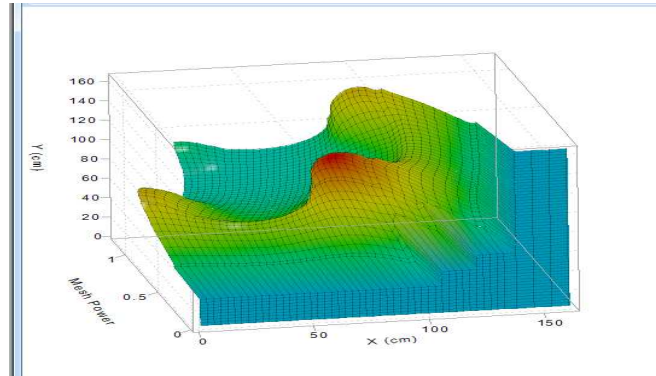


حل معادله پخش نوترون برای مسائل چشمه ثابت و بحرانیت با استفاده از روش نودال تحلیلی در هندسه چهار گوش سه بعدی



گزارش فنی ANOMOS-3D

بسته سیزدهم - ویرایش ۰ - خرداد ۱۳۹۳

ANC-TEC-DES-NA-200

فهرست مطالب

- ۱- چکیده ۹
- ۲- کلیدواژه ۹
- ۳- اختصارات ۱۰
- ۴- مقدمه ۱۱
- ۵- دامنه گزارش ۱۱
- ۶- آشنایی با معادله پخش نوترون ۱۲

۷- حل معادله پخش نوترون به روش نودال تحلیلی برای مسائل چشمه ثابت ۱۶

۸- حل معادله پخش نوترون به روش نودال تحلیلی برای مسائل بحرانیت ۴۱

۹- حل معادله الحاقی پخش نوترون ۶۳

۱۰- راستی‌آزمایی نتایج ۶۸

۱۱- نتیجه‌گیری ۱۱۱

۱۲- مراجع ۱۱۲

لیست شکل‌ها

- شکل ۱: قلب راکتور مسئله ۳..... ۷۷
- شکل ۲: توزیع قدرت شعاعی (طول مش ۲۳ سانتیمتر)..... ۸۰
- شکل ۳: توزیع درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت شعاعی (طول مش ۲۳ سانتیمتر)..... ۸۱
- شکل ۴: قلب راکتور مسئله ۴..... ۸۳
- شکل ۵: توزیع قدرت شعاعی (طول مش ۲۰ سانتیمتر)..... ۸۵
- شکل ۶: توزیع درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت شعاعی (طول مش ۲۰ سانتیمتر)..... ۸۶
- شکل ۷: مقطع افقی از راکتور مسئله ۷..... ۹۷
- شکل ۸: توزیع قدرت شعاعی (طول مش ۲۰ سانتیمتر)..... ۹۹
- شکل ۹: توزیع درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت شعاعی (طول مش ۲۰ سانتیمتر)..... ۱۰۰

شکل ۱۰: مقطع افقی از راکتور مسئله ۸..... ۱۰۲

شکل ۱۱: مقطع عمودی از راکتور مسئله ۸..... ۱۰۳

شکل ۱۲: توزیع قدرت شعاعی در حالت دو بعدی (طول مش ۱۵ سانتیمتر)..... ۱۰۵

شکل ۱۳: توزیع قدرت شعاعی در حالت سه بعدی (طول مش ۱۵ سانتیمتر)..... ۱۰۶

شکل ۱۴: توزیع درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت در حالت دو بعدی (طول مش ۱۵ سانتیمتر).... ۱۰۷

شکل ۱۵: توزیع درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت در حالت سه بعدی (طول مش ۱۵ سانتیمتر).. ۱۰۸

لیست جدول‌ها

- جدول شماره ۱: مشخصات مسئله ۱ ۶۹
- جدول شماره ۲: مقادیر شار در گوشه هندسه مسئله ۱ ۷۰
- جدول شماره ۳: حداکثر درصد خطای نسبی در محاسبه شار مسئله ۱ ۷۱
- جدول شماره ۴: مشخصات مسئله ۲ ۷۲
- جدول شماره ۵: مقادیر شار گروه اول در گوشه هندسه مسئله ۲ ۷۳
- جدول شماره ۶: مقادیر شار گروه دوم در گوشه هندسه مسئله ۲ ۷۴
- جدول شماره ۷: حداکثر درصد خطای نسبی در محاسبه شار گروه اول مسئله ۲ ۷۵
- جدول شماره ۸: حداکثر درصد خطای نسبی در محاسبه شار گروه دوم مسئله ۲ ۷۶
- جدول شماره ۹: مشخصات قلب راکتور و بازتابنده مسئله ۳ ۷۸

- جدول شماره ۱۰: مشخصات قلب راکتور و بازتابنده مسئله ۳..... ۷۹
- جدول شماره ۱۱: مقایسه نتایج کدهای مختلف در محاسبه پارامترهای نوترونی مسئله ۳..... ۸۲
- جدول شماره ۱۲: مشخصات قلب راکتور و بازتابنده مسئله ۴..... ۸۴
- جدول شماره ۱۳: مقایسه نتایج کدهای مختلف در محاسبه پارامترهای نوترونی مسئله ۴..... ۸۷
- جدول شماره ۱۴: مشخصات مسئله ۵..... ۸۸
- جدول شماره ۱۵: مقادیر شار نوترونی در گوشه هندسه مسئله ۵..... ۸۹
- جدول شماره ۱۶: حداکثر درصد خطای نسبی در محاسبه شار نوترونی مسئله ۵..... ۹۰
- جدول شماره ۱۷: مشخصات مسئله ۶..... ۹۱
- جدول شماره ۱۸: مقادیر شار گروه اول در گوشه هندسه مسئله ۶..... ۹۲
- جدول شماره ۱۹: مقادیر شار گروه دوم در گوشه هندسه مسئله ۶..... ۹۳

- جدول شماره ۲۰: حداکثر درصد خطای نسبی در محاسبه شار گروه اول مسئله ۶..... ۹۴
- جدول شماره ۲۱: حداکثر درصد خطای نسبی در محاسبه شار گروه دوم مسئله ۶..... ۹۵
- جدول شماره ۲۲: مشخصات قلب راکتور و بازتابنده مسئله ۷..... ۹۸
- جدول شماره ۲۳: مقایسه نتایج کدهای مختلف در محاسبه پارامترهای نوترونی مسئله ۷..... ۱۰۱
- جدول شماره ۲۴: مشخصات قلب راکتور و بازتابنده مسئله ۸..... ۱۰۴
- جدول شماره ۲۵: مقایسه نتایج کدهای مختلف در محاسبه پارامترهای نوترونی مسئله ۸ در دو بعد..... ۱۰۹
- جدول شماره ۲۶: مقایسه نتایج کدهای مختلف در محاسبه پارامترهای نوترونی مسئله ۸ در سه بعد..... ۱۱۰

۱- چکیده

یکی از روش‌های حل معادله پخش نوترون، روش نودال است که به چندین زیرروش مختلف تقسیم می‌شود. نودال تحلیلی یکی از روش‌های متداول نودال می‌باشد که از دقت بسیار خوبی برخوردار است. این روش در ابتدا توسط اسمیت در سال ۱۹۷۹ ارائه و بعدها توسط افراد دیگر توسعه داده شد. یکی از مشکلات بکارگیری این روش، حجم بسیار زیاد عملیات جبری و روابط ریاضی آن می‌باشد. در این گزارش، نحوه حل معادله پخش نوترون مستقل از زمان در مسائل چشمه ثابت و بحرانیّت در هندسه چهارگوش سه بعدی به روش نودال تحلیلی ارائه خواهد شد.

۲- کلیدواژه

معادله پخش نوترون، نودال تحلیلی، مسئله چشمه ثابت، مسئله بحرانیّت، هندسه چهارگوش سه بعدی.

۳- اختصارات

عبارت	عبارت اختصاری	توضیح
Analytic Nodal Modal Solver	ANOMOS	آنوموس، کد حل کننده معادله پخش به روش نودال تحلیلی
Deviation in multiplication factor calculation (pcm)	err	میزان اختلاف در محاسبه ضریب تکثیر مؤثر بر حسب pcm
Maximum relative percent error in power distribution	ϵ_{\max}	بیشترین درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت
Average relative percent error in power distribution	ϵ_{ave}	میانگین درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت
Multiplication factor	k_{eff}	ضریب تکثیر مؤثر نوترونی
Analytic Nodal Method	ANM	روش نودال تحلیلی
Quadratic Approximation	Quad.	تقریب درجه دو برای فرار عرضی
Flat Approximation	Flat	تقریب تخت برای فرار عرضی

۴- مقدمه

در روش نودال تحلیلی، تابع تحلیلی شار نوترونی در هر نود بدست آمده و سپس از این تابع تحلیلی در محاسبه جریان خالص روی سطوح بین نودها استفاده می‌گردد و نهایتاً، با استفاده از جریان بدست آمده، تصحیح معادلات پخش انجام می‌شود. دو مزیت مهم روش نودال تحلیلی عبارت است از: اولاً، بر معادله تراز نوترون بنا شده است و ثانیاً، برای مش‌های با طول زیاد (در حد ابعاد یک مجتمع سوخت) به پاسخ‌های بسیار خوبی می‌رسد.

۵- دامنه گزارش

در این گزارش، روش نودال تحلیلی برای حل معادله پخش نوترون دو گروهی در مسائل چشمه ثابت و بحرانیت، بررسی می‌شود. هندسه موردنظر در این گزارش به صورت چهارگوش می‌باشد. در نهایت، با حل چندین مسئله آزمون، صحت روش مزبور تأیید می‌گردد.

۶- آشنایی با معادله پخش نوترون

در اکثر وضعیت‌های موردنظر در آنالیز راکتورهای آب سبک، کافی است که رفتار نوترونی راکتور به وسیله روش‌های تقریبی مدل‌سازی شود. مرسوم‌ترین تقریب مورد استفاده، همان نظریه پخش نوترون چند گروهی می‌باشد [۱]. بدین منظور، مجموعه معادلات دیفرانسیل جزئی جفت شده فضا و زمان به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot D_g(\vec{r}, t) \nabla \phi_g(\vec{r}, t) - \Sigma_{t,g}(\vec{r}, t) \phi_g(\vec{r}, t) + \sum_{g'=1}^G [\Sigma_{g' \rightarrow g}(\vec{r}, t) + (\vec{r}, t) \chi_{g,p} \nu \Sigma_{f,g'}(\vec{r}, t)] \phi_{g'}(\vec{r}, t) \\ + \sum_{d=1}^D \chi_{g,d} \lambda_d C_d(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_g(\vec{r}, t); \quad g = 1, 2, \dots, G \end{aligned} \quad (1-6)$$

$$\beta_d \sum_{g=1}^G \nu \Sigma_{f,g}(\vec{r}, t) \phi_g(\vec{r}, t) - \lambda_d C_d(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} C_d(\vec{r}, t); \quad d = 1, 2, \dots, D$$

که در آن

$G \equiv$ تعداد گروه‌های انرژی

$D \equiv$ تعداد گروه نپاهسته‌های تولید کننده نوترون تأخیری

$\phi_g \equiv$ شار عددی نوترون در گروه g ام

$C_d \equiv$ چگالی نپاهسته‌های تولید کننده نوترون تأخیری در گروه d ام

$D_g \equiv$ ضریب پخش در گروه g ام

$\Sigma_{t,g} \equiv$ سطح مقطع ماکروسکوپی کل در گروه g ام

$$\Sigma_{f,g} \equiv \text{سطح مقطع ماکروسکوپی شکافت در گروه } g \text{ ام}$$

$$\Sigma_{g' \rightarrow g} \equiv \text{سطح مقطع ماکروسکوپی پراکندگی از گروه } g' \text{ به گروه } g$$

$$\chi_{g,p} \equiv \text{طیف شکافت نوترون‌های آنی در گروه } g \text{ ام}$$

$$\chi_{g,d} \equiv \text{طیف شکافت نوترون‌های تأخیری در گروه } g \text{ ام}$$

$$\nu \equiv \text{تعداد متوسط نوترون‌های تولید شده در هر شکافت}$$

$$\beta \equiv \text{کل کسر نوترون‌های تأخیری } \left(\beta = \sum_{d=1}^D \beta_d \right)$$

$$\lambda_d \equiv \text{ثابت واپاشی نیا هسته‌های تولید کننده نوترون تأخیری در گروه } d \text{ ام}$$

اگر خصوصیات مواد در مکان و زمان، توزیع اولیه شار نوترون در مکان و انرژی، و شرایط مرزی مناسب مشخص باشند، یک پاسخ یکتا برای معادله (۶-۱) وجود خواهد داشت. با توجه به پیچیدگی هندسی راکتورهای آب سبک کنونی، امکان تعریف کل هندسه غیرهمگن به صورت یکجا، عملاً، امکان پذیر نمی باشد. نگرشی که برای حل این مشکل در نظر گرفته می شود این است که هندسه موردنظر به صورت مجموعه ای از نواحی همگن بزرگ تر نسبت به قبل تعریف شود. البته، جزئیات فضایی هر یک از نواحی همگن شده به کمک محاسبات جداگانه مورد بررسی قرار می گیرد، تا پارامترهای "معادل پخش همگن" که در هر یک از نواحی موردنظر ثابت می باشند، محاسبه شوند. به طور معمول، این همگن سازی برای نواحی شامل یک یا چند مجتمع سوخت انجام می شود. بنابراین، محاسبه توزیع قدرت فضایی در کل قلب (با هندسه واقعی و تمام جزئیات) به یک سری نواحی همگن شده کاهش می یابد [۱].

۷- حل معادله پخش نوترون به روش نودال تحلیلی برای مسائل چشمه ثابت

بخش اول از این فصل به نحوه گسسته‌سازی مکانی معادله پخش نوترون در دو گروه انرژی به روش نودال تحلیلی اختصاص دارد و در بخش دوم، نحوه اجرای فرایند حل ارائه می‌گردد.

۷-۱- گسسته سازی مکانی معادله پخش نوترون

معادله پخش نوترون وابسته به زمان چند گروهی به صورت معادله (۶-۱) نوشته می‌شود. اگر جمله زمانی آن حذف شود، معادله پخش نوترون چند گروهی در حالت پایا و برای مسائل چشمه ثابت به صورت معادله (۷-۱)، حاصل می‌شود.

$$-\nabla \cdot \vec{J}_g(\vec{r}) - \Sigma_{t,g}(\vec{r})\phi_g(\vec{r}) + \sum_{g'=1}^G [\Sigma_{g' \rightarrow g}(\vec{r})]\phi_{g'}(\vec{r}) + S_g(\vec{r}) = 0 \quad (1-7)$$

$$g = 1, \dots, G$$

با فرض دو گروه انرژی، معادله مستقل از زمان پخش نوترون به صورت معادله (۲-۷) در می آید:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \vec{J}_1(\vec{r}) - \Sigma_{r,1}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) + \Sigma_{2 \rightarrow 1}(\vec{r})\phi_2(\vec{r}) + S_1(\vec{r}) = 0 \\ -\nabla \cdot \vec{J}_2(\vec{r}) - \Sigma_{r,2}(\vec{r})\phi_2(\vec{r}) + \Sigma_{1 \rightarrow 2}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) + S_2(\vec{r}) = 0 \end{cases} \quad (2-7)$$

برای گسسته‌سازی معادله (۲-۷) در یک هندسه معین، ابتدا باید هندسه موردنظر به نواحی مشخصی تقسیم‌بندی شود.

به هر یک از این نواحی مشخص شده "نود" گفته می‌شود.

