP_{2,R,1}^m \\ CP_{1,R,2}^m & CP_{2,R,2}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^m \\ \phi_2^m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} CP_{1,R,1,R}^m & CP_{2,R,1,R}^m \\ CP_{1,R,2,R}^m & CP_{2,R,2,R}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{m+1} \\ \phi_2^{m+1} \end{bmatrix} \right\} \quad (25-8)$$

$$\begin{bmatrix} J_1^{m-} \\ J_2^{m-} \end{bmatrix} = \left\{ - \begin{bmatrix} CP_{1,L,1}^m & CP_{2,L,1}^m \\ CP_{1,L,2}^m & CP_{2,L,2}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^m \\ \phi_2^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} CP_{1,L,1,L}^m & CP_{2,L,1,L}^m \\ CP_{1,L,2,L}^m & CP_{2,L,2,L}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{m-1} \\ \phi_2^{m-1} \end{bmatrix} \right\} \quad (26-8)$$

با تعریف پارامترهای λ_L و λ_R بصورت روابط (27-8)،

$$\begin{cases} \frac{J_g^1-}{\phi_{g,L}^1} = -\lambda_L \Rightarrow \phi_{g,L}^1 = -\frac{J_g^1-}{\lambda_L} \\ \frac{J_g^N+}{\phi_{g,L}^N} = +\lambda_R \Rightarrow \phi_{g,R}^N = +\frac{J_g^N+}{\lambda_R} \end{cases} \quad (27-8)$$

و اعمال آنها به روابط (18-8) و (19-8)، انواع شرایط مرزی قابل تعریف می‌باشد.

همچنین، پارامتر λ بصورت زیر مقداردهی می‌شود:

$$\lambda = \begin{cases} 0.0 & \text{perfect reflector} \\ 0.5 & \text{zero incoming current (vacuum)} \\ \infty & \text{zero flux} \end{cases} \quad (28-8)$$

با جایگذاری جملات جریان، داده شده در روابط (۲۵-۸) و (۲۶-۸)، در معادلات (۳-۸)، دستگاه معادلات خطی (۸-۲۹) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} [A_1]\{\psi_1\} &= \frac{1}{k_{\text{eff}}} \{ [F_1]\{\psi_1\} + [F_1]\{\psi_1\} \} - \{ [A_2]\{\psi_2\} \} \\ [B_2]\{\psi_2\} &= -\{ [B_1]\{\psi_1\} \} \end{aligned} \quad (29-8)$$

ماتریس‌های A و B ناشی از اتلاف نوترون می‌باشند که باید در هر مرحله (تکرار) به‌روزرسانی شوند. همچنین، ماتریس F ناشی از تولید نوترون می‌باشد.

۸-۲- الگوریتم حل

روند حل معادله پخش نوترون در محیط تکثیرپذیر بصورت زیر می باشد.

۱. خواندن مقادیر ورودی برنامه شامل:

۱.۱. طول تیغه یک بعدی (بر حسب سانتیمتر (L

۲.۱. تعداد مشها (نقاطی که شار نوترونی در آنها محاسبه می شود (N

۳.۱. ضریب پخش (D)

۴.۱. سطح مقطع گروهی ماکروسکوپی جذب پرتوزا (Σ_{capture})

۵.۱. سطح مقطع گروهی ماکروسکوپی شکافت (Σ_{fission})

۶.۱. سطح مقطع ماکروسکوپی پراکندگی بین گروه های انرژی ($\Sigma_{s,g \rightarrow g'}$)

۷.۱. تعداد نوترون های آزاد شده در هر شکافت (ν)

۸.۱. شرایط مرزی سمت چپ و راست (پارامترهای λ_L و λ_R)

- ۹.۱. معیار همگرایی شار (ϵ_{phi})
- ۱۰.۱. معیار همگرایی ضریب تکثیر مؤثر ($\epsilon_{k_{\text{eff}}}$)
- ۱۱.۱. مقدار اولیه برای شارهای گروهی
- ۱۲.۱. مقدار اولیه برای ضریب تکثیر مؤثر
۲. تعیین عناصر ماتریس F در معادله (۸-۲۹).
۳. تعیین عناصر ماتریس‌های A و B در معادله (۸-۲۹) با استفاده از پاسخ مرحله (تکرار) قبلی.
۴. حل سیستم‌های خطی (۸-۲۹).
۵. استفاده از شارهای جدید در محاسبه عناصر ماتریس‌های A و B .
۶. مراحل ۳ تا ۵ تا ارضای شرایط همگرایی ادامه یابد.

۹- حل معادله پخش الحاقی نوترون به روش نودال تحلیلی

معادله الحاقی تراز نوترون دوگروهی برای نودهای مختلف در تیغه یک بعدی، بصورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{cases} \frac{1}{h^m} [\hat{J}_1^{m+} - \hat{J}_1^{m-}] + \Sigma_{r,1}^m \hat{\phi}_1^m - \Sigma_{s,12}^m \hat{\phi}_2^m = \frac{1}{k_{\text{eff}}} (v \Sigma_{f,1}^m \hat{\phi}_1^m) \\ \frac{1}{h^m} [\hat{J}_2^{m+} - \hat{J}_2^{m-}] + \Sigma_{r,2}^m \hat{\phi}_2^m - \Sigma_{s,21}^m \hat{\phi}_1^m = \frac{1}{k_{\text{eff}}} (v \Sigma_{f,2}^m \hat{\phi}_1^m) \end{cases} \quad (1-9)$$