با انتگرالگیری از معادله (۲-۷) بر روی حجم کنترل (بر روی حجم نود m_x, m_y, m_z ام)، معادله تراز نوترون به صورت رابطه (۳-۷) بدست می آید.

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{h_x^{m_x, m_y, m_z}} [J_{x,1}^{m_x +, m_y, m_z} - J_{x,1}^{m_x -, m_y, m_z}] + \frac{1}{h_y^{m_x, m_y, m_z}} [J_{y,1}^{m_x, m_y +, m_z} - J_{y,1}^{m_x, m_y -, m_z}] + \\ & \frac{1}{h_z^{m_x, m_y, m_z}} [J_{z,1}^{m_x, m_y, m_z +} - J_{z,1}^{m_x, m_y, m_z -}] + \sum_{r,1}^{m_x, m_y, m_z} \varphi_1^{m_x, m_y, m_z} - \sum_{s,21}^{m_x, m_y, m_z} \varphi_2^{m_x, m_y, m_z} = S_1^{m_x, m_y, m_z} \end{aligned} \right. \quad (۳-۷)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{h_x^{m_x, m_y, m_z}} [J_{x,2}^{m_x +, m_y, m_z} - J_{x,2}^{m_x -, m_y, m_z}] + \frac{1}{h_y^{m_x, m_y, m_z}} [J_{y,2}^{m_x, m_y +, m_z} - J_{y,2}^{m_x, m_y -, m_z}] + \\ & \frac{1}{h_z^{m_x, m_y, m_z}} [J_{z,2}^{m_x, m_y, m_z +} - J_{z,2}^{m_x, m_y, m_z -}] + \sum_{r,2}^{m_x, m_y, m_z} \varphi_2^{m_x, m_y, m_z} - \sum_{s,12}^{m_x, m_y, m_z} \varphi_1^{m_x, m_y, m_z} = S_2^{m_x, m_y, m_z} \end{aligned} \right.$$

در روابط فوق از تعاریف (۴-۷) تا (۶-۷) استفاده شده است.

$$\iiint_{h_x^m h_y^m h_z^m} \Sigma_{r,g}(x, y, z) \phi_g(x, y, z) dx dy dz = h_x^m h_y^m h_z^m \Sigma_r^m \phi_g^m \quad (۴-۷)$$

$$\iiint_{h_x^m h_y^m h_z^m} S_g(x, y, z) dx dy dz = h_x^m h_y^m h_z^m S_g^m \quad (۵-۷)$$

$$\iiint_{h_x^m h_y^m h_z^m} \nabla \cdot \vec{J}_g(x, y, z) dx dy dz = h_y^m h_z^m (J_{x,g}^{m,+} - J_{x,g}^{m,-}) + h_z^m h_x^m (J_{y,g}^{m,+} - J_{y,g}^{m,-}) + h_x^m h_y^m (J_{z,g}^{m,+} - J_{z,g}^{m,-}) \quad (۶-۷)$$

با استخراج رابطه‌ای بین جریان متوسط روی سطوح و شار متوسط هر نود، معادله (۷-۳) حل خواهد شد. نحوه محاسبه این ارتباط در ادامه بیان می‌شود.

۷-۱-۱- رابطه شار و جریان

معادله دیفرانسیل پخش نوترون در دو گروه انرژی برای یک نود همگن به صورت (۷-۷) نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} -D_1 \frac{\partial^2 \varphi_1(x, y, z)}{\partial x^2} - D_1 \frac{\partial^2 \varphi_1(x, y, z)}{\partial y^2} - D_1 \frac{\partial^2 \varphi_1(x, y, z)}{\partial z^2} + \Sigma_{r,1} \varphi_1(x, y, z) - \Sigma_{s,21} \varphi_2(x, y, z) = S_1 \\ -D_2 \frac{\partial^2 \varphi_2(x, y, z)}{\partial x^2} - D_2 \frac{\partial^2 \varphi_2(x, y, z)}{\partial y^2} - D_2 \frac{\partial^2 \varphi_2(x, y, z)}{\partial z^2} + \Sigma_{r,2} \varphi_2(x, y, z) - \Sigma_{s,12} \varphi_1(x, y, z) = S_2 \end{cases} \quad (7-7)$$

به منظور استفاده از تقریب فرار عرضی، از معادله (7-7) یک بار در راستاهای y و z ، یک بار در راستاهای x و z و یک بار هم در راستاهای x و y انتگرالگیری می‌شود [2 و 3]، در نهایت، معادلات (7-8)، به طور مجزا در هر راستا، بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} -D \frac{d^2 \varphi_{u,1}(u)}{du^2} + \Sigma_{r,1} \varphi_{u,1}(u) + \frac{1}{h_{v,1}^{m_u, m_v, m_w}} [J_{v,1}^{m_u, m_v, m_w} (u) - J_{v,1}^{m_u, m_v, -m_w} (u)] + \frac{1}{h_{w,1}^{m_u, m_v, m_w}} [J_{w,1}^{m_u, m_v, m_w} (u) - J_{w,1}^{m_u, m_v, m_w} (u)] \\ - \Sigma_{s,21} \varphi_{u,2}(u) = S_1 \\ -D \frac{d^2 \varphi_{u,2}(u)}{du^2} + \Sigma_{r,2} \varphi_{u,2}(u) + \frac{1}{h_{v,2}^{m_u, m_v, m_w}} [J_{v,2}^{m_u, m_v, m_w} (u) - J_{v,2}^{m_u, m_v, -m_w} (u)] + \frac{1}{h_{w,2}^{m_u, m_v, m_w}} [J_{w,2}^{m_u, m_v, m_w} (u) - J_{w,2}^{m_u, m_v, m_w} (u)] \\ - \Sigma_{s,12} \varphi_{u,1}(u) = S_2 \end{cases} \quad (8-7)$$

$$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$$

با تعریف فرار عرضی به صورت رابطه (۹-۷)،

$$L_{u,g}^{m_u, m_v, m_w}(v) = \frac{1}{h_u^{m_u, m_v, m_w}} \left[J_{u,g}^{m_u+, m_v, m_w}(v) - J_{u,g}^{m_u-, m_v, m_w}(v) \right] \quad (9-7)$$

$$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$$

معادلات (۱۰-۷) حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} -D_1 \frac{d^2 \varphi_{u,1}(u)}{dx^2} + \Sigma_{r,1} \varphi_{u,1}(u) - \Sigma_{s,2,1} \varphi_{u,2}(u) = S_1 - [L_{v,1}(u) + L_{w,1}(u)] \\ -D_2 \frac{d^2 \varphi_{u,2}(u)}{du^2} + \Sigma_{r,2} \varphi_{u,2}(u) - \Sigma_{s,1,2} \varphi_{u,1}(u) = S_2 - [L_{v,2}(u) + L_{w,2}(u)] \end{cases} \quad (10-7)$$

$$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$$

در ادامه، معادلات فوق برای هر یک از راستاهای x ، y و z ، به طور جداگانه حل می‌شوند. شکل ماتریسی معادلات (۷-۱) - (۱۰) به صورت (۷-۱۱) می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 \varphi_{u,1}(u)}{du^2} \\ \frac{d^2 \varphi_{u,2}(u)}{du^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} & -\frac{\Sigma_{s,2 \rightarrow 1}}{D_1} \\ -\frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2} & \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{u,1}(u) \\ \varphi_{u,2}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{S_1 - L_{v,1}(u) - L_{w,1}(u)}{D_1} \\ -\frac{S_2 - L_{v,2}(u) - L_{w,2}(u)}{D_2} \end{bmatrix} \quad (7-11)$$

$u, v, w = x, y, z; u \neq v \neq w$

با استفاده از تعاریف (۷-۱۲) تا (۷-۱۴)،

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} & -\frac{\Sigma_{s,2 \rightarrow 1}}{D_1} \\ -\frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2} & \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} \end{bmatrix} \quad (7-12)$$

$$\begin{cases} D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \\ |S\rangle = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (13-7)$$

$$|\varphi_u(u)\rangle = \begin{bmatrix} \varphi_{u,1}(u) \\ \varphi_{u,2}(u) \end{bmatrix}; \quad |L_v(u)\rangle = \begin{bmatrix} L_{v,1}(x) \\ L_{v,2}(x) \end{bmatrix}; \quad |L_w(u)\rangle = \begin{bmatrix} L_{w,1}(u) \\ L_{w,2}(u) \end{bmatrix} \quad (14-7)$$

$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$

معادله (15-7) بدست می آید:

$$\frac{d^2}{du^2} |\varphi_u(u)\rangle - A |\varphi_u(u)\rangle = -D^{-1} (|S\rangle - |L_v(u)\rangle - |L_w(u)\rangle) \quad (15-7)$$

$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$

از آنجایی که معادلات فوق به هم جفت شده‌اند. می‌توان از یک سری عملیات مجاز و مناسب استفاده کرد و این دو معادله را از هم جدا کرد. به این روش جداسازی، "دی‌کوپلینگ" و به معادلات حاصله، "مودال" گفته می‌شود [۵ و ۴].

ابتدا باید مقدارویژه‌ها و بردارویژه‌های ماتریس A تعیین شوند. از آنجایی که ماتریس مزبور از مرتبه دو است، لذا مقدارویژه و بردارویژه‌های آن به صورت تحلیلی قابل محاسبه خواهد بود:

اکنون به کمک روابط (۷-۱۶)،

$$A|u_M\rangle = \lambda_M|u_M\rangle \Rightarrow \begin{cases} R^{-1} = [u_M] \\ [\lambda_M]_{\text{diag}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (۷-۱۶)$$

و روابط (۷-۱۷)،

$$\begin{cases} |\varphi_u(u)\rangle = R^{-1}|\psi_u(u)\rangle \\ (|S\rangle - |L_v(u)\rangle - |L_w(u)\rangle) = DR^{-1}|S\rangle \end{cases} \quad (17-7)$$

$u, v, w = x, y, z; u \neq v \neq w$

معادله مودال (18-7) بدست خواهد آمد:

$$\frac{d^2}{du^2}|\psi_u(u)\rangle - \lambda_M|\psi_u(u)\rangle = -|S\rangle \quad (18-7)$$

$u = x, y, z$

پاسخ معادله فوق به صورت (19-7) نوشته خواهد شد:

$$\begin{cases} \psi_{u,M}(u) = A_{u,M} \text{Exp}(\alpha_M u) + B_{u,M} \text{Exp}(-\alpha_M u) + P_{u,M}(u) \\ \alpha_M = \sqrt{\lambda_M}; M = 1,2; u = x, y, z \end{cases} \quad (19-7)$$

با توجه به مقادیر شار و جریان مودال روی مرزهای نود و همچنین شار میانگین مودال، ضرایب مجهول A و B محاسبه می‌شوند و نهایتاً، به صورت (۲۰-۷) نوشته خواهند شد:

$$\psi_{u,M} \left(\mp \frac{h_u}{2} \right) - P_{u,M} \left(\mp \frac{h_u}{2} \right) = C_{u,M}^f [\bar{\psi}_{u,M} - \bar{P}_{u,M}] \pm C_{u,M}^j \frac{h_u}{2} \left[J_{u,M} \left(\mp \frac{h_u}{2} \right) - P'_{u,M} \left(\mp \frac{h_u}{2} \right) \right]$$

$$\begin{cases} C_{u,M}^f = \frac{2\alpha_M h_u}{\text{Exp}(\alpha_M h_u) - \text{Exp}(-\alpha_M h_u)} = \frac{\alpha_M h_u}{\text{Sinh}(\alpha_M h_u)} \\ C_{u,M}^j = \frac{\text{Exp}(\alpha_M h_u) + \text{Exp}(-\alpha_M h_u) - 2}{\text{Exp}(\alpha_M h_u) - \text{Exp}(-\alpha_M h_u)} \times \frac{2}{\alpha_M h_u} = \frac{\text{Tanh}(\alpha_M h_u/2)}{\alpha_M h_u/2} \end{cases} \quad (20-7)$$

$u = x, y, z; \quad M = 1, 2$

به ضرایب C^f و C^j ، "ضرایب مودال اسکالر" گفته می‌شود. برای خروج از فضای مودال و بازگشت به فضای نودال، معادله (۲۲-۷)، از روابط (۱۷-۷) و (۲۱-۷) استفاده می‌شود:

$$T_{u,M} \left(\mp \frac{h_u}{2} \right) = C_{u,M}^f \bar{P}_{u,M} - P_{u,M} \left(\mp \frac{h_u}{2} \right) \mp C_{u,M}^j \frac{h_x}{2} P'_{u,M} \left(\mp \frac{h_u}{2} \right) \quad (۲۱-۷)$$

$$AF = [R]^{-1} \times [CF] \times [R]$$

$$AJ = [R]^{-1} \times [CJ] \times [R]$$

$$u = x, y, z$$

$$\left| \varphi_{u,g} \left(\mp \frac{h_u}{2} \right) \right\rangle = [AF] \left| \bar{\varphi}_{u,g} \right\rangle \pm \frac{h_u}{2} [AJ] [D]^{-1} \left| J_{u,g} \left(\mp \frac{h_u}{2} \right) \right\rangle - R^{-1} \left| T_{u,M} \left(\mp \frac{h_u}{2} \right) \right\rangle \quad (۲۲-۷)$$

$$g, M = 1, 2; \quad u = x, y, z$$

سپس با استفاده از شرایط پیوستگی شار و جریان روی مرز بین نودها، یک ارتباط ریاضی بین شار متوسط هر نود و جریان خالص روی مرزهای همان نود بدست می‌آید.