معادله دیفرانسیل الحاقی پخش نوترون در دو گروه انرژی برای یک نود همگن بصورت معادلات (۹-۲) نوشته می شود:

$$\begin{cases} -D_1 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1(x)}{\partial x^2} + \Sigma_{r,1} \hat{\phi}_1(x) - \Sigma_{s,12} \hat{\phi}_2(x) = \frac{1}{k_{\text{eff}}} (v \Sigma_{f,1} \hat{\phi}_1(x)) \\ -D_2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_2(x)}{\partial x^2} + \Sigma_{r,2} \hat{\phi}_2(x) - \Sigma_{s,21} \hat{\phi}_1(x) = \frac{1}{k_{\text{eff}}} (v \Sigma_{f,2} \hat{\phi}_2(x)) \end{cases} \quad (2-9)$$

شکل ماتریسی معادلات فوق بصورت (۳-۹) نوشته می شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 \hat{\phi}_1(x)}{dx^2} \\ \frac{d^2 \hat{\phi}_2(x)}{dx^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\Sigma_{r,1} - \frac{v\Sigma_{f,1}}{k_{eff}}}{D_1} & -\frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_1} \\ -\frac{\Sigma_{s,2 \rightarrow 1}}{D_2} & \frac{\Sigma_{r,2} - \frac{v\Sigma_{f,2}}{k_{eff}}}{D_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1(x) \\ \hat{\phi}_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۳-۹)$$

با استفاده از تعاریف (۴-۹)،

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} & -\frac{\Sigma_{s,2 \rightarrow 1}}{D_1} \\ -\frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2} & \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} \end{bmatrix} \quad (۴-۹)$$

معادله (۵-۹) بدست خواهد آمد:

$$\frac{d^2}{dx^2} |\hat{\phi}(x)\rangle - A |\hat{\phi}(x)\rangle = 0 \quad (5-9)$$

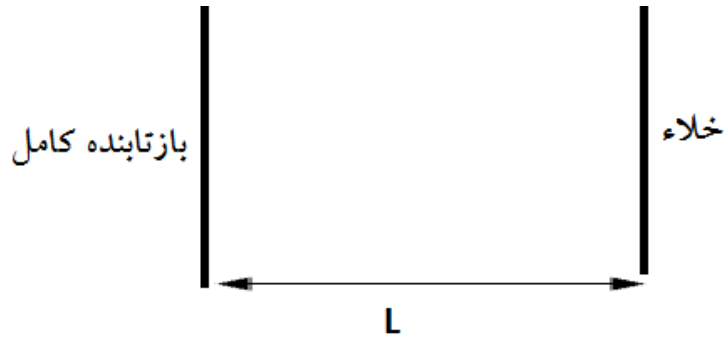
در ادامه، روابطی که در بخش ۸-۱-۱ استخراج شده‌اند، برای حل معادلات الحاقی پخش نوترون دوگروهی قابل استفاده می‌باشند. در ضمن الگوریتم حل این معادلات با الگوریتم ذکر شده در بخش ۸-۲ یکسان است.

۱۰- راستی آزمایی نتایج

در این فصل برای تأیید صحت روش مورد مطالعه بر اساس الگوریتم‌های ذکر شده در فصل‌های قبل، تعدادی مسئله آزمون حل شده و نتایج حاصل از کد توسعه داده شده، که ANOMOS نامگذاری شده، با نتایج سایر کدها از قبیل CITATION مقایسه می‌شود.

۱۰-۱- مسئله ۱

تیغه یک‌بعدی به طول L_0 سانتیمتر که در شکل ۱ نشان داده شده است، دربرگیرنده چشمه یکنواخت به قدرت واحد می‌باشد.



شکل ۱: تیغه یک بعدی مسئله ۱

سطح مقطع یک گروهی در جدول زیر آمده است.

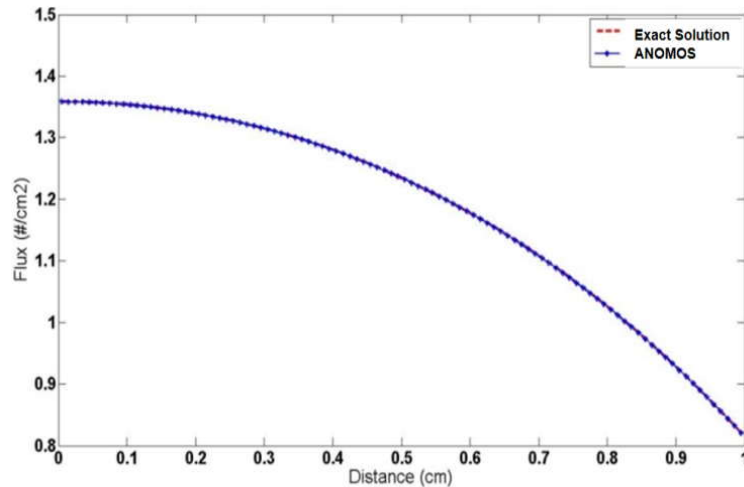
جدول شماره ۱: مشخصات مسئله ۱

مقدار	سطح مقطع
۱/۰	$\Sigma_{\text{tot}} (cm^{-1})$
۰/۵	$\Sigma_a (cm^{-1})$
۰/۵	$\Sigma_s (cm^{-1})$