شرایط پیوستگی شار و جریان بر روی سطوح نود موردنظر به صورت روابط (۲۳-۷) نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} \varphi_{u,g,R}^{m_u} = \varphi_{u,g,R}^{m_u+1} \\ \varphi_{u,g,R}^{m_u-1} = \varphi_{u,g,R}^{m_u} \\ J_{u,g,R}^{m_u} = J_{u,g,R}^{m_u+1} \\ J_{u,g,R}^{m_u-1} = J_{u,g,R}^{m_u} \end{cases} \quad (23-7)$$

$g = 1, 2; \quad u = x, y, z$

با استفاده از رابطه (22-7)، و جایگذاری آن در روابط فوق، معادله (24-7) بدست می آید:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{h_u^{m_u, m_v, m_w}}{2} [AJ]^{m_u, m_v, m_w} [D^{-1}]^{m_u, m_v, m_w} + \frac{h_x^{m_u+1, m_v, m_w}}{2} [AJ]^{m_u+1, m_v, m_w} [D^{-1}]^{m_u+1, m_v, m_w} \right\} \begin{bmatrix} J_{u,1}^{m_u+1, m_v, m_w} \\ J_{u,2}^{m_u+1, m_v, m_w} \end{bmatrix} = \\ & [AF]^{m_u, m_v, m_w} \begin{bmatrix} \varphi_1^{m_u, m_v, m_w} \\ \varphi_2^{m_u, m_v, m_w} \end{bmatrix} - [AF]^{m_u+1, m_v, m_w} \begin{bmatrix} \varphi_1^{m_u+1, m_v, m_w} \\ \varphi_2^{m_u+1, m_v, m_w} \end{bmatrix} + \\ & \left\{ -[R^{-1}]^{m_u, m_v, m_w} \begin{bmatrix} T_{u,1,R}^{m_u, m_v, m_w} \\ T_{u,2,R}^{m_u, m_v, m_w} \end{bmatrix} + [R^{-1}]^{m_u+1, m_v, m_w} \begin{bmatrix} T_{u,1,L}^{m_u+1, m_v, m_w} \\ T_{u,2,L}^{m_u+1, m_v, m_w} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (24-7)$$

$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$

با استفاده از تعاریف (۲۵-۷)،

$$\begin{cases} [CJC]_U^{m_u, m_v, m_w} = \left\{ \frac{h_u^{m_u, m_v, m_w}}{2} [AJ]^{m_u, m_v, m_w} [D^{-1}]^{m_u, m_v, m_w} + \frac{h_u^{m_u+1, m_v, m_w}}{2} [AJ]^{m_u+1, m_v, m_w} [D^{-1}]^{m_u+1, m_v, m_w} \right\} \\ [CJC]_L^{m_u, m_v, m_w} = \left\{ \frac{h_u^{m_u, m_v, m_w}}{2} [AJ]^{m_u, m_v, m_w} [D^{-1}]^{m_u, m_v, m_w} + \frac{h_u^{m_u-1, m_v, m_w}}{2} [AJ]^{m_u-1, m_v, m_w} [D^{-1}]^{m_u-1, m_v, m_w} \right\} \end{cases} \quad (25-7)$$

$$[CJCN] = [CJC]^{-1}$$

$u, v, w = x, y, z; u \neq v \neq w$

روابط (۲۶-۷) حاصل می‌شوند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \mathbf{J}_{u,1}^{m_u+m_v,m_w} \\ \mathbf{J}_{u,2}^{m_u+m_v,m_w} \end{array} \right] = [\text{CJCN}]_R^{m_u,m_v,m_w} \left\{ \begin{array}{l} [\text{AF}]^{m_u,m_v,m_w} \left[\begin{array}{c} \varphi_1^{m_u,m_v,m_w} \\ \varphi_2^{m_u,m_v,m_w} \end{array} \right] - [\text{AF}]^{m_u+1,m_v,m_w} \left[\begin{array}{c} \varphi_1^{m_u+1,m_v,m_w} \\ \varphi_2^{m_u+1,m_v,m_w} \end{array} \right] + \\ - [\mathbf{R}^{-1}]^{m_u,m_v,m_w} \left[\begin{array}{c} \mathbf{T}_{u,1,R}^{m_u,m_v,m_w} \\ \mathbf{T}_{u,2,R}^{m_u,m_v,m_w} \end{array} \right] + [\mathbf{R}^{-1}]^{m_u+1,m_v,m_w} \left[\begin{array}{c} \mathbf{T}_{u,1,L}^{m_u+1,m_v,m_w} \\ \mathbf{T}_{u,2,L}^{m_u+1,m_v,m_w} \end{array} \right] \end{array} \right\} \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{J}_{u,1}^{m_u-m_v,m_w} \\ \mathbf{J}_{u,2}^{m_u-m_v,m_w} \end{array} \right] = [\text{CJCN}]_L^{m_u,m_v,m_w} \left\{ \begin{array}{l} [\text{AF}]^{m_u-1,m_v,m_w} \left[\begin{array}{c} \varphi_1^{m_u-1,m_v,m_w} \\ \varphi_2^{m_u-1,m_v,m_w} \end{array} \right] - [\text{AF}]^{m_u,m_v,m_w} \left[\begin{array}{c} \varphi_1^{m_u,m_v,m_w} \\ \varphi_2^{m_u,m_v,m_w} \end{array} \right] + \\ - [\mathbf{R}^{-1}]^{m_u-1,m_v,m_w} \left[\begin{array}{c} \mathbf{T}_{u,1,R}^{m_u-1,m_v,m_w} \\ \mathbf{T}_{u,2,R}^{m_u-1,m_v,m_w} \end{array} \right] + [\mathbf{R}^{-1}]^{m_u,m_v,m_w} \left[\begin{array}{c} \mathbf{T}_{u,1,L}^{m_u,m_v,m_w} \\ \mathbf{T}_{u,2,L}^{m_u,m_v,m_w} \end{array} \right] \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (26-7)$$

$u, v, w = x, y, z; u \neq v \neq w$

برای نمایش جمله جریان در راستاهای مختلف از تعاریف (۲۷-۷) استفاده می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{CP}_{u,g,R,g'}^{m_u,m_v,m_w} = [\text{CJCN}]_R^{m_u,m_v,m_w} [\text{AF}]^{m_u,m_v,m_w} \\ \mathbf{CP}_{u,g,R,g,R}^{m_u,m_v,m_w} = [\text{CJCN}]_R^{m_u,m_v,m_w} [\text{AF}]^{m_u+1,m_v,m_w} \\ \mathbf{CP}_{u,g,L,g}^{m_u,m_v,m_w} = [\text{CJCN}]_L^{m_u,m_v,m_w} [\text{AF}]^{m_u,m_v,m_w} \\ \mathbf{CP}_{u,g,L,g,L}^{m_u,m_v,m_w} = [\text{CJCN}]_L^{m_u,m_v,m_w} [\text{AF}]^{m_u-1,m_v,m_w} \end{array} \right. \quad (27-7)$$

$u, v, w = x, y, z; u \neq v \neq w; g, g' = 1, 2$

به کمک تعاریف فوق، جملات جریان به صورت روابط (۲۸-۷) و (۲۹-۷) نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} J_{u,1}^{m_u+m_v+m_w} \\ J_{u,2}^{m_u+m_v+m_w} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} + \left[\begin{array}{cc} CP_{u,1,R,g1}^{m_u,m_v,m_w} & CP_{u,2,R,g1}^{m_u,m_v,m_w} \\ CP_{u,1,R,g2}^{m_u,m_v,m_w} & CP_{u,2,R,g2}^{m_u,m_v,m_w} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \phi_1^{m_u,m_v,m_w} \\ \phi_2^{m_u,m_v,m_w} \end{bmatrix} - \left[\begin{array}{cc} CP_{u,1,R,g1,R}^{m_u,m_v,m_w} & CP_{u,2,R,g1,R}^{m_u,m_v,m_w} \\ CP_{u,1,R,g2,R}^{m_u,m_v,m_w} & CP_{u,2,R,g2,R}^{m_u,m_v,m_w} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \phi_1^{m_u+1,m_v,m_w} \\ \phi_2^{m_u+1,m_v,m_w} \end{bmatrix} \\ - \left[\begin{array}{cc} CT_{u,1,R,g1}^{m_u,m_v,m_w} & CT_{u,1,R,g1}^{m_u,m_v,m_w} \\ CT_{u,1,R,g2}^{m_u,m_v,m_w} & CT_{u,2,R,g2}^{m_u,m_v,m_w} \end{array} \right] \begin{bmatrix} T_{u,1,R}^{m_u,m_v,m_w} \\ T_{u,2,R}^{m_u,m_v,m_w} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} CT_{u,1,R,g1,R}^{m_u,m_v,m_w} & CT_{u,2,R,g1,R}^{m_u,m_v,m_w} \\ CT_{u,1,R,g2,R}^{m_u,m_v,m_w} & CT_{u,2,R,g2,R}^{m_u,m_v,m_w} \end{array} \right] \begin{bmatrix} T_{u,1,L}^{m_u+1,m_v,m_w} \\ T_{u,2,L}^{m_u+1,m_v,m_w} \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (28-7)$$

u, v, w = x, y, z; u ≠ v ≠ w

$$\begin{bmatrix} J_{u,1}^{m_u-m_v,m_w} \\ J_{u,2}^{m_u-m_v,m_w} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} - \left[\begin{array}{cc} CP_{u,1,L,g1}^{m_u,m_v,m_w} & CP_{u,2,L,g1}^{m_u,m_v,m_w} \\ CP_{u,1,L,g2}^{m_u,m_v,m_w} & CP_{u,2,L,g2}^{m_u,m_v,m_w} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \phi_1^{m_u,m_v,m_w} \\ \phi_2^{m_u,m_v,m_w} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} CP_{u,1,L,g1,L}^{m_u,m_v,m_w} & CP_{u,2,L,g1,L}^{m_u,m_v,m_w} \\ CP_{u,1,L,g2,L}^{m_u,m_v,m_w} & CP_{u,2,L,g2,L}^{m_u,m_v,m_w} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \phi_1^{m_u-1,m_v,m_w} \\ \phi_2^{m_u-1,m_v,m_w} \end{bmatrix} \\ + \left[\begin{array}{cc} CT_{u,1,L,g1}^{m_u,m_v,m_w} & CT_{u,2,L,g1}^{m_u,m_v,m_w} \\ CT_{u,1,L,g2}^{m_u,m_v,m_w} & CT_{u,2,L,g2}^{m_u,m_v,m_w} \end{array} \right] \begin{bmatrix} T_{u,1,L}^{m_u,m_v,m_w} \\ T_{u,2,L}^{m_u,m_v,m_w} \end{bmatrix} - \left[\begin{array}{cc} CT_{u,1,L,g1,R}^{m_u,m_v,m_w} & CT_{u,2,L,g1,R}^{m_u,m_v,m_w} \\ CT_{u,1,L,g2,R}^{m_u,m_v,m_w} & CT_{u,2,L,g2,R}^{m_u,m_v,m_w} \end{array} \right] \begin{bmatrix} T_{u,1,R}^{m_u-1,m_v,m_w} \\ T_{u,2,R}^{m_u-1,m_v,m_w} \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (29-7)$$

u, v, w = x, y, z; u ≠ v ≠ w

روابط فوق برای نودهای غیر مرزی قابل استفاده می‌باشد. در ادامه، روابط مربوط به نودهای مرزی بدست خواهد آمد:

۷-۱-۱-۱- نودهای مرزی واقع در سمت چپ و راست محیط

با تعریف پارامترهای λ_L و λ_R به صورت روابط (۷-۳۰)،

$$\begin{cases} \frac{J_{u,g}^{1-}}{\phi_{u,g,L}^1} = -\lambda_{u,L} \Rightarrow \phi_{u,g,L}^1 = -\frac{J_{u,g}^{1-}}{\lambda_{u,L}} \\ \frac{J_{u,g}^{N_u+}}{\phi_{u,g,R}^{N_u}} = +\lambda_{u,R} \Rightarrow \phi_{u,g,R}^{N_u} = +\frac{J_{u,g}^{N_u+}}{\lambda_{u,R}} \end{cases} \quad (۷-۳۰)$$

$$u = x, y, z; \quad g = 1, 2$$

و تعاریف (۷-۳۱)،

$$\left\{ \begin{aligned} [\lambda L] &= \begin{bmatrix} \lambda_L & 0 \\ 0 & \lambda_L \end{bmatrix}; [\lambda R] = \begin{bmatrix} \lambda_R & 0 \\ 0 & \lambda_R \end{bmatrix} \\ [\lambda LI] &= [\lambda L]^{-1}; [\lambda RI] = [\lambda R]^{-1}; [CJCN] = [CJC]^{-1} \\ [CJC]_L^{N_u} &= \left\{ [\lambda LI] + \frac{h_u^1}{2} [AJ]^1 [D^{-1}]^1 \right\} \\ [CJC]_R^{N_u} &= \left\{ \frac{h_u^{N_u}}{2} [AJ]^{N_u} [D^{-1}]^{N_u} + [\lambda RI] \right\} \end{aligned} \right. \quad (31-7)$$

$u = x, y, z$

روابط (32-7) حاصل می‌شوند:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} J_{u,1}^{1-} \\ J_{u,2}^{1-} \end{bmatrix} &= [CJCN]_L^{N_u} \left\{ -[AF]^1 \begin{bmatrix} \phi_1^1 \\ \phi_2^1 \end{bmatrix} + \left\{ + [R^{-1}]^1 \begin{bmatrix} T_{u,1,L}^1 \\ T_{u,2,L}^1 \end{bmatrix} \right\} \right\} \\ \begin{bmatrix} J_{u,1}^{N_u+} \\ J_{u,2}^{N_u+} \end{bmatrix} &= [CJCN]_R^{N_u} \left\{ + [AF]^{N_u} \begin{bmatrix} \phi_1^{N_u} \\ \phi_2^{N_u} \end{bmatrix} + \left\{ - [R^{-1}]^{N_u} \begin{bmatrix} T_{u,1,R}^{N_u} \\ T_{u,2,R}^{N_u} \end{bmatrix} \right\} \right\} \end{aligned} \right. \quad (32-7)$$

$u = x, y, z$

همچنین، برای نمایش جمله جریان از تعاریف (33-7) استفاده می‌شود:

$$\begin{cases} \text{CP}_{u,g,L,g'}^1 = [\text{CJCN}]_L^1 [\text{AF}]^1 \\ \text{CP}_{u,g,R,g'}^{N_u} = [\text{CJCN}]_R^{N_u} [\text{AF}]^{N_u} \end{cases} \quad (33-7)$$

$u = x, y, z; g, g' = 1, 2$

به کمک تعاریف فوق، جملات جریان به صورت روابط (34-7) و (35-7) نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} \text{J}_{u,1}^{1-} \\ \text{J}_{u,2}^{1-} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \text{CP}_{u,1,L,1}^1 & \text{CP}_{u,2,L,1}^1 \\ \text{CP}_{u,1,L,2}^1 & \text{CP}_{u,2,L,2}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^1 \\ \phi_2^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{CT}_{u,1,L,1}^1 & \text{CT}_{u,2,L,1}^1 \\ \text{CT}_{u,1,L,2}^1 & \text{CT}_{u,2,L,2}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{T}_{u,1,L}^1 \\ \text{T}_{u,2,L}^1 \end{bmatrix} \quad (34-7)$$

$u = x, y, z$

$$\begin{bmatrix} \text{J}_{u,1}^{N_u+} \\ \text{J}_{u,2}^{N_u+} \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} \text{CP}_{u,1,R,1}^{N_u} & \text{CP}_{u,2,R,1}^{N_u} \\ \text{CP}_{u,1,R,2}^{N_u} & \text{CP}_{u,2,R,2}^{N_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{N_u} \\ \phi_2^{N_u} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{CT}_{u,1,R,1}^{N_u} & \text{CT}_{u,2,R,1}^{N_u} \\ \text{CT}_{u,1,R,2}^{N_u} & \text{CT}_{u,2,R,2}^{N_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{T}_{u,1,R}^{N_u} \\ \text{T}_{u,2,R}^{N_u} \end{bmatrix} \quad (35-7)$$

$u = x, y, z$

با جایگذاری جملات جریان در روابط (3-7)، دستگاه معادلات خطی (36-7) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} [A_1] \{\psi_1\} &= \{S_1\} - \{[A_2] \{\psi_2\} + \{C_1\}\} \\ [B_2] \{\psi_2\} &= \{S_2\} - \{[B_1] \{\psi_1\} + \{C_2\}\} \end{aligned} \quad (۳۶-۷)$$

ماتریس‌های A و B، ماتریس‌های ضرایب می‌باشند و ماتریس C نیز ناشی از جملات فرار عرضی بوده که باید در هر مرحله (تکرار) به‌روزرسانی شود.

۷-۱-۲- محاسبه فرار عرضی

جمله فرار متقاطع (عرضی) بر راستاهای X، Y و Z به صورت رابطه (۳۷-۷) بیان می‌شود:

$$L_{v,g}^{m_u, m_v, m_w} (u) = c_{0,v,g}^{m_u, m_v, m_w} + c_{1,v,g}^{m_u, m_v, m_w} (u) + c_{2,v,g}^{m_u, m_v, m_w} \left(u^2 - \frac{1}{12} (h_u^{m_u, m_v, m_w})^2 \right) \quad (۳۷-۷)$$

$$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w; \quad g = 1, 2$$

ضرایب بسط فوق با انتگرال گیری از جمله فرار عرضی بر روی نود مزبور و دو نود مجاور آن، به صورت (۷-۳۸)، محاسبه می‌شوند.

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{L}_{v,g}^{m_u-1,m_v,m_w} &= \frac{1}{h_{u,m_u-1,m_v,m_w}^{m_u-1,m_v,m_w}} \int_{\frac{h_u^{m_u-1,m_v,m_w}}{2}}^{\frac{h_u^{m_u,m_v,m_w}}{2}} \left\{ c_{0,v,g}^{m_u,m_v,m_w} + c_{1,v,g}^{m_u,m_v,m_w}(u) + c_{2,v,g}^{m_u,m_v,m_w} \left(u^2 - \frac{1}{12} (h_u^{m_u,m_v,m_w})^2 \right) \right\} du \\ \Rightarrow \bar{L}_{v,g}^{m_u-1,m_v,m_w} &= c_{0,v,g}^{m_u,m_v,m_w} + c_{1,v,g}^{m_u,m_v,m_w} \left(-\frac{h_u^{m_u-1,m_v,m_w} + h_u^{m_u,m_v,m_w}}{2} \right) + \\ &c_{2,v,g}^{m_u,m_v,m_w} \left(\frac{(h_u^{m_u-1,m_v,m_w} + h_u^{m_u,m_v,m_w})(2h_u^{m_u-1,m_v,m_w} + h_u^{m_u,m_v,m_w})}{6} \right) \\ \bar{L}_{v,g}^{m_u,m_v,m_w} &= \frac{1}{h_{u,m_u,m_v,m_w}^{m_u,m_v,m_w}} \int_{\frac{h_u^{m_u,m_v,m_w}}{2}}^{\frac{h_u^{m_u,m_v,m_w}}{2}} \left\{ c_{0,v,g}^{m_u,m_v,m_w} + c_{1,v,g}^{m_u,m_v,m_w}(u) + c_{2,v,g}^{m_u,m_v,m_w} \left(u^2 - \frac{1}{12} (h_u^{m_u,m_v,m_w})^2 \right) \right\} du \\ \Rightarrow \bar{L}_{v,g}^{m_u,m_v,m_w} &= c_{0,v,g}^{m_u,m_v,m_w} + c_{1,v,g}^{m_u,m_v,m_w}(0) + c_{2,v,g}^{m_u,m_v,m_w}(0) \\ \bar{L}_{v,g}^{m_u+1,m_v,m_w} &= \frac{1}{h_{u,m_u+1,m_v,m_w}^{m_u+1,m_v,m_w}} \int_{\frac{h_u^{m_u+1,m_v,m_w}}{2}}^{\frac{h_u^{m_u,m_v,m_w}}{2} + h_{u,m_u+1,m_v,m_w}} \left\{ c_{0,v,g}^{m_u,m_v,m_w} + c_{1,v,g}^{m_u,m_v,m_w}(u) + c_{2,v,g}^{m_u,m_v,m_w} \left(u^2 - \frac{1}{12} (h_u^{m_u,m_v,m_w})^2 \right) \right\} du \\ \Rightarrow \bar{L}_{v,g}^{m_u+1,m_v,m_w} &= c_{0,v,g}^{m_u,m_v,m_w} + c_{1,v,g}^{m_u,m_v,m_w} \left(+\frac{h_u^{m_u+1,m_v,m_w} + h_u^{m_u,m_v,m_w}}{2} \right) + \\ &c_{2,v,g}^{m_u,m_v,m_w} \left(\frac{(h_u^{m_u+1,m_v,m_w} + h_u^{m_u,m_v,m_w})(2h_u^{m_u+1,m_v,m_w} + h_u^{m_u,m_v,m_w})}{6} \right) \end{aligned} \right.$$

(۷-۳۸)

$$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w; \quad g = 1, 2$$

بنابراین برای تقریب تخت از رابطه (۷-۳۹)،

$$\begin{bmatrix} c_{0,u,1} \\ c_{0,u,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{L}_{v,1} \\ \bar{L}_{v,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{L}_{w,1} \\ \bar{L}_{w,2} \end{bmatrix} \quad (۷-۳۹)$$

$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$

و برای تقریب درجه دو از روابط (۷-۴۰) استفاده می‌شود:

$$\begin{cases} h_u^{m_u-1, m_v, m_w} = h^\ell & \begin{cases} \bar{L}_{u,g}^{m_u, m_v-1, m_w} = \bar{L}_{u,g}^\ell \\ \bar{L}_{u,g}^{m_u, m_v, m_w} = \bar{L}_{u,g} \\ \bar{L}_{u,g}^{m_u, m_v+1, m_w} = \bar{L}_{u,g}^r \end{cases} & \begin{cases} \bar{L}_{u,g}^{m_u, m_v, m_w-1} = \bar{L}_{u,g}^\ell \\ \bar{L}_{u,g}^{m_u, m_v, m_w} = \bar{L}_{u,g} \\ \bar{L}_{u,g}^{m_u, m_v, m_w+1} = \bar{L}_{u,g}^r \end{cases} \end{cases} \quad (۷-۴۰)$$

$$\begin{bmatrix} c_{0,u,g} \\ c_{1,u,g} \\ c_{2,u,g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \left(-\frac{h^\ell + h}{2} \right) & \left(\frac{(h^\ell + h)(4h^\ell + 2h)}{12} \right) \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \left(\frac{h^r + h}{2} \right) & \left(\frac{(h^r + h)(4h^r + 2h)}{12} \right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{L}_{u,g}^\ell \\ \bar{L}_{u,g} \\ \bar{L}_{u,g}^r \end{bmatrix}$$

$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w; \quad g = 1, 2$

با توجه به رابطه (۷-۱۷)، جمله چشمه برای جهت‌های x ، y و z به صورت رابطه (۷-۴۱) بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \ell_{v,w,1}^{m_u, m_v, m_w}(u) \\ \ell_{v,w,2}^{m_u, m_v, m_w}(u) \end{bmatrix} = \mathbf{RD}^{-1} \left(\begin{bmatrix} S \\ S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{v,1}^{m_u, m_v, m_w}(u) \\ L_{v,2}^{m_u, m_v, m_w}(u) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{w,1}^{m_u, m_v, m_w}(u) \\ L_{w,2}^{m_u, m_v, m_w}(u) \end{bmatrix} \right) \quad (۷-۴۱)$$

$$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$$

پاسخ خصوصی معادله مودال با استفاده از جملات فرار عرضی، به صورت (۷-۴۲) بیان می‌شود:

$$P_{v,w,g}^{m_u, m_v, m_w}(u) = -\frac{1}{\lambda_g^{m_u, m_v, m_w}} \ell_{v,w,g}^{m_u, m_v, m_w}(u) - \frac{1}{(\lambda_g^{m_u, m_v, m_w})^2} \ell'_{v,w,g}{}^{m_u, m_v, m_w}(u) \quad (۷-۴۲)$$

$$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w; \quad g = 1, 2$$

۷-۲- الگوریتم حل

روند حل معادله پخش نوترون در محیط غیرتکثیرپذیر به صورت زیر می باشد:

۱. خواندن مقادیر ورودی برنامه شامل:

۱.۱. ابعاد حجم سه بعدی (بر حسب سانتیمتر L_x, L_y, L_z)

۱.۲. تعداد مش‌ها در هر راستا (نقاطی که شار نوترونی در آنها محاسبه می‌شود N_x, N_y, N_z)

۱.۳. ضریب پخش گروهی (D)

۱.۴. سطح مقطع گروهی ماکروسکوپی جذب پرتوزا (Σ_{capture})

۱.۵. سطح مقطع ماکروسکوپی پراکندگی بین گروه‌های انرژی ($\Sigma_{s,g \rightarrow g'}$)

۱.۶. شرایط مرزی سمت چپ و راست در هر راستا (پارامترهای λ_R و λ_L)

۱.۷. معیار همگرایی شارنوترونی (ϵ_{phi})

۱.۸. مقدار اولیه برای شارهای گروهی

۲. تعیین عناصر ماتریس‌های A و B در رابطه (۷-۳۶).

۳. تعیین جملات فرار عرضی و عناصر ماتریس C در هر راستا با استفاده از پاسخ مرحله (تکرار) قبلی.

۴. حل سیستم‌های خطی (۷-۳۶)

۵. استفاده از شارهای جدید در محاسبه عناصر ماتریس C.

۶. مراحل ۳ تا ۵ تا ارضای شرط همگرایی ادامه یابد.

۸- حل معادله پخش نوترون به روش نودال تحلیلی برای مسائل بحرانیت

بخش اول از این فصل به نحوه گسسته‌سازی مکانی معادله پخش نوترون در دو گروه انرژی به روش نودال تحلیلی اختصاص دارد و در بخش دوم، نحوه اجرای فرایند حل ارائه می‌گردد.

۸-۱- گسسته سازی مکانی معادله پخش نوترون

معادله پخش نوترون وابسته به زمان چند گروهی به صورت معادله (۶-۱) نوشته می شود. اگر جمله زمانی آن حذف شود، معادله پخش نوترون چند گروهی در حالت پایا و برای مسائل بحرانیات، به صورت معادله (۸-۱)، حاصل می شود.

$$-\nabla \cdot \vec{J}_g(\vec{r}) - \Sigma_{t,g}(\vec{r})\phi_g(\vec{r}) + \sum_{g'=1}^G \left[\Sigma_{g' \rightarrow g}(\vec{r}) + \chi_g \left(\frac{1}{k_{\text{eff}}} \right) \nu \Sigma_{f,g'}(\vec{r}) \right] \phi_{g'}(\vec{r}) = 0 \quad (1-8)$$

$g = 1, \dots, G$

با فرض دو گروه انرژی، معادله مستقل از زمان پخش نوترون به صورت معادله (۸-۲) در می آید:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \vec{J}_1(\vec{r}) - \Sigma_{r,1}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) + \Sigma_{2 \rightarrow 1}(\vec{r})\phi_2(\vec{r}) + \left(\frac{1}{k_{\text{eff}}} \right) [\nu \Sigma_{f,1}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) + \nu \Sigma_{f,2}(\vec{r})\phi_2(\vec{r})] = 0 \\ -\nabla \cdot \vec{J}_2(\vec{r}) - \Sigma_{r,2}(\vec{r})\phi_2(\vec{r}) + \Sigma_{1 \rightarrow 2}(\vec{r})\phi_1(\vec{r}) = 0 \end{cases} \quad (2-8)$$

برای گسسته‌سازی معادله (۸-۲) در یک هندسه معین، ابتدا باید هندسه موردنظر به نواحی مشخصی تقسیم‌بندی شود. به هر یک از این نواحی مشخص شده "نود" گفته می‌شود.

با انتگرال‌گیری از معادله (۸-۲) بر روی حجم کنترل (حجم نود m_x, m_y, m_z)، معادله تراز نوترون به صورت روابط (۸-۳) بدست می‌آید.

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{h_x^{m_x, m_y, m_z}} [J_{1x}^{m_x +, m_y, m_z} - J_{1x}^{m_x -, m_y, m_z}] + \frac{1}{h_y^{m_x, m_y, m_z}} [J_{1y}^{m_x, m_y +, m_z} - J_{1y}^{m_x, m_y -, m_z}] + \\ & \frac{1}{h_z^{m_x, m_y, m_z}} [J_{1z}^{m_x, m_y, m_z +} - J_{1z}^{m_x, m_y, m_z -}] + \sum_{r,1}^{m_x, m_y, m_z} \phi_1^{m_x, m_y, m_z} - \sum_{s,21}^{m_x, m_y, m_z} \phi_2^{m_x, m_y, m_z} = \\ & \frac{1}{k_{eff}} [\nu \sum_{f,1}^{m_x, m_y, m_z} \phi_1^{m_x, m_y, m_z} + \nu \sum_{f,2}^{m_x, m_y, m_z} \phi_2^{m_x, m_y, m_z}] \end{aligned} \right. \quad (3-8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{h_x^{m_x, m_y, m_z}} [J_{2x}^{m_x +, m_y, m_z} - J_{2x}^{m_x -, m_y, m_z}] + \frac{1}{h_y^{m_x, m_y, m_z}} [J_{2y}^{m_x, m_y +, m_z} - J_{2y}^{m_x, m_y -, m_z}] + \\ & \frac{1}{h_z^{m_x, m_y, m_z}} [J_{2z}^{m_x, m_y, m_z +} - J_{2z}^{m_x, m_y, m_z -}] + \sum_{r,2}^{m_x, m_y, m_z} \phi_2^{m_x, m_y, m_z} - \sum_{s,12}^{m_x, m_y, m_z} \phi_1^{m_x, m_y, m_z} = 0 \end{aligned} \right.$$

در روابط فوق از تعاریف (۴-۸) تا (۶-۸) استفاده شده است.

$$\iiint_{h_x^m h_y^m h_z^m} \sum_r(x, y, z) \phi_g(x, y, z) dx dy dz = h_x^m h_y^m h_z^m \sum_r^m \phi_g^m \quad (4-8)$$

$$\iiint_{h_x^m h_y^m h_z^m} v \Sigma_{f,g}^m(x, y, z) \phi_g^m(x, y, z) dx dy dz = h_x^m h_y^m h_z^m (v \Sigma_{f,g}^m) \phi_g^m \quad (5-8)$$

$$\iiint_{h_x^m h_y^m h_z^m} \nabla \cdot \vec{J}_g^m(x, y, z) dx dy dz = h_y^m h_z^m (J_{x,g}^{m+} - J_{x,g}^{m-}) + h_z^m h_x^m (J_{y,g}^{m+} - J_{y,g}^{m-}) + h_x^m h_y^m (J_{z,g}^{m+} - J_{z,g}^{m-}) \quad (6-8)$$

با استخراج رابطه‌ای بین جریان متوسط روی سطوح و شار متوسط هر نود، معادله (۸-۳) حل خواهد شد. نحوه محاسبه این ارتباط در ادامه بیان می‌شود.