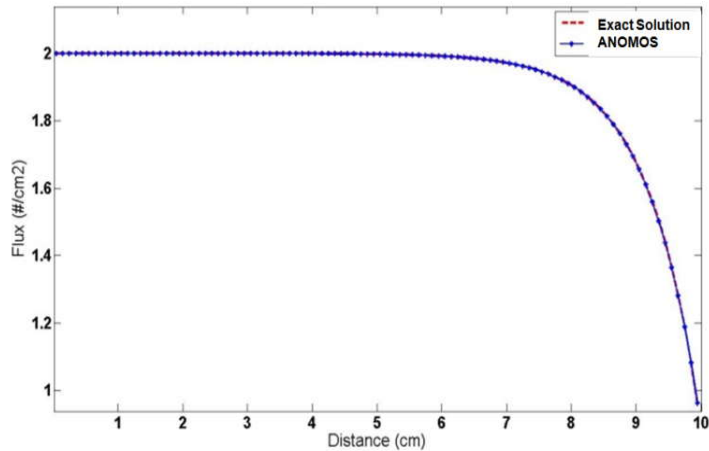
تابع شار نوترونی برای این مسئله به راحتی قابل محاسبه است و بصورت رابطه (۱-۱۰) در می آید:

$$\varphi(x) = \frac{S}{\Sigma_a} \left(1 - \frac{\text{Cosh}\left(\frac{x}{L}\right)}{\text{Cosh}\left(\frac{L_0}{L}\right) + 2\frac{D}{L}\text{Sinh}\left(\frac{L_0}{L}\right)} \right) \quad (1-10)$$

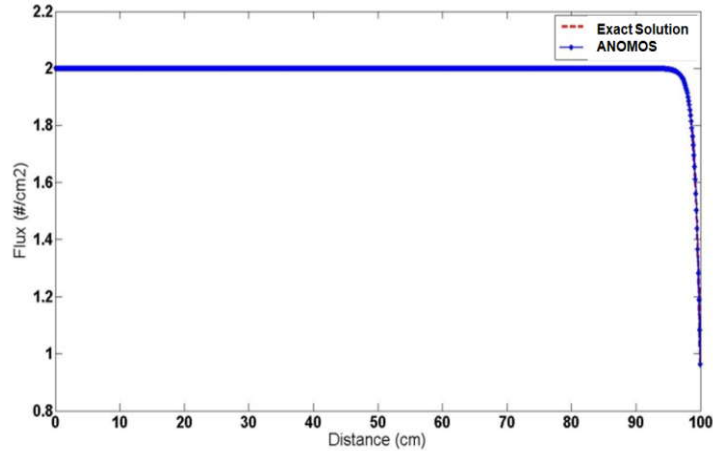
در ادامه، توزیع شار نوترونی حاصل از کد ANOMOS و حل دقیق، رابطه (۸-۱)، در طول مش های مختلف برای تیغه های با طول ۱، ۱۰ و ۱۰۰ سانتیمتری نمایش داده می شوند.



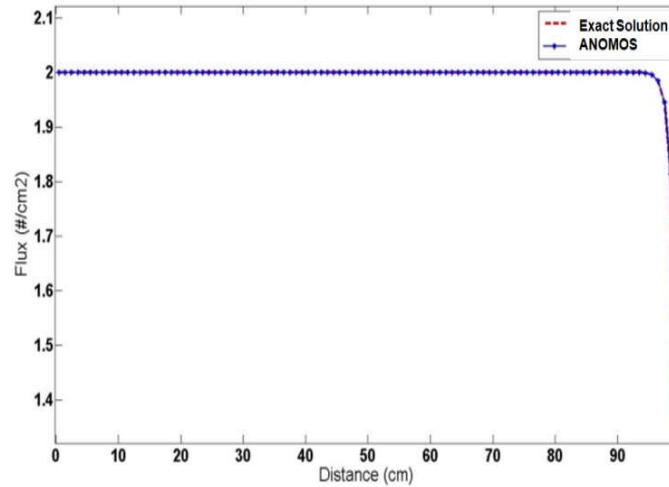
شکل ۲: مقایسه شار نوترونی حاصل از ANOMOS و حل دقیق برای تیغه ۱ سانتیمتری (طول مش ۰/۰۱ سانتیمتر)



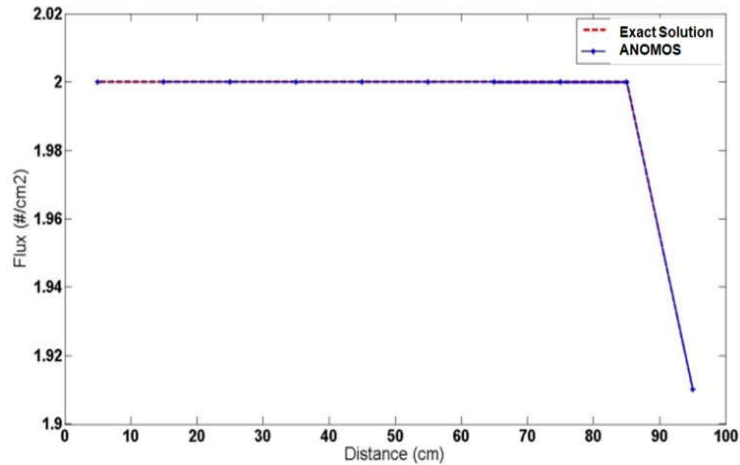
شکل ۳: مقایسه شار نوترونی حاصل از ANOMOS و حل دقیق برای تیغه ۱۰ سانتیمتری (طول مش ۰/۱ سانتیمتر)