۸-۱-۱- رابطه شار و جریان

معادله دیفرانسیل پخش نوترون در دو گروه انرژی برای یک نود همگن به صورت (۸-۷) نوشته می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} -D_1 \frac{\partial^2 \varphi_1(x, y, z)}{\partial x^2} - D_1 \frac{\partial^2 \varphi_1(x, y, z)}{\partial y^2} - D_1 \frac{\partial^2 \varphi_1(x, y, z)}{\partial z^2} + \\ \Sigma_{r,1} \varphi_1(x, y, z) - \Sigma_{s,21} \varphi_2(x, y, z) = \frac{1}{k_{\text{eff}}} [v \Sigma_{f,1} \varphi_1(x, y, z) + v \Sigma_{f,2} \varphi_2(x, y, z)] \\ -D_2 \frac{\partial^2 \varphi_2(x, y, z)}{\partial x^2} - D_2 \frac{\partial^2 \varphi_2(x, y, z)}{\partial y^2} - D_2 \frac{\partial^2 \varphi_2(x, y, z)}{\partial z^2} + \Sigma_{r,2} \varphi_2(x, y, z) - \Sigma_{s,12} \varphi_1(x, y, z) = 0 \end{array} \right. \quad (7-8)$$

به منظور استفاده از تقریب فرار عرضی، از معادله (7-8) یک بار در راستاهای y و z ، یک بار در راستاهای x و z و یک بار هم در راستاهای x و y انتگرال گیری می شود. در نهایت، معادلات (8-8)، به طور مجزا در هر راستا، بدست می آیند:

$$\left\{ \begin{array}{l} -D \frac{d^2 \varphi_{u,1}(u)}{du^2} + \Sigma_{r,1} \varphi_{u,1}(u) + \frac{1}{h_v^{m_u, m_v, m_w}} [J_{v,1}^{m_u, m_v, m_w}(u) - J_{v,1}^{m_u, m_v, m_w}(u)] + \\ \frac{1}{h_w^{m_u, m_v, m_w}} [J_{z,1}^{m_u, m_v, m_w}(u) - J_{z,1}^{m_u, m_v, m_w}(u)] - \Sigma_{s,21} \varphi_{u,2}(u) = \frac{1}{k_{eff}} [v \Sigma_{f,1} \varphi_{u,1}(u) + v \Sigma_{f,2} \varphi_{u,2}(u)] \end{array} \right. \quad (8-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -D \frac{d^2 \varphi_{u,2}(u)}{du^2} + \Sigma_{r,2} \varphi_{u,2}(u) + \frac{1}{h_v^{m_u, m_v, m_w}} [J_{v,2}^{m_u, m_v, m_w}(u) - J_{v,2}^{m_u, m_v, m_w}(u)] + \\ \frac{1}{h_w^{m_u, m_v, m_w}} [J_{w,2}^{m_u, m_v, m_w}(u) - J_{w,2}^{m_u, m_v, m_w}(u)] - \Sigma_{s,12} \varphi_{u,1}(u) = 0 \end{array} \right.$$

$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$

با تعریف فرار عرضی به صورت روابط (8-9)،

$$L_{u,g}^{m_u, m_v, m_w}(v) = \frac{1}{h_u^{m_u, m_v, m_w}} [J_{u,g}^{m_u, m_v, m_w}(v) - J_{u,g}^{m_u, m_v, m_w}(v)] \quad (9-1)$$

$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w; \quad g = 1, 2$

معادلات (8-10) حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} -D_1 \frac{d^2 \varphi_{u,1}(u)}{du^2} + \sum_{r,1} \varphi_{u,1}(u) - \sum_{s,2,1} \varphi_{u,2}(u) = -[L_{v,1}(u) + L_{w,1}(u)] \\ -D_2 \frac{d^2 \varphi_{u,2}(u)}{du^2} + \sum_{r,2} \varphi_{u,2}(u) - \sum_{s,1,2} \varphi_{u,1}(u) = -[L_{v,2}(u) + L_{w,2}(u)] \end{cases} \quad (10-8)$$

$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w; \quad g = 1, 2$

در ادامه، معادلات فوق برای هر یک از سه راستای x ، y و z به طور جداگانه حل می‌شوند. شکل ماتریسی معادلات فوق به صورت (۱۱-۸) می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 \varphi_{u,1}(u)}{du^2} \\ \frac{d^2 \varphi_{u,2}(u)}{du^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\sum_{r,1} - \frac{v \sum_{f,1}}{k_{eff}}}{D_1} & - \frac{\sum_{s,2 \rightarrow 1} + \frac{v \sum_{f,2}}{k_{eff}}}{D_1} \\ - \frac{\sum_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2} & \frac{\sum_{r,2}}{D_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{u,1}(u) \\ \varphi_{u,2}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \frac{L_{v,1}(u) - L_{w,1}(u)}{D_1} \\ - \frac{L_{v,1}(u) - L_{w,1}(u)}{D_2} \end{bmatrix} \quad (11-8)$$

$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$

با استفاده از تعاریف (۸-۱۲) تا (۸-۱۴)،

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\Sigma_{r,1} - \frac{v\Sigma_{f,1}}{k_{\text{eff}}}}{D_1} & \frac{\Sigma_{s,2 \rightarrow 1} + \frac{v\Sigma_{f,2}}{k_{\text{eff}}}}{D_1} \\ -\frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2} & \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} \end{bmatrix} \quad (۱۲-۸)$$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \quad (۱۳-۸)$$

$$|\varphi_u(\mathbf{u})\rangle = \begin{bmatrix} \varphi_{u,1}(\mathbf{u}) \\ \varphi_{u,2}(\mathbf{u}) \end{bmatrix}; \quad |L_v(\mathbf{u})\rangle = \begin{bmatrix} L_{v,1}(\mathbf{u}) \\ L_{v,2}(\mathbf{u}) \end{bmatrix}; \quad |L_w(\mathbf{u})\rangle = \begin{bmatrix} L_{w,1}(\mathbf{u}) \\ L_{w,2}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (۱۴-۸)$$

$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$

معادله (۱۵-۸) بدست می‌آید:

$$\frac{d^2}{du^2} |\varphi_u(\mathbf{u})\rangle - A |\varphi_u(\mathbf{u})\rangle = -D^{-1} (- |L_v(\mathbf{u})\rangle - |L_w(\mathbf{u})\rangle) \quad (۱۵-۸)$$

$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$

از آنجایی که معادلات فوق به هم جفت شده‌اند، می‌توان از یک سری عملیات مجاز و مناسب استفاده کرد و این دو معادله را از هم جدا کرد. به این روش جداسازی، "دی کوپلینگ" و به معادلات حاصله، "مودال" گفته می‌شود.

ابتدا باید مقدارویژه‌ها و بردارویژه‌های ماتریس A تعیین شوند:

$$A|u_M\rangle = \lambda_M|u_M\rangle \Rightarrow \begin{cases} R^{-1} = [u_M] \\ [\lambda_M]_{\text{diag}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (۱۶-۸)$$

اکنون با استفاده از رابطه (۱۷-۸)،

$$\begin{cases} |\psi_u(u)\rangle = R|\phi_u(u)\rangle \\ |S\rangle = RD^{-1}(-|L_v(u)\rangle - |L_w(u)\rangle) \end{cases} \quad (۱۷-۸)$$

$$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$$

معادله مودال (۱۸-۸) بدست می آید:

$$\frac{d^2}{du^2} |\psi_u(u)\rangle - \lambda_M |\psi_u(u)\rangle = -|S\rangle \quad (18-8)$$

$u = x, y, z$

پاسخ معادلات فوق به صورت (۱۹-۸) نوشته خواهد شد:

$$\psi_{u,M}(u) = A_{u,M} \text{Exp}(\alpha_M u) + B_{u,M} \text{Exp}(-\alpha_M u) + P_{u,M}(u) \quad (19-8)$$

$u = x, y, z; \quad \alpha_M = \sqrt{\lambda_M}; \quad M = 1, 2$

با توجه به مقادیر شار و جریان مودال روی مرزهای نود و همچنین شار میانگین مودال، ضرایب مجهول A و B محاسبه می شوند و نهایتاً، رابطه (۲۰-۸) بدست خواهد آمد:

$$\Psi_{u,M}\left(\mp \frac{h_u}{2}\right) - P_{u,M}\left(\mp \frac{h_u}{2}\right) = C_{u,M}^f [\bar{\Psi}_{u,M} - \bar{P}_{u,M}] \pm C_{u,M}^j \frac{h_u}{2} \left[J_{u,M}\left(\mp \frac{h_u}{2}\right) - P'_{u,M}\left(\mp \frac{h_u}{2}\right) \right] \quad (20-8)$$

$$\begin{cases} C_{u,M}^f = \frac{2\alpha_M h_u}{\text{Exp}(\alpha_M h_u) - \text{Exp}(-\alpha_M h_u)} = \frac{\alpha_M h_u}{\text{Sinh}(\alpha_M h_u)} \\ C_{u,M}^j = \frac{\text{Exp}(\alpha_M h_u) + \text{Exp}(-\alpha_M h_u) - 2}{\text{Exp}(\alpha_M h_u) - \text{Exp}(-\alpha_M h_u)} \times \frac{2}{\alpha_M h_u} = \frac{\text{Tanh}(\alpha_M h_u/2)}{\alpha_M h_u/2} \end{cases}$$

$u = x, y, z; \quad \alpha_M = \sqrt{\lambda_M}; \quad M = 1, 2$

به ضرایب C^f و C^j ، "ضرایب مودال اسکالر" گفته می‌شود. برای خروج از فضای مودال و بازگشت به فضای نودال، معادله (۲۲-۸)، از عبارت (۲۱-۸)،

$$T_{u,M}\left(\mp \frac{h_u}{2}\right) = C_{u,M}^f \bar{P}_{u,M} - P_{u,M}\left(\mp \frac{h_u}{2}\right) \mp C_{u,M}^j \frac{h_u}{2} P'_{u,M}\left(\mp \frac{h_u}{2}\right) \quad (21-8)$$

$u = x, y, z; \quad M = 1, 2$

و رابطه (۱۷-۸) استفاده می‌شود.

$$\left\langle \varphi_u \left(\mp \frac{h_u}{2} \right) \right\rangle = [AF] \langle \bar{\varphi}_u \rangle \pm \frac{h_u}{2} [AJ] [D]^{-1} \left\langle J_u \left(\mp \frac{h_u}{2} \right) \right\rangle - R^{-1} \left\langle T_u \left(\mp \frac{h_u}{2} \right) \right\rangle \quad (۲۲-۸)$$

$$AF = [R]^{-1} [CF] [R]$$

$$AJ = [R]^{-1} [CJ] [R]$$

$$u = x, y, z$$

سپس با استفاده از شرایط پیوستگی شار و جریان روی مرز بین نودها، یک ارتباط ریاضی بین شار متوسط هر نود و جریان خالص روی مرزهای همان نود بدست می‌آید.

شرایط پیوستگی شار و جریان بر روی سطوح نود به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{u,g,R}^{m_u} = \varphi_{u,g,R}^{m_u+1} \\ \varphi_{u,g,R}^{m_u-1} = \varphi_{u,g,R}^{m_u} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} J_{u,g,R}^{m_u} = J_{u,g,R}^{m_u+1} \\ J_{u,g,R}^{m_u-1} = J_{u,g,R}^{m_u} \end{array} \right. \end{cases} \quad (23-8)$$

$g = 1, 2; \quad u = x, y, z$

با استفاده از رابطه (۲۲-۸)، و جایگذاری آن در روابط فوق، معادله (۲۴-۸) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{h_{u,m_v,m_w}}{2} [AJ]^{m_u,m_v,m_w} [D^{-1}]^{m_u,m_v,m_w} + \frac{h_x^{m_u+1,m_v,m_w}}{2} [AJ]^{m_u+1,m_v,m_w} [D^{-1}]^{m_u+1,m_v,m_w} \right\} \begin{bmatrix} J_{u,1}^{m_u+m_v,m_w} \\ J_{u,2}^{m_u+m_v,m_w} \end{bmatrix} = \\ & [AF]^{m_u,m_v,m_w} \begin{bmatrix} \varphi_1^{m_u,m_v,m_w} \\ \varphi_2^{m_u,m_v,m_w} \end{bmatrix} - [AF]^{m_u+1,m_v,m_w} \begin{bmatrix} \varphi_1^{m_u+1,m_v,m_w} \\ \varphi_2^{m_u+1,m_v,m_w} \end{bmatrix} + \\ & \left\{ -[R^{-1}]^{m_u,m_v,m_w} \begin{bmatrix} T_{u,1,R}^{m_u,m_v,m_w} \\ T_{u,2,R}^{m_u,m_v,m_w} \end{bmatrix} + [R^{-1}]^{m_u+1,m_v,m_w} \begin{bmatrix} T_{u,1,L}^{m_u+1,m_v,m_w} \\ T_{u,2,L}^{m_u+1,m_v,m_w} \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (24-8)$$

$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$

با استفاده از تعاریف (۲۵-۸)،

$$\left\{ \begin{aligned} [CJC]_u^{m_u, m_v, m_w} &= \left\{ \frac{h_u^{m_u, m_v, m_w}}{2} [AJ]^{m_u, m_v, m_w} [D^{-1}]^{m_u, m_v, m_w} + \frac{h_u^{m_u+1, m_v, m_w}}{2} [AJ]^{m_u+1, m_v, m_w} [D^{-1}]^{m_u+1, m_v, m_w} \right\} \\ [CJC]_L^{m_u, m_v, m_w} &= \left\{ \frac{h_u^{m_u, m_v, m_w}}{2} [AJ]^{m_u, m_v, m_w} [D^{-1}]^{m_u, m_v, m_w} + \frac{h_u^{m_u-1, m_v, m_w}}{2} [AJ]^{m_u-1, m_v, m_w} [D^{-1}]^{m_u-1, m_v, m_w} \right\} \end{aligned} \right. \quad (۲۵-۸)$$

$$[CJCN] = [CJC]^{-1}$$

$u, v, w = x, y, z; u \neq v \neq w$

روابط (۲۶-۸) حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases}
 \begin{bmatrix} J_{u,1}^{m_x+m_y, m_z} \\ J_{u,2}^{m_x+m_y, m_z} \end{bmatrix} = [CJCN]_{R}^{m_u, m_v, m_w} \left\{ \begin{aligned} & [AF]^{m_u, m_v, m_w} \begin{bmatrix} \phi_1^{m_u, m_v, m_w} \\ \phi_2^{m_u, m_v, m_w} \end{bmatrix} - [AF]^{m_u+1, m_v, m_w} \begin{bmatrix} \phi_1^{m_u+1, m_v, m_w} \\ \phi_2^{m_u+1, m_v, m_w} \end{bmatrix} + \\ & - [R^{-1}]^{m_u, m_v, m_w} \begin{bmatrix} T_{u,1,R}^{m_u, m_v, m_w} \\ T_{u,2,R}^{m_u, m_v, m_w} \end{bmatrix} + [R^{-1}]^{m_u+1, m_v, m_w} \begin{bmatrix} T_{u,1,L}^{m_u+1, m_v, m_w} \\ T_{u,2,L}^{m_u+1, m_v, m_w} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \\
 \begin{bmatrix} J_{u,1}^{m_u-m_v, m_w} \\ J_{u,2}^{m_u-m_v, m_w} \end{bmatrix} = [CJCN]_{L}^{m_u, m_v, m_w} \left\{ \begin{aligned} & [AF]^{m_u-1, m_v, m_w} \begin{bmatrix} \phi_1^{m_u-1, m_v, m_w} \\ \phi_2^{m_u-1, m_v, m_w} \end{bmatrix} - [AF]^{m_u, m_v, m_w} \begin{bmatrix} \phi_1^{m_u, m_v, m_w} \\ \phi_2^{m_u, m_v, m_w} \end{bmatrix} + \\ & - [R^{-1}]^{m_u-1, m_v, m_w} \begin{bmatrix} T_{u,1,R}^{m_u-1, m_v, m_w} \\ T_{u,2,R}^{m_u-1, m_v, m_w} \end{bmatrix} + [R^{-1}]^{m_u, m_v, m_w} \begin{bmatrix} T_{u,1,L}^{m_u, m_v, m_w} \\ T_{u,2,L}^{m_u, m_v, m_w} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}
 \end{cases} \quad (۲۶-۸)$$

$u, v, w = x, y, z; u \neq v \neq w$

برای نمایش جمله جریان در راستاهای مختلف از تعاریف (۲۷-۸) استفاده می‌شود:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{aligned} \text{CP}_{u,g,R,g'}^{m_u,m_v,m_w} &= [\text{CJCN}]_R^{m_u,m_v,m_w} [\text{AF}]^{m_u,m_v,m_w} \\ \text{CP}_{u,g,R,g',R}^{m_u,m_v,m_w} &= [\text{CJCN}]_R^{m_u,m_v,m_w} [\text{AF}]^{m_u+1,m_v,m_w} \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} \text{CP}_{u,g,L,g'}^{m_u,m_v,m_w} &= [\text{CJCN}]_L^{m_u,m_v,m_w} [\text{AF}]^{m_u,m_v,m_w} \\ \text{CP}_{u,g,L,g',L}^{m_u,m_v,m_w} &= [\text{CJCN}]_L^{m_u,m_v,m_w} [\text{AF}]^{m_u-1,m_v,m_w} \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (27-8)$$

$u, v, w = x, y, z; u \neq v \neq w; g, g' = 1, 2$

به کمک تعاریف فوق، جمله جریان به صورت روابط (28-8) و (29-8) نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{u,1}^{m_u+m_v,m_w} \\ \mathbf{J}_{u,2}^{m_u+m_v,m_w} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{aligned} &+ \begin{bmatrix} \text{CP}_{u,1,R,g1}^{m_u,m_v,m_w} & \text{CP}_{u,2,R,g1}^{m_u,m_v,m_w} \begin{bmatrix} \phi_1^{m_u,m_v,m_w} \\ \phi_2^{m_u,m_v,m_w} \end{bmatrix} \\ \text{CP}_{u,1,R,g2}^{m_u,m_v,m_w} & \text{CP}_{u,2,R,g2}^{m_u,m_v,m_w} \begin{bmatrix} \phi_1^{m_u+1,m_v,m_w} \\ \phi_2^{m_u+1,m_v,m_w} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} \text{CT}_{u,1,R,g1}^{m_u,m_v,m_w} & \text{CT}_{u,2,R,g1}^{m_u,m_v,m_w} \begin{bmatrix} \text{T}_{u,1,R}^{m_u,m_v,m_w} \\ \text{T}_{u,2,R}^{m_u,m_v,m_w} \end{bmatrix} \\ \text{CT}_{u,1,R,g2}^{m_u,m_v,m_w} & \text{CT}_{u,2,R,g2}^{m_u,m_v,m_w} \begin{bmatrix} \text{T}_{u,1,R,g1,R}^{m_u,m_v,m_w} \\ \text{T}_{u,2,R,g1,R}^{m_u,m_v,m_w} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{CT}_{u,1,R,g1,R}^{m_u,m_v,m_w} & \text{CT}_{u,2,R,g1,R}^{m_u,m_v,m_w} \begin{bmatrix} \text{T}_{u,1,L}^{m_u+1,m_v,m_w} \\ \text{T}_{u,2,L}^{m_u+1,m_v,m_w} \end{bmatrix} \\ \text{CT}_{u,1,R,g2,R}^{m_u,m_v,m_w} & \text{CT}_{u,2,R,g2,R}^{m_u,m_v,m_w} \begin{bmatrix} \text{T}_{u,1,L}^{m_u+1,m_v,m_w} \\ \text{T}_{u,2,L}^{m_u+1,m_v,m_w} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (28-8)$$

$u, v, w = x, y, z; u \neq v \neq w$

$$\begin{bmatrix} J_{u,1}^{m_u, -m_v, m_w} \\ J_{u,2}^{m_u, -m_v, m_w} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} - \left[\begin{array}{cc} CP_{u,1,L,g1}^{m_u, m_v, m_w} & CP_{u,2,L,g1}^{m_u, m_v, m_w} \\ CP_{u,1,L,g2}^{m_u, m_v, m_w} & CP_{u,2,L,g2}^{m_u, m_v, m_w} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \phi_1^{m_u, m_v, m_w} \\ \phi_2^{m_u, m_v, m_w} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{cc} CP_{u,1,L,g1,L}^{m_u, m_v, m_w} & CP_{u,2,L,g1,L}^{m_u, m_v, m_w} \\ CP_{u,1,L,g2,L}^{m_u, m_v, m_w} & CP_{u,2,L,g2,L}^{m_u, m_v, m_w} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \phi_1^{m_u-1, m_v, m_w} \\ \phi_2^{m_u-1, m_v, m_w} \end{bmatrix} \\ + \left[\begin{array}{cc} CT_{u,1,L,g1}^{m_u, m_v, m_w} & CT_{u,2,L,g1}^{m_u, m_v, m_w} \\ CT_{u,1,L,g2}^{m_u, m_v, m_w} & CT_{u,2,L,g2}^{m_u, m_v, m_w} \end{array} \right] \begin{bmatrix} T_{u,1,L}^{m_u, m_v, m_w} \\ T_{u,2,L}^{m_u, m_v, m_w} \end{bmatrix} - \left[\begin{array}{cc} CT_{u,1,L,g1,L}^{m_u, m_v, m_w} & CT_{u,2,L,g1,L}^{m_u, m_v, m_w} \\ CT_{u,1,L,g2,L}^{m_u, m_v, m_w} & CT_{u,2,L,g2,L}^{m_u, m_v, m_w} \end{array} \right] \begin{bmatrix} T_{u,1,R}^{m_u-1, m_v, m_w} \\ T_{u,2,R}^{m_u-1, m_v, m_w} \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (29-8)$$

$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$

روابط فوق برای نودهای غیر مرزی قابل استفاده می‌باشد. روابط قابل استفاده برای نودهای مرزی در بخش ۷-۱-۱-۱ ارائه شده است.

با جایگذاری جملات جریان در روابط (۸-۳)، دستگاه معادلات خطی (۸-۳۰) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} [A_1] \{ \psi_1 \} &= \frac{1}{k_{eff}} \{ [F_1] \{ \psi_1 \} + [F_1] \{ \psi_1 \} \} - \{ [A_2] \{ \psi_2 \} + \{ C_1 \} \} \\ [B_2] \{ \psi_2 \} &= - \{ [B_1] \{ \psi_1 \} + \{ C_2 \} \} \end{aligned} \quad (30-8)$$

ماتریس‌های A و C به ترتیب ناشی از اتلاف نوترون و فرار عرضی می‌باشند که باید در هر مرحله (تکرار) به‌روزرسانی شوند. همچنین، ماتریس F ناشی از تولید نوترون می‌باشد.

۸-۱-۲- محاسبه فرار عرضی

نحوه محاسبه فرار عرضی در محیط تکثیرپذیر مشابه محیط غیرتکثیرپذیر است. تنها اختلاف بین آنها در بیان جمله چشمه می‌باشد که به صورت رابطه (۸-۳۱) نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \ell_{v,w,1}^{m_u, m_v, m_w}(u) \\ \ell_{v,w,2}^{m_u, m_v, m_w}(u) \end{bmatrix} = RD^{-1} \left(- \begin{bmatrix} L_{v,1}^{m_u, m_v, m_w}(u) \\ L_{v,2}^{m_u, m_v, m_w}(u) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_{w,1}^{m_u, m_v, m_w}(u) \\ L_{w,2}^{m_u, m_v, m_w}(u) \end{bmatrix} \right) \quad (۸-۳۱)$$

$$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$$

۸-۲- الگوریتم حل

روند حل معادله پخش نوترون به صورت زیر می باشد.

۱. خواندن مقادیر ورودی برنامه شامل:

۱.۱. ابعاد حجم سه بعدی (بر حسب سانتیمتر L_x, L_y, L_z)

۱.۲. تعداد مش‌ها در هر راستا (نقاطی که شار نوترونی در آنها محاسبه می شود N_x, N_y, N_z).

۱.۳. ضریب پخش گروهی (D).

۱.۴. سطح مقطع گروهی ماکروسکوپی جذب پرتوزا ($\Sigma_{capture}$).

۱.۵. سطح مقطع گروهی ماکروسکوپی شکافت ($\Sigma_{fission}$).

۱.۶. سطح مقطع ماکروسکوپی پراکندگی بین گروه‌های انرژی ($\Sigma_{s,g \rightarrow g'}$).

- ۱.۷. نوترون‌های آزاد شده در هر شکافت در دو گروه انرژی (۷).
- ۱.۸. شرایط مرزی سمت چپ و راست در هر راستا (λ_L و λ_R).
- ۱.۹. معیار همگرایی شار (ϵ_{phi}).
- ۱.۱۰. معیار همگرایی ضریب تکثیر مؤثر ($\epsilon_{\text{k_{eff}}}$).
- ۱.۱۱. حدس اولیه برای شارهای گروهی
- ۱.۱۲. حدس اولیه برای ضریب تکثیر مؤثر
۲. تعیین عناصر ماتریس F در رابطه (۸-۳۰).
۳. تعیین عناصر ماتریس‌های A و B در رابطه (۸-۳۰) با استفاده از پاسخ مرحله (تکرار) قبلی.
۴. تعیین جملات فرار عرضی و عناصر ماتریس C در هر راستا با استفاده از پاسخ مرحله (تکرار) قبلی.
۵. حل سیستم‌های خطی (۸-۳۰).

۶. استفاده از شارهای جدید در محاسبه عناصر ماتریس های A و B و C.

۷. مراحل ۳ تا ۶ تا ارضای شروط همگرایی ادامه یابد.

۹- حل معادله الحاقی پخش نوترون

معادله الحاقی تراز نوترون دو گروهی برای نودهای مختلف در حجم سه بعدی، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{h_x^{m_x, m_y, m_z}} [\hat{j}_{x,1}^{m_x+, m_y, m_z} - \hat{j}_{x,1}^{m_x-, m_y, m_z}] - \frac{1}{h_y^{m_x, m_y, m_z}} [\hat{j}_{y,1}^{m_x, m_y+, m_z} - \hat{j}_{y,1}^{m_x, m_y-, m_z}] - \frac{1}{h_z^{m_x, m_y, m_z}} [\hat{j}_{z,1}^{m_x, m_y, m_z+} - \hat{j}_{z,1}^{m_x, m_y, m_z-}] \\ + \sum_{r,1}^{m_x, m_y, m_z} \hat{\phi}_1^{m_x, m_y, m_z} - \sum_{s,12}^{m_x, m_y, m_z} \hat{\phi}_2^{m_x, m_y, m_z} = \frac{1}{k_{eff}} (v \sum_{f,1}^{m_x, m_y, m_z} \hat{\phi}_1^{m_x, m_y, m_z}) \\ -\frac{1}{h_x^{m_x, m_y, m_z}} [\hat{j}_{x,2}^{m_x+, m_y, m_z} - \hat{j}_{x,2}^{m_x-, m_y, m_z}] - \frac{1}{h_y^{m_x, m_y, m_z}} [\hat{j}_{y,2}^{m_x, m_y+, m_z} - \hat{j}_{y,2}^{m_x, m_y-, m_z}] - \frac{1}{h_z^{m_x, m_y, m_z}} [\hat{j}_{z,2}^{m_x, m_y, m_z+} - \hat{j}_{z,2}^{m_x, m_y, m_z-}] \\ + \sum_{r,2}^{m_x, m_y, m_z} \hat{\phi}_2^{m_x, m_y, m_z} - \sum_{s,21}^{m_x, m_y, m_z} \hat{\phi}_1^{m_x, m_y, m_z} = \frac{1}{k_{eff}} (v \sum_{f,2}^{m_x, m_y, m_z} \hat{\phi}_1^{m_x, m_y, m_z}) \end{array} \right. \quad (9-1)$$

معادله دیفرانسیل الحاقی پخش نوترون در دو گروه انرژی برای یک نود همگن به صورت (۹-۲) نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} -D_1 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1(x, y, z)}{\partial x^2} - D_1 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1(x, y, z)}{\partial y^2} - D_1 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1(x, y, z)}{\partial z^2} + \Sigma_{r,1} \hat{\phi}_1(x, y, z) - \Sigma_{s,12} \hat{\phi}_2(x, y, z) = \frac{1}{k_{\text{eff}}} (v \Sigma_{f,1} \hat{\phi}_1(x, y, z)) & (۲-۹) \\ -D_2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_2(x, y, z)}{\partial x^2} - D_2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_2(x, y, z)}{\partial y^2} - D_2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_2(x, y, z)}{\partial z^2} + \Sigma_{r,2} \hat{\phi}_2(x, y, z) - \Sigma_{s,21} \hat{\phi}_1(x, y, z) = \frac{1}{k_{\text{eff}}} (v \Sigma_{f,1} \hat{\phi}_2(x, y, z)) \end{cases}$$

با انتگرالگیری از معادلات (۲-۹)، در جهت های y و z ، در جهت های x و همچنین در جهت های x و y ، معادلات (۳-۹)، به طور مجزا در هر راستا، بدست می آیند:

$$\begin{cases} -D_1 \frac{d^2 \hat{\phi}_{u,1}(u)}{du^2} - \frac{1}{h_{v, m_u, m_v, m_w}} [\hat{J}_{v,1}^{m_u, m_v, m_w} (u) - \hat{J}_{v,1}^{m_u, m_v, -m_w} (u)] - \frac{1}{h_{w, m_u, m_v, m_w}} [\hat{J}_{w,1}^{m_u, m_v, m_w} (u) - \hat{J}_{w,1}^{m_u, m_v, m_w} (u)] \\ + \Sigma_{r,1} \hat{\phi}_{u,1}(u) - \Sigma_{s,12} \hat{\phi}_{u,2}(u) - \frac{1}{k_{\text{eff}}} (v \Sigma_{f,1} \hat{\phi}_{u,1}(u)) = 0 & (۳-۹) \\ -D_2 \frac{d^2 \hat{\phi}_{u,2}(u)}{du^2} - \frac{1}{h_{w, m_u, m_v, m_w}} [\hat{J}_{v,2}^{m_u, m_v, m_w} (u) - \hat{J}_{v,2}^{m_u, m_v, -m_w} (u)] - \frac{1}{h_{w, m_u, m_v, m_w}} [\hat{J}_{w,2}^{m_u, m_v, m_w} (u) - \hat{J}_{w,2}^{m_u, m_v, m_w} (u)] \\ + \Sigma_{r,2} \hat{\phi}_{u,2}(u) - \Sigma_{s,21} \hat{\phi}_{u,1}(u) - \frac{1}{k_{\text{eff}}} (v \Sigma_{f,2} \hat{\phi}_{u,2}(u)) = 0 \end{cases}$$

$$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$$

با تعریف فرار عرضی به صورت رابطه (۹-۴)،

$$\hat{L}_{u,1}^{m_u, m_v, m_w}(v) = \frac{1}{h_{u,1}^{m_u, m_v, m_w}} \left[\hat{J}_{u,g}^{m_u, +, m_v, m_w}(v) - \hat{J}_{u,g}^{m_u, -, m_v, m_w}(v) \right] \quad (۹-۴)$$

$$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w; \quad g = 1, 2$$

معادلات (۹-۵) حاصل می‌شوند:

$$\begin{cases} -D_1 \frac{d^2 \hat{\phi}_{u,1}(u)}{du^2} + \left(\Sigma_{r,1} - \frac{v \Sigma_{f,1}}{k_{\text{eff}}} \right) \hat{\phi}_{u,1}(u) - \Sigma_{s,12} \hat{\phi}_{u,2}(u) = + [\hat{L}_{v,1}(u) + \hat{L}_{w,1}(u)] \\ -D_2 \frac{d^2 \hat{\phi}_{u,2}(u)}{du^2} + \left(\Sigma_{r,2} - \frac{v \Sigma_{f,2}}{k_{\text{eff}}} \right) \hat{\phi}_{u,2}(u) - \Sigma_{s,21} \hat{\phi}_{u,1}(u) = + [L_{v,2}(u) + L_{w,2}(u)] \end{cases} \quad (۹-۵)$$

$$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$$

در ادامه، معادلات فوق برای هر یک از راستاهای x ، y و z ، به طور جداگانه حل می‌شوند. شکل ماتریسی معادلات فوق به

صورت (۹-۶) می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 \hat{\phi}_{u,1}(u)}{du^2} \\ \frac{d^2 \hat{\phi}_{u,2}(u)}{du^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\Sigma_{r,1} - \nu \Sigma_{f,1}}{D_1} & -\frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_1} \\ -\frac{\Sigma_{s,2 \rightarrow 1}}{D_2} & \frac{\Sigma_{r,2} - \nu \Sigma_{f,2}}{D_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{u,1}(u) \\ \hat{\phi}_{u,2}(u) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\hat{L}_{v,1}(u) + \hat{L}_{w,1}(u)}{D_1} \\ \frac{\hat{L}_{v,2}(u) + \hat{L}_{w,2}(u)}{D_2} \end{bmatrix} \quad (6-9)$$

$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$

با استفاده از تعاریف (7-9) و (8-9)،

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\Sigma_{r,1}}{D_1} & -\frac{\Sigma_{s,2 \rightarrow 1}}{D_1} \\ -\frac{\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}}{D_2} & \frac{\Sigma_{r,2}}{D_2} \end{bmatrix} \quad (7-9)$$

$$|\hat{\phi}_u(u)\rangle = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_{u,1}(u) \\ \hat{\phi}_{u,2}(u) \end{bmatrix}; \quad |\hat{L}_v(u)\rangle = \begin{bmatrix} \hat{L}_{v,1}(u) \\ \hat{L}_{v,2}(u) \end{bmatrix}; \quad |\hat{L}_w(x)\rangle = \begin{bmatrix} \hat{L}_{w,1}(u) \\ \hat{L}_{w,2}(u) \end{bmatrix} \quad (8-9)$$

$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$

معادله (۹-۹) بدست خواهند آمد:

$$\frac{d^2}{du^2} |\hat{\phi}_u(u)\rangle - A |\hat{\phi}_u(u)\rangle = -D^{-1} \left(|\hat{L}_v(u)\rangle + |\hat{L}_w(u)\rangle \right) \quad (9-9)$$

$u, v, w = x, y, z; \quad u \neq v \neq w$

در ادامه، روابطی که در بخش های ۸-۱-۱ و ۸-۱-۲ ارائه شده‌اند، برای حل معادلات الحاقی پخش نوترون دو گروهی قابل استفاده می‌باشد. در ضمن، الگوریتم حل این معادلات با الگوریتم ذکر شده در بخش ۸-۲ یکسان است.