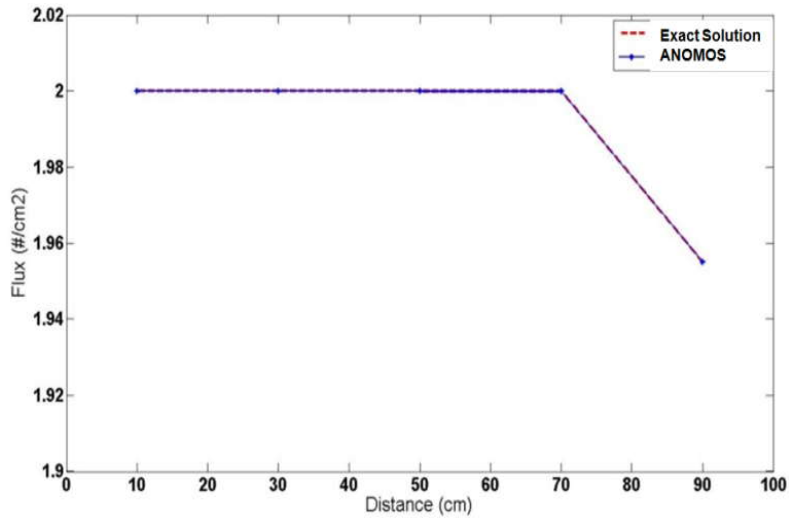
شکل ۴: مقایسه شار نوترونی حاصل از ANOMOS و حل دقیق برای تیغه ۱۰۰ سانتیمتری (طول مش ۰/۱ سانتیمتر)



شکل ۵: مقایسه شار نوترونی حاصل از ANOMOS و حل دقیق برای تیغه ۱۰۰ سانتیمتری (طول مش ۱ سانتیمتر)

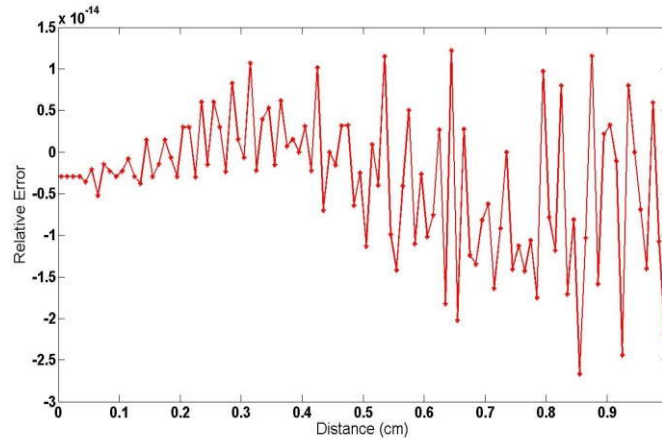


شکل ۶: مقایسه شار نوترونی حاصل از ANOMOS و حل دقیق برای تیغه ۱۰۰ سانتیمتری (طول مش ۱۰ سانتیمتر)

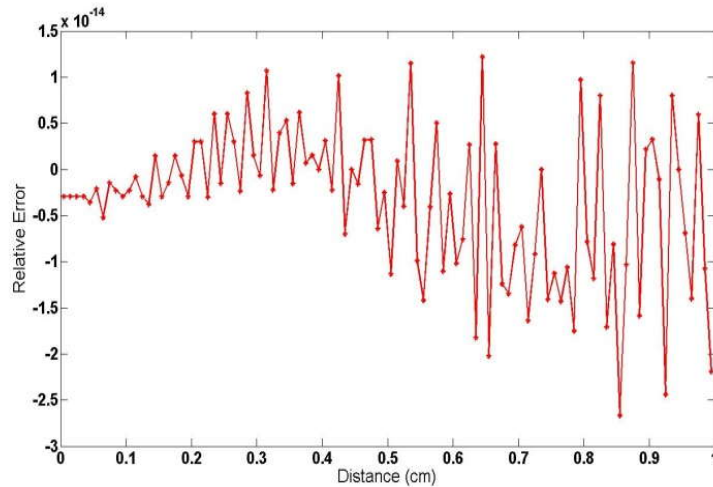


شکل ۷: مقایسه شار نوترونی حاصل از ANOMOS و حل دقیق برای تیغه ۱۰۰ سانتیمتری (طول مش ۲۰ سانتیمتر)

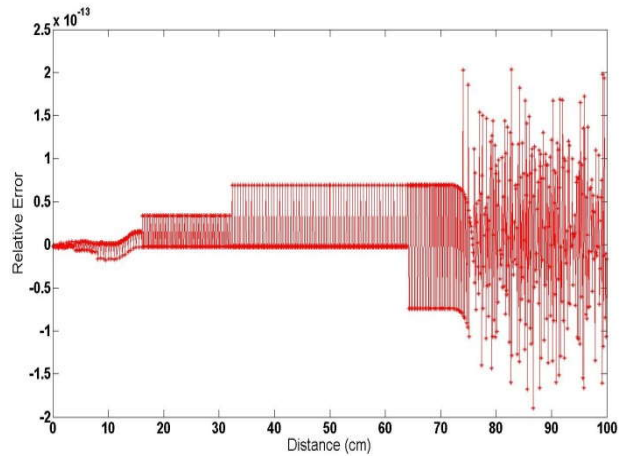
در شکل‌های ۸ تا ۱۲، خطای نسبی در مقایسه نتایج حاصل از کد ANOMOS و حل دقیق نمایش داده شده است.