۱۰- راستی آزمایی نتایج

در این فصل سعی می‌شود تا در جهت تأیید صحت روش مورد مطالعه بر اساس الگوریتم‌های ذکر شده در فصل‌های قبلی، تعدادی مسائل آزمون حل شوند و نتایج حاصل از کد توسعه داده شده، که ANOMOS نامگذاری شده، با نتایج سایر کدها از قبیل CITATION، PARCS و ... مقایسه شوند.

۱۰-۱- مسئله ۱

یک صفحه مربعی به طول ضلع ۲ سانتیمتر که محتوی ماده با مشخصات جدول شماره ۱ است، دربرگیرنده چشمه نوترونی به قدرت واحد می‌باشد. شرایط مرزی در کلیه جهات، شار صفر می‌باشد.

جدول شماره ۱: مشخصات مسئله ۱

پارامتر	مقدار
$\Sigma_{tot}(cm^{-1})$	۰/۳۳۳۳
$\Sigma_a(cm^{-1})$	۰/۰۰۰۰
$\Sigma_s(cm^{-1})$	۰/۳۳۳۳

با توجه به مقادیر سطح مقطع‌ها در جدول فوق، می‌توان نتیجه گرفت که محیط موردنظر پراکننده خالص است. همچنین از آنجایی که محیط همگن است، بیشترین خطای محاسبه‌ای مربوط به نقاط مستقر در گوشه‌های محیط می‌باشد. در ادامه مقادیر شار یک گروهی محاسبه شده با کدهای CITATION و ANOMOS برای نود مستقر در گوشه محیط در طول مش‌های مختلف در جدول شماره ۲ ارائه شده است.

جدول شماره ۲: مقادیر شار در گوشه هندسه مسئله ۱

CITATION	ANOMOS (Flat App.)	ANOMOS (Quad. App.)	طول مش (cm×cm)	تعداد مش ($N_x \times N_y$)
۰/۱۴۰۹۱	۰/۱۴۰۶۵	۰/۱۴۰۵۷	۰/۰۵×۰/۰۵	۴۰×۴۰
۰/۱۴۱۹۲	۰/۱۴۰۸۸	۰/۱۴۰۵۷	۰/۱۰×۰/۱۰	۲۰×۲۰
۰/۱۴۵۹۱	۰/۱۴۱۸۰	۰/۱۴۰۵۲	۰/۲۰×۰/۲۰	۱۰×۱۰
۰/۱۷۱۸۴	۰/۱۴۷۹۲	۰/۱۳۹۵۲	۰/۵۰×۰/۵۰	۴×۴
۰/۲۵۰۰۰	۰/۱۶۶۶۷	۰/۱۳۳۳۳	۱/۰۰×۱/۰۰	۲×۲

برای مقایسه خطای محاسبه شده، نتیجه حاصل از کد CITATION در طول مش ۰/۰۱ سانتیمتر به عنوان مقدار مرجع در نظر گرفته شده است. در جدول شماره ۳، درصد خطای نسبی نتایج فوق بر حسب طول مش‌های مختلف ارائه شده است.

جدول شماره ۳: حداکثر درصد خطای نسبی در محاسبه شار مسئله ۱

CITATION	ANOMOS (Flat App.)	ANOMOS (Quad. App.)	طول مش (cm×cm)	تعداد مش ($N_x \times N_y$)
۰/۲۲۷۶۰	۰/۰۴۲۶۸	-۰/۰۱۴۲۲	۰/۰۵×۰/۰۵	۴۰×۴۰
۰/۹۴۶۰۰	۰/۲۰۶۳۰	-۰/۰۱۴۲۲	۰/۱۰×۰/۱۰	۲۰×۲۰
۳/۷۸۴۰۰	۰/۸۶۰۶۰	-۰/۰۴۹۷۹	۰/۲۰×۰/۲۰	۱۰×۱۰
۲۲/۲۲۸۰	۵/۲۱۴۰۰	-۰/۷۶۱۱۰	۰/۵۰×۰/۵۰	۴×۴
۷۷/۸۲۲۰	۱۸/۵۰۱۰	-۵/۱۶۴۰۰	۱/۰۰×۱/۰۰	۲×۲

۱۰-۲- مسئله ۲

یک صفحه مربعی با طول ضلع ۶۰ سانتیمتر و با مشخصات جدول شماره ۴ که دربرگیرنده چشمه نوترونی به قدرت واحد می‌باشد، در نظر بگیرید. شرایط مرزی در همه جهات، شار صفر می‌باشد.

جدول شماره ۴: مشخصات مسئله ۲

مقدار	پارامتر
۱/۳۶۴۸	$D_1(cm)$
۰/۴۸۲۶	$D_2(cm)$
۰/۰۲۶۱۳۲	$\Sigma_{a,1}(cm^{-1})$
۰/۱۳۰۷۷۲	$\Sigma_{a,2}(cm^{-1})$
۰/۰۱۷۲۴۵	$\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}(cm^{-1})$
۰/۰۰۰۰۰۰	$\Sigma_{s,2 \rightarrow 1}(cm^{-1})$

مقادیر شار گروهی در گوشه محیط و نیز حداکثر درصد خطای نسبی در محاسبه شار در مقایسه با مقادیر مرجع (پاسخ کد CITATION با طول مش ۰/۶۶۶۶۷ سانتیمتر) در جدول‌های شماره ۵ تا ۸ ارائه شده است.

جدول شماره ۵: مقادیر شار گروه اول در گوشه هندسه مسئله ۲

CITATION	ANOMOS (Flat App.)	ANOMOS (Quad. App.)	طول مش (cm×cm)	تعداد مش ($N_x \times N_y$)
۱۲/۶۴۱۴۰	۱۲/۶۰۱۹۵	۱۲/۵۹۹۲۲	۱/۰×۱/۰	۶۰×۶۰
۱۲/۷۶۳۹۲	۱۲/۶۰۹۷۴	۱۲/۵۹۸۵۲	۲/۰×۲/۰	۳۰×۳۰
۱۲/۴۹۹۳۱	۱۲/۶۵۸۹۳	۱۲/۵۸۸۶۵	۵/۰۰×۵/۰۰	۱۲×۱۲
۱۲/۶۰۴۱۶	۱۲/۷۸۶۸۳	۱۲/۵۱۸۶۴	۱۰/۰×۱۰/۰	۶×۶
۱۲/۷۸۰۰۰	۱۲/۹۱۴۱۲	۱۲/۴۴۴۷۷	۲۰/۰×۲۰/۰	۳×۳

جدول شماره ۶: مقادیر شار گروه دوم در گوشه هندسه مسئله ۲

CITATION	ANOMOS (Flat App.)	ANOMOS (Quad. App.)	طول مش (cm×cm)	تعداد مش ($N_x \times N_y$)
۱/۵۵۵۰۹	۱/۵۵۱۴۹	۱/۵۵۱۱۴	۱/۰×۱/۰	۶۰×۶۰
۱/۵۶۷۶۴	۱/۵۵۲۵۲	۱/۵۵۱۰۸	۲/۰×۲/۰	۳۰×۳۰
۱/۶۵۷۶۸	۱/۵۵۹۲۰	۱/۵۴۹۶۱	۵/۰۰×۵/۰۰	۱۲×۱۲
۱/۸۸۹۲۵	۱/۵۷۷۶۷	۱/۵۴۰۶۵	۱۰/۰×۱۰/۰	۶×۶
۲/۲۶۶۰۰	۱/۵۹۶۴۱	۱/۵۲۹۳۹	۲۰/۰×۲۰/۰	۳×۳

جدول شماره ۷: حداکثر درصد خطای نسبی در محاسبه شار گروه اول مسئله ۲

CITATION	ANOMOS (Flat App.)	ANOMOS (Quad. App.)	طول مش (cm×cm)	تعداد مش ($N_x \times N_y$)
۰/۲۹۵	-۰/۰۱۸	-۰/۰۳۹	۱/۰×۱/۰	۶۰×۶۰
۱/۲۶۸	۰/۰۴۴	-۰/۰۴۵	۲/۰×۲/۰	۳۰×۳۰
۷/۱۰۲	۰/۴۳۴	-۰/۱۴۷	۵/۰۰×۵/۰۰	۱۲×۱۲
۲۰/۳۵۷	۱/۴۴۹	-۰/۶۷۸	۱۰/۰×۱۰/۰	۶×۶
۴۱/۰۶۴	۲/۴۵۹	-۱/۲۶۴	۲۰/۰×۲۰/۰	۳×۳

جدول شماره ۸: حداکثر درصد خطای نسبی در محاسبه شار گروه دوم مسئله ۲

CITATION	ANOMOS (Flat App.)	ANOMOS (Quad. App.)	طول مش (cm×cm)	تعداد مش ($N_x \times N_y$)
۰/۲۲۶	-۰/۰۰۶	-۰/۰۲۸	۱/۰×۱/۰	۶۰×۶۰
۱/۰۳۵	۰/۰۶۰	-۰/۰۳۲	۲/۰×۲/۰	۳۰×۳۰
۶/۸۳۸	۰/۴۹۱	-۰/۱۲۷	۵/۰۰×۵/۰۰	۱۲×۱۲
۲۱/۷۶۳	۱/۶۸۲	-۰/۷۰۴	۱۰/۰×۱۰/۰	۶×۶
۴۶/۰۴۵	۲/۸۸۹	-۱/۴۳۰	۲۰/۰×۲۰/۰	۳×۳

۱۰-۳- مسئله ۳

یک راکتور دو بعدی از نوع آب سبک (BIBLIS) با هندسه نشان داده شده در شکل ۱ در نظر بگیرید.

BA = Black Absorber

23.1226 cm	3	3	3	3	3	BA	BA	BA	BA
23.1226 cm	4	4	4	4	3	3	3	BA	BA
23.1226 cm	1	1	1	8	4	4	3	3	BA
23.1226 cm	7	1	7	1	5	4	4	3	BA
23.1226 cm	1	8	2	8	2	5	4	3	3
23.1226 cm	6	2	8	2	8	1	8	4	3
23.1226 cm	2	8	1	8	2	7	1	4	3
23.1226 cm	8	1	8	2	8	1	1	4	3
11.5613 cm	1	8	2	6	1	7	1	4	3
	11.5613 cm	23.1226 cm	23.1226 cm	23.1226 cm	23.1226 cm	23.1226 cm	23.1226 cm	23.1226 cm	23.1226 cm

شکل ۱: قلب راکتور مسئله ۳

سطح مقطع‌های دو گروهی مربوطه در جدول‌های شماره ۹ و ۱۰ آمده است.

جدول شماره ۹: مشخصات قلب راکتور و بازتابنده مسئله ۳

ماده ۴	ماده ۳	ماده ۲	ماده ۱	پارامتر
۱/۴۳۸۹	۱/۳۲۰۰	۱/۴۳۶۰	۱/۴۳۶۰	$D_1 (cm)$
۰/۳۶۳۷۶	۰/۲۷۷۱۷	۰/۳/۳۶۳۵	۰/۳۶۳۵۳	$D_2 (cm)$
۰/۰۱۰۳۶۳۰	۰/۰۰۲۶۵۶۲	۰/۰۰۹۶۷۸۵	۰/۰۰۹۵۰۴۲	$\Sigma_{a,1} (cm^{-1})$
۰/۰۹۱۴۰۸۰	۰/۰۷۱۵۹۶۰	۰/۰۷۸۴۳۶۰	۰/۰۷۵۰۵۸۰	$\Sigma_{a,2} (cm^{-1})$
۰/۰۰۷۴۵۲۷	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۶۱۹۰۸	۰/۰۰۵۸۷۰۸	$v\Sigma_{r,1} (cm^{-1})$
۰/۱۳۲۳۶۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۱۰۳۵۸۰۰	۰/۰۹۶۰۶۷۰	$v\Sigma_{r,2} (cm^{-1})$
۰/۰۱۷۱۰۱	۰/۰۲۳۱۰۶	۰/۰۱۷۶۲۱	۰/۰۱۷۷۵۴	$\Sigma_{s,1 \rightarrow 2} (cm^{-1})$
۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	$\Sigma_{s,2 \rightarrow 1} (cm^{-1})$

جدول شماره ۱۰: مشخصات قلب راکتور و بازتابنده مسئله ۳

ماده ۸	ماده ۷	ماده ۶	ماده ۵	پارامتر
۱/۴۳۹۳	۱/۴۳۸۹	۱/۴۳۸۵	۱/۴۳۸۱	$D_1 (cm)$
۰/۳۶۷۹۸	۰/۳۶۷۹۳	۰/۳۶۶۵۳	۰/۳۶۶۵۳	$D_2 (cm)$
۰/۰۱۰۲۹۴۰	۰/۰۱۰۱۶۵۰	۰/۰۱۰۱۳۲۰	۰/۰۱۰۰۰۳۰	$\Sigma_{a,1} (cm^{-1})$
۰/۰۹۰۵۱۰۰	۰/۰۸۸۰۲۴۰	۰/۰۸۷۳۱۴۰	۰/۰۸۴۸۲۸۰	$\Sigma_{a,2} (cm^{-1})$
۰/۰۰۶۴۲۸۵	۰/۰۰۶۱۹۰۸	۰/۰۰۶۴۲۸۵	۰/۰۰۶۱۹۰۸	$v\Sigma_{r,1} (cm^{-1})$
۰/۱۰۹۱۱۰۰	۰/۱۰۳۵۸۰۰	۰/۱۰۹۱۱۰۰	۰/۱۰۳۵۸۰۰	$v\Sigma_{r,2} (cm^{-1})$
۰/۰۱۷۰۲۷	۰/۰۱۷۱۲۵	۰/۰۱۷۱۹۲	۰/۰۱۷۲۹۰	$\Sigma_{s,1 \rightarrow 2} (cm^{-1})$
۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	$\Sigma_{s,2 \rightarrow 1} (cm^{-1})$

در شکل ۲، توزیع قدرت مرجع و محاسبه شده با کد ANOMOS در طول مش ۲۳ سانتیمتر ارائه شده است.