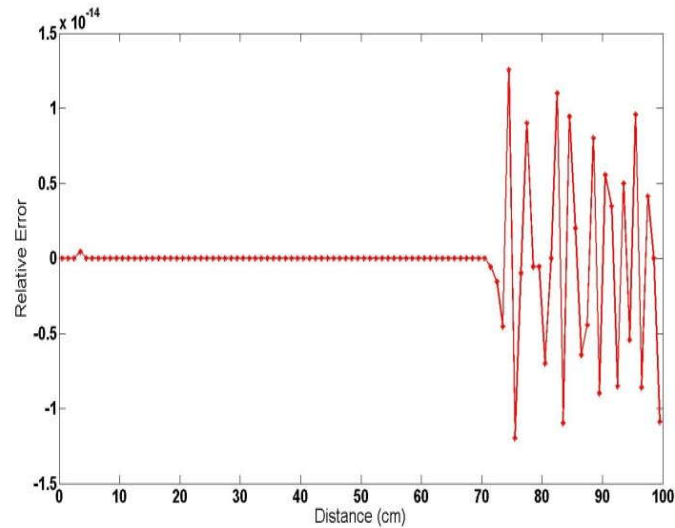
شکل ۸: خطای نسبی برای تیغه ۱ سانتیمتری (طول مش ۰/۰۱ سانتیمتر)



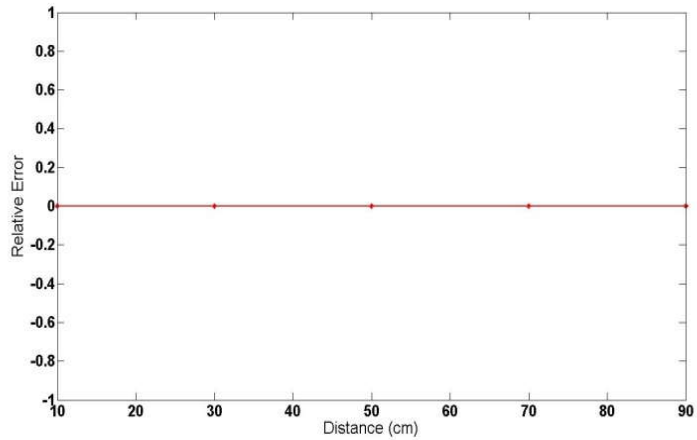
شکل ۹: خطای نسبی برای تیغه ۱۰ سانتیمتری (طول مش ۰/۱ سانتیمتر)



شکل ۱۰: خطای نسبی برای تیغه ۱۰۰ سانتیمتری (طول مش ۰/۱ سانتیمتر)



شکل ۱۱: خطای نسبی برای تیغه ۱۰۰ سانتیمتری (طول مش ۱ سانتیمتر)

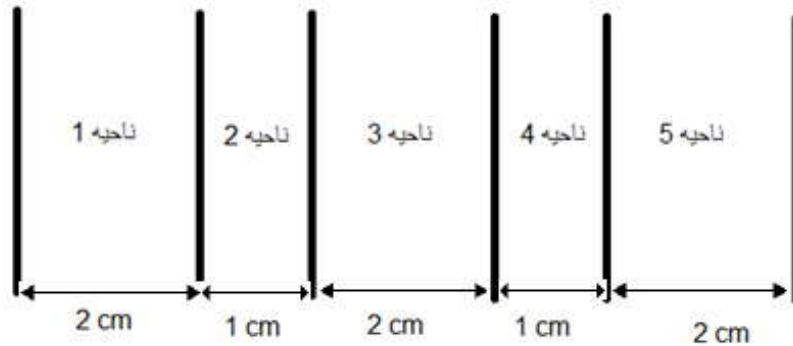


شکل ۱۲: خطای نسبی برای تیغه ۱۰۰ سانتیمتری (طول مش ۲۰ سانتیمتر)

از نمودارهای فوق می‌توان به این نتیجه رسید که روش مورد بررسی در این پژوهش، در یک بعد، با حل دقیق هیچ اختلافی ندارد و نتایج آن مستقل از طول مش می‌باشد. عملاً با توجه به اینکه هیچ اختلافی بین نتایج کد ANOMOS و حل دقیق مسئله وجود ندارد، خطای مشاهده شده در نمودارهای فوق از نوع "خطای گرد کردن" می‌باشد.

۱۰-۲- مسئله ۲

تیغه یک‌بعدی به طول ۸ سانتیمتر متشکل از نواحی مختلف را در نظر بگیرید. این مسئله به نام تست خلأ معروف است که اولین بار توسط ریدز ارائه شده است (شکل ۱۳). شرط مرزی سمت راست خلأ و سمت چپ بازتابنده کامل می‌باشد.



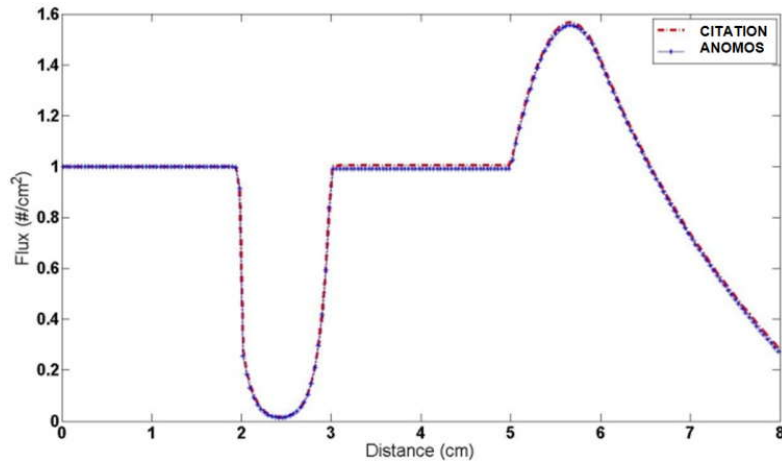
شکل ۱۳: نواحی مختلف در تیغه مسئله ۲ (تست خلأ)

مشخصات هر یک از نواحی تست خلأ در جدول ۲ آمده است.

جدول شماره ۲: مشخصات مسئله ۲

ماده ۵	ماده ۴	ماده ۳	ماده ۲	ماده ۱	پارامتر
۱/۰	۱/۰	۰/۰	۵/۰	۵۰/۰	$\Sigma_{\text{tot}} (cm^{-1})$
۰/۱	۰/۱	۰/۰	۵/۰	۵۰/۰	$\Sigma_a (cm^{-1})$
۲/۰	۱/۰	۲/۰	۱/۰	۲/۰	L(cm)
۰/۰	۱/۰	۰/۰	۰/۰	۵۰/۰	S(#cm ⁻²)

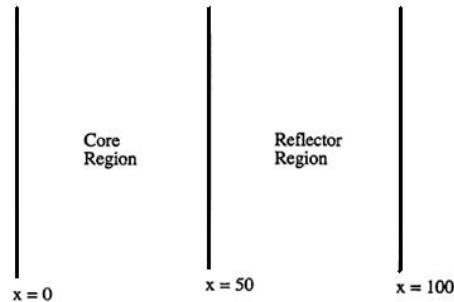
در شکل ۱۴، شار نوترونی محاسبه شده با کد ANOMOS با نتایج حاصل از کد CITATION مقایسه شده است.



شکل ۱۴: شار نوترونی (طول مش ۰/۰۱ سانتیمتر)

۱۰-۳- مسئله ۳

مطابق شکل ۱۵، راکتور تیغه‌ای به طول ۱۰۰ سانتیمتر از دو ناحیه قلب و بازتابنده تشکیل شده است.



شکل ۱۵: قلب راکتور مسئله ۳

شرایط مرزی سمت راست خلأ و سمت چپ بازتابنده کامل می‌باشد. سطح مقطع‌های دوگروهی در جدول ۳ آمده است.

جدول شماره ۳: مشخصات قلب راکتور و بازتابنده مسئله ۳

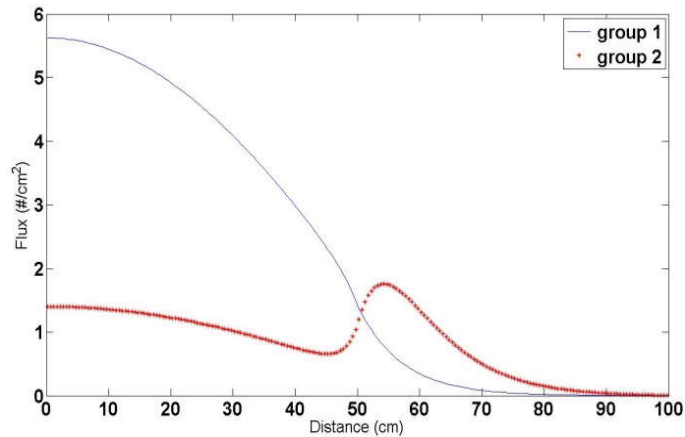
بازتابنده	قلب	پارامتر
۲/۰	۱/۵	$D_1 (cm)$
۰/۳	۰/۴	$D_2 (cm)$
۰/۰۰	۰/۰۱	$\Sigma_{a,1} (cm^{-1})$
۰/۰۱	۰/۰۸	$\Sigma_{a,2} (cm^{-1})$
۰/۰۰	۰/۰۰	$\nu \Sigma_{f,1} (cm^{-1})$
۰/۰۰	۰/۱۳۵	$\nu \Sigma_{f,2} (cm^{-1})$
۰/۰۴	۰/۰۲	$\Sigma_{s,1 \rightarrow 2} (cm^{-1})$
۰/۰۰	۰/۰۰	$\Sigma_{s,2 \rightarrow 1} (cm^{-1})$

در جدول ۴، ضریب تکثیر مؤثر برای طول مش‌های مختلف که از طریق حل مستقیم و الحاقی معادله پخش با استفاده از کد ANOMOS بدست آمده‌اند، آورده شده و میزان اختلاف آنها با مقدار مرجع، که برابر $۱/۰۸۷۰$ است، ارائه شده است.

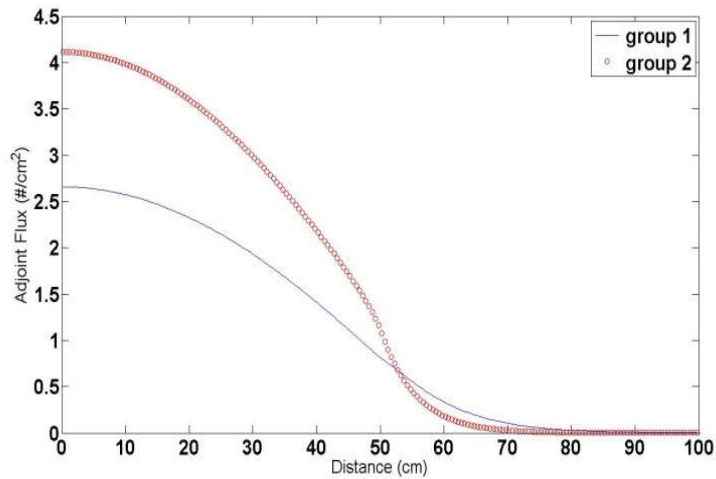
جدول شماره ۴: محاسبه ضریب تکثیر مؤثر نوترونی در طول مش‌های مختلف

err. (pcm)	مرجع	روش الحاقی	روش مستقیم	طول مش (cm)	تعداد مش
-۳۰	۱/۰۸۷۰	۱/۰۸۶۷	۱/۰۸۶۷	۰/۱	۱۰۰۰
-۳۰		۱/۰۸۶۷	۱/۰۸۶۷	۱	۱۰۰
-۳۰		۱/۰۸۶۷	۱/۰۸۶۷	۵	۲۰
-۳۰		۱/۰۸۶۷	۱/۰۸۶۷	۱۰	۱۰
-۳۰		۱/۰۸۶۷	۱/۰۸۶۷	۲۵	۴

در شکل‌های ۱۶ و ۱۷، به ترتیب، توزیع شار نوترونی و الحاقی آن نمایش داده شده است.



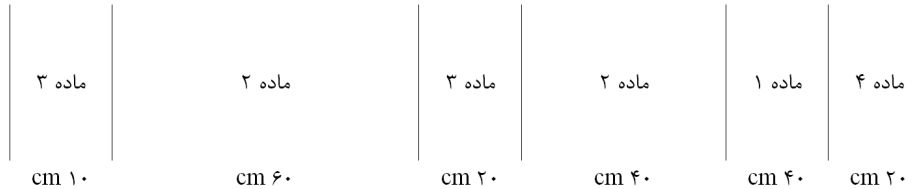
شکل ۱۶: توزیع شار نوترونی در دو گروه انرژی



شکل ۱۷: توزیع شار الحاقی در دو گروه انرژی

۱۰-۴- مسئله ۴

تیغه یک بعدی نشان داده شده در شکل ۱۸، دارای ضخامت ۱۷۰ سانتیمتر می باشد.



شکل ۱۸: قلب راکتور مسئله ۴

سطح مقطع های دو گروهی مربوطه در جدول ۵ آمده است.

جدول شماره ۵: مشخصات قلب راکتور و بازتابنده مسئله ۴

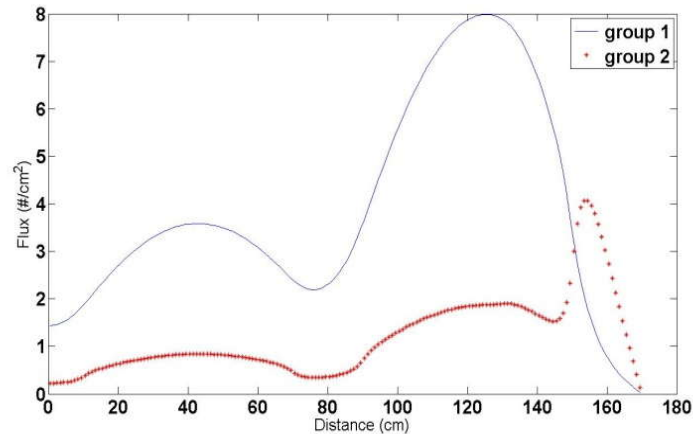
پارامتر	ماده ۱	ماده ۲	ماده ۳	ماده ۴
$D_1 (cm)$	۱/۵	۱/۵	۱/۵	۲/۰
$D_2 (cm)$	۰/۴	۰/۴	۰/۴	۰/۳
$\Sigma_{a,1} (cm^{-1})$	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۰۰
$\Sigma_{a,2} (cm^{-1})$	۰/۰۸	۰/۰۸۵	۰/۱۳	۰/۰۱
$\nu \Sigma_{f,1} (cm^{-1})$	۰/۰۰	۰/۰۰	۱/۰۰	۰/۰۰
$\nu \Sigma_{f,2} (cm^{-1})$	۰/۱۳۵	۰/۱۳۵	۰/۱۳۵	۰/۰۰
$\Sigma_{s,1 \rightarrow 2} (cm^{-1})$	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۴
$\Sigma_{s,2 \rightarrow 1} (cm^{-1})$	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰

در جدول ۶، مقدار ضریب تکثیر مؤثر برای تعداد مش‌های مختلف محاسبه شده از طریق حل مستقیم و الحاقی معادله پخش با استفاده از کد ANOMOS، ارائه شده است:

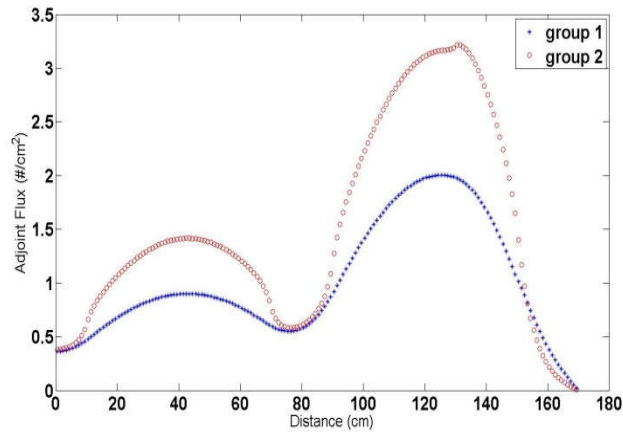
جدول شماره ۶: محاسبه ضریب تکثیر مؤثر نوترونی در طول مش‌های مختلف

err. (pcm)	مرجع	روش الحاقی	روش مستقیم	طول مش (cm)	تعداد مش
۰	۱/۰۰۴۵۱۳	۱/۰۰۴۵۱۳	۱/۰۰۴۵۱۳	۱	۱۷۰
۰		۱/۰۰۴۵۱۳	۱/۰۰۴۵۱۳	۵	۸۵
۰		۱/۰۰۴۵۱۳	۱/۰۰۴۵۱۳	۱۰	۱۷
۰		۱/۰۰۴۵۱۳	۱/۰۰۴۵۱۳	۲۰	۹

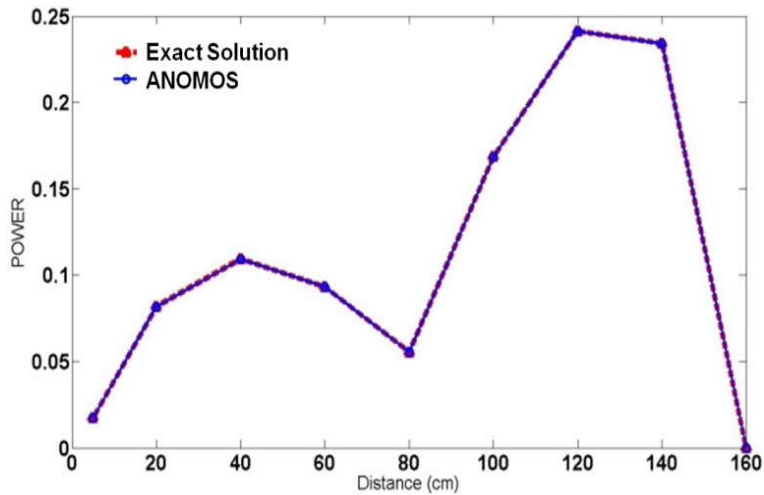
در ادامه، توزیع مکانی شار، شار الحاقی نوترون و همچنین قدرت تولید شده نمایش داده می‌شود.



شکل ۱۹: توزیع شار نوترونی در دو گروه انرژی



شکل ۲۰: توزیع شار الحاقی در دو گروه انرژی



شکل ۲۱: مقایسه توزیع قدرت بدست آمده از کد ANOMOS و مرجع

۱۱- نتیجه گیری

در این پروژه، مراحل انجام محاسبات لازم برای بدست آوردن شار نوترونی برای مسائل یک بعدی با استفاده از روش نودال تحلیلی در هندسه چهارگوش ارائه شده است. برای راستی آزمایی نتایج حاصل از کد توسعه داده شده (ANOMOS)، از مقایسه با نتایج تحلیلی و یا نتایج حاصل از کدهایی از قبیل CITATION استفاده شده است. در نتیجه این مقایسه‌ها، صحت نتایج و اعتبار روش نودال تحلیلی در حل معادله پخش نوترون مورد تأیید قرار گرفته و تحقیقاً، می توان بیان داشت که این روش در یک بعد به پاسخ دقیق، صرف نظر از طول مش، خواهد رسید.

۱۲- مراجع

1. Smith, K.S. "An Analytic Nodal Method for Solving the Two Group Multidimensional Static and Transient Neutron Diffusion Equations", PhD Thesis, MIT, 1976.
2. Chao, Y.A. "A Theoretical Analysis of the Coarse Mesh Finite Difference Representation in Advanced Nodal Methods", Mathematics and Computation, Reactor Physics and Environmental Analysis, in Nuclear Applications, vol. 1, pp. 117, 1999.
3. Chao, Y.A. "Coarse Mesh Finite Difference Methods and Applications", Advances in Reactor Physics and Mathematics and Computation into the Next Millennium, PHYSOR-2000, vol. 1, Pittsburgh, pp. 9404, 1999.
4. Aragonés, J.M., Ahnert, C., Herranz, N.G. "The Analytic Coarse Mesh Finite Difference Method for Multi group and Multidimensional Diffusion Calculations," Nuclear Science and Engineering, Vol. 157, pp. 1, 2007.
5. Lozano, J.A., Herranz, N.G., Ahnert, C., Aragonés, J.M. "The Analytic Nodal Diffusion Solver in Multi Groups for 3D Rectangular Geometry," Annals of Nuclear Energy, Vol. 35, pp. 2365, 2008.