1.090	1.101	1.242	1.220	1.088	0.9812	1.094	1.013
1.082	1.089	1.234	1.210	1.084	0.9766	1.092	1.012
1.039	1.048	1.202	1.178	1.059	0.9605	1.091	1.020
	1.117	1.133	1.223	1.067	1.032	1.071	0.9694
	1.109	1.123	1.217	1.060	1.030	1.070	0.9691
	1.073	1.089	1.189	1.036	1.018	1.071	0.9776
		1.122	1.104	1.120	0.9232	0.9308	0.8240
		1.116	1.097	1.119	0.9210	0.9340	0.8289
		1.086	1.073	1.108	0.9110	0.9359	0.8482
			1.161	1.039	0.9509	0.7653	0.5459
			1.160	1.038	0.9553	0.7704	0.5527
			1.150	1.036	0.9622	0.7797	0.5704
.....	Reference			1.124	0.9942		0.8765
.....	ANOMOS (Quad.)			1.129	1.0036		0.8900
.....	ANOMOS(Flat)			1.148	1.0388		0.9438
					1.202		0.6863
					1.224		0.6914
					1.310		0.7464

شکل ۲: توزیع قدرت شعاعی (طول مش ۲۳ سانتیمتر)

در شکل ۳، درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت با کد ANOMOS ارائه شده است.

-0.734	-1.090	-0.644	-0.820	-0.368	-0.469	-0.183	-0.099
-4.679	-4.814	-3.221	-3.443	-2.665	-2.110	-0.274	+0.691
	-0.716	-0.883	-0.491	-0.656	-0.194	-0.093	-0.031
	-3.939	-3.884	-2.780	-2.906	-1.357	+0.000	+0.846
		-0.535	-0.634	-0.089	-0.238	+0.344	+0.595
		-3.209	-2.808	-1.071	-1.322	+0.548	+2.937
			-0.086	-0.096	+0.463	+0.666	+1.246
			-0.948	-0.289	+1.188	+1.882	+4.488
.....	ANOMOS (Quad.)			+0.445	+0.946	+1.540	
.....	ANOMOS (Flat)			+2.135	+4.486	+7.678	
					+1.830	+0.743	
					+8.985	+8.757	

شکل ۳: توزیع درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت شعاعی (طول مش ۲۳ سانتیمتر)

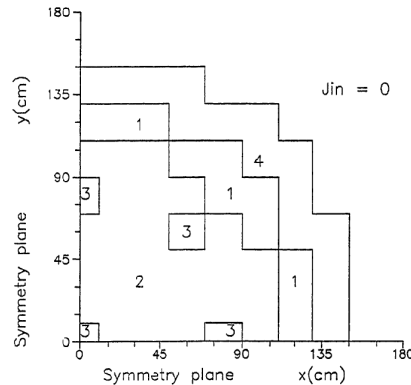
در جدول شماره ۱۱، نتایج کدهای مختلف در محاسبه پارامترهای نوترونی (ضریب تکثیر مؤثر، توزیع قدرت) با طول مش ۲۳ سانتیمتر، ارائه و مقایسه شده‌اند.

جدول شماره ۱۱: مقایسه نتایج کدهای مختلف در محاسبه پارامترهای نوترونی مسئله ۳

ε_{\max} %	ε_{ave} %	err. (pcm)	مرجع	k_{eff}	نام کد (روش)
۱/۹۱	۰/۵۶	۱۸	۱/۰۲۵۱۲	۱/۰۲۵۳۱	QUANDRY (ANM – Quad.)
۱/۸۳	۰/۴۲	۱۹		۱/۰۲۵۳۰	ANOMOS (ANM – Quad.)
۸/۹۸	۲/۱۰	۷۲		۱/۰۲۵۸۴	ANOMOS (ANM – Flat)

۴-۱۰- مسئله ۴

یک راکتور دو بعدی از نوع آب سبک با هندسه نشان داده شده در شکل ۴ را در نظر بگیرید. سطح مقطع‌های دو گروهی مربوطه، در جدول شماره ۱۲ آمده است.



شکل ۴: قلب راکتور مسئله ۴

جدول شماره ۱۲: مشخصات قلب راکتور و بازتابنده مسئله ۴

پارامتر	ماده ۱	ماده ۲	ماده ۳	ماده ۴
$D_1 (cm)$	۱/۵	۱/۵	۱/۵	۲/۰
$D_2 (cm)$	۰/۴	۰/۴	۰/۴	۰/۳
$\Sigma_{a,1} (cm^{-1})$	۰/۰۱۰۱۲۰	۰/۰۱۰۱۲۰	۰/۰۱۰۱۲۰	۰/۰۰۰۱۶۰
$\Sigma_{a,2} (cm^{-1})$	۰/۰۸۰۰۳۲	۰/۰۸۵۰۳۲	۰/۱۳۰۰۳۲	۰/۰۱۰۰۲۴
$v\Sigma_{f,1} (cm^{-1})$	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
$v\Sigma_{f,2} (cm^{-1})$	۰/۱۳۵	۰/۱۳۵	۰/۱۳۵	۰/۰۰۰
$\Sigma_{s,1 \rightarrow 2} (cm^{-1})$	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۴
$\Sigma_{s,2 \rightarrow 1} (cm^{-1})$	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰

در شکل ۵، توزیع قدرت مرجع و محاسبه شده با کدهای ANOMOS و PARCS با طول مش ۲۰ سانتیمتر ارائه شده است.

0.9062	1.5697	1.6748	1.3113	0.5896	0.7765	0.6915
0.9048	1.5738	1.6795	1.3124	0.5877	0.7759	0.6849
0.9030	1.5708	1.6767	1.3107	0.5878	0.7785	0.6919
0.8791	1.5659	1.6870	1.3156	0.5749	0.7781	0.7004
	1.6874	1.6489	1.3559	0.9989	0.8448	0.6753
	1.6885	1.6512	1.3576	0.9993	0.8403	0.6705
	1.6854	1.6484	1.3560	0.9993	0.8426	0.6765
	1.6724	1.6375	1.3564	0.9977	0.8380	0.6784
		1.4722	1.1582	1.0096	0.8339	0.6321
		1.4718	1.1601	1.0088	0.8315	0.6300
		1.4695	1.1587	1.0085	0.8328	0.6332
		1.4513	1.1535	1.0125	0.8344	0.6333
			0.5746	0.8305	0.8116	
			0.5734	0.8333	0.8136	
			0.5727	0.8324	0.8134	
			0.5611	0.8430	0.8383	
.....	Reference			0.7993	0.6386	
.....	PARCS (Quad.)			0.8003	0.6416	
.....	ANOMOS (Quad.)			0.7990	0.6388	
.....	ANOMOS(Flat)			0.8139	0.6419	

شکل ۵: توزیع قدرت شعاعی (طول مش ۲۰ سانتیمتر)

در شکل ۶، توزیع درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت با کدهای ANOMOS و PARCS با طول مش ۲۰ سانتیمتر ارائه شده است.

-0.154	+0.261	+0.281	+0.084	-0.322	-0.077	-0.954
-0.353	+0.070	+0.113	-0.046	-0.305	+0.258	+0.058
-2.990	-0.242	+0.728	+0.328	-2.493	+0.206	+1.287
	+0.065	+0.140	+0.125	+0.040	-0.533	-0.711
	-0.118	-0.030	+0.007	+0.040	-0.260	+0.178
	-0.889	-0.691	+0.037	-0.120	-0.805	+0.459
		-0.027	+0.164	-0.079	-0.288	-0.332
		-0.183	+0.043	-0.109	-0.132	+0.174
		-1.420	-0.406	+0.287	+0.060	+0.190
			-0.209	+0.337	+0.246	
			-0.331	+0.229	+0.222	
			-2.350	+1.505	+3.290	
				+0.125	+0.470	
				-0.038	+0.031	
				+1.827	+0.517	

..... PARCS (Quad.)
 ANOMOS (Quad.)
 ANOMOS (Flat)

شکل ۶: توزیع درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت شعاعی (طول مش ۲۰ سانتیمتر)

در جدول شماره ۱۳، نتایج کدهای مختلف در محاسبه پارامترهای نوترونی (ضریب تکثیر مؤثر، توزیع قدرت) با طول مش ۲۰ سانتیمتر، ارائه و مقایسه شده‌اند.

جدول شماره ۱۳: مقایسه نتایج کدهای مختلف در محاسبه پارامترهای نوترونی مسئله ۴

نام کد (روش)	k_{eff}	مرجع	err. (pcm)	ϵ_{ave} %	ϵ_{max} %
PARCS (ANM – Quad.)	۱/۰۱۸۵۱	-	-	۰/۲۶	۰/۹۵
ANOMOS (ANM – Quad.)	۱/۰۱۸۵۵		-	۰/۱۴	۰/۳۵
ANOMOS (ANM – Flat)	۱/۰۱۹۱۴		-	۱/۰۰	۳/۲۹
PARCS (FDM)	۱/۰۲۳۱۶		-	۸/۶۲	۲۳/۰۸

۱۰-۵- مسئله ۵

یک مکعب با طول ضلع ۳ سانتیمتر که محتوی ماده با مشخصات جدول شماره ۱۴ است، دربرگیرنده چشمه یکنواخت نوترون به قدرت واحد می‌باشد. شرایط مرزی در تمام راستاها، شار صفر می‌باشد.

جدول شماره ۱۴: مشخصات مسئله ۵

پارامتر	مقدار
$\Sigma_{tot} (cm^{-1})$	۰/۳۳۳۳
$\Sigma_a (cm^{-1})$	۰/۳۳۳۳
$\Sigma_s (cm^{-1})$	۰/۰۰۰۰

مقدار شار نوترونی نود مستقر در گوشه مکعب با استفاده از کدهای CITATION و ANOMOS در طول مش‌های مختلف در جدول شماره ۱۵ ارائه شده است:

جدول شماره ۱۵: مقادیر شار نوترونی در گوشه هندسه مسئله ۵

CITATION	ANOMOS (Flat App.)	ANOMOS (Quad. App.)	طول مش (cm×cm×cm)	تعداد مش ($N_x \times N_y \times N_z$)
۰/۱۲۴۲۸۲	۰/۱۲۴۷۵۹	۰/۱۲۳۸۲۴	۰/۱۷×۰/۱۷×۰/۱۷	۱۸×۱۸×۱۸
۰/۱۲۹۰۶۶	۰/۱۲۵۱۴۴	۰/۱۲۳۷۸۸	۰/۲×۰/۲×۰/۲	۱۵×۱۵×۱۵
۰/۱۵۳۴۴۴	۰/۱۳۱۲۹۵	۰/۱۲۲۴۷۶	۰/۵×۰/۵×۰/۵	۶×۶×۶
۰/۲۲۳۲۵۱	۰/۱۴۶۸۲۵	۰/۱۱۶۶۱۲	۱/۰×۱/۰×۱/۰	۳×۳×۳

شار نوترونی محاسبه شده با کد CITATION در طول مش ۰/۰۵ سانتیمتر به عنوان مرجع در نظر گرفته شده است.

در ادامه بیشترین درصد خطای نسبی در محاسبه شار نوترونی با استفاده از کدهای CITATION و ANOMOS در طول مش‌های مختلف در جدول شماره ۱۶ ارائه شده است.

جدول شماره ۱۶: حداکثر درصد خطای نسبی در محاسبه شار نوترونی مسئله ۵

CITATION	ANOMOS (Flat App.)	ANOMOS (Quad. App.)	طول مش (cm×cm×cm)	تعداد مش ($N_x \times N_y \times N_z$)
۰/۲۱۳	۰/۵۹۷	-۰/۱۵۶	۰/۱۷×۰/۱۷×۰/۱۷	۱۸×۱۸×۱۸
۴/۰۷۰	۰/۹۰۸	-۰/۱۸۵	۰/۲×۰/۲×۰/۲	۱۵×۱۵×۱۵
۲۳/۷۲۷	۵/۸۶۸	-۱/۲۴۳	۰/۵×۰/۵×۰/۵	۶×۶×۶
۸۰/۰۱۵	۱۸/۳۹۰	-۵/۹۷۲	۱/۰×۱/۰×۱/۰	۳×۳×۳

۱۰-۶- مسئله ۶

یک مکعب با طول ضلع ۶۰ سانتیمتر که محتوی ماده با مشخصات جدول شماره ۱۷ است، دربرگیرنده چشمه یکنواخت نوترون به قدرت واحد می‌باشد. شرایط مرزی در تمام راستاها، شار صفر می‌باشد.

جدول شماره ۱۷: مشخصات مسئله ۶

پارامتر	مقدار
$D_1(cm)$	۱/۳۶۴۸
$D_2(cm)$	۰/۴۸۲۶
$\Sigma_{a,1}(cm^{-1})$	۰/۰۲۶۱۳۲
$\Sigma_{a,2}(cm^{-1})$	۰/۱۳۰۷۷۲
$\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}(cm^{-1})$	۰/۰۱۷۲۴۵
$\Sigma_{s,2 \rightarrow 1}(cm^{-1})$	۰/۰۰۰۰۰۰

مقدار شار نوترونی نود مستقر در گوشه مکعب با استفاده از کدهای CITATION و ANOMOS در طول مش‌های مختلف در جدول‌های شماره ۱۸ و ۱۹ ارائه شده است.

جدول شماره ۱۸: مقادیر شار گروه اول در گوشه هندسه مسئله ۶

CITATION	ANOMOS (Flat App.)	ANOMOS (Quad. App.)	طول مش (cm×cm×cm)	تعداد مش ($N_x \times N_y \times N_z$)
۱۰/۹۵۵۷	۱۰/۷۱۳۲	۱۰/۶۵۲۵	۳/۳×۳/۳×۳/۳	۱۸×۱۸×۱۸
۱۱/۳۶۲۴	۱۰/۷۳۴۵	۱۰/۶۴۶۳	۴/۰×۴/۰×۴/۰	۱۵×۱۵×۱۵
۱۱/۶۹۳۸	۱۰/۷۷۱۵	۱۰/۶۳۲۸	۵/۰×۵/۰×۵/۰	۱۲×۱۲×۱۲
۱۳/۵۵۹۴	۱۱/۰۰۳۵	۱۰/۴۹۰۱	۱۰/۰×۱۰/۰×۱۰/۰	۶×۶×۶
۱۶/۴۷۵۸	۱۱/۲۷۱۲	۱۰/۲۳۷۳	۲۰/۰×۲۰/۰×۲۰/۰	۳×۳×۳

جدول شماره ۱۹: مقادیر شار گروه دوم در گوشه هندسه مسئله ۶

CITATION	ANOMOS (Flat App.)	ANOMOS (Quad. App.)	طول مش (cm×cm×cm)	تعداد مش ($N_x \times N_y \times N_z$)
۱/۳۱۰۹۴	۱/۲۸۸۴۴	۱/۲۸۰۷۴	۳/۳×۳/۳×۳/۳	۱۸×۱۸×۱۸
۱/۳۵۸۷۴	۱/۲۹۱۳۴	۱/۲۸۰۰۵	۴/۰×۴/۰×۴/۰	۱۵×۱۵×۱۵
۱/۴۰۰۸۲	۱/۲۹۶۴۵	۱/۲۷۸۴۶	۵/۰×۵/۰×۵/۰	۱۲×۱۲×۱۲
۱/۶۵۶۷۶	۱/۳۲۹۶۴	۱/۲۵۹۴۶	۱۰/۰×۱۰/۰×۱۰/۰	۶×۶×۶
۲/۰۷۶۲۱	۱/۳۶۸۹۸	۱/۲۲۲۰۸	۲۰/۰×۲۰/۰×۲۰/۰	۳×۳×۳

مقدار مرجع شارهای گروه ۱ و ۲ (محاسبه شده با کد CITATION در طول مش ۰/۶۶۶۶۷ سانتیمتر) به ترتیب برابر با ۱۰/۶۸۲۹ و ۲/۲۸۳۴۹ می‌باشند. در ادامه، بیشترین درصد خطای نسبی در محاسبه شار نوترونی با استفاده از کدهای CITATION و ANOMOS در طول مش‌های مختلف در جدول‌های شماره ۲۰ و ۲۱ آمده است.

جدول شماره ۲۰: حداکثر درصد خطای نسبی در محاسبه شار گروه اول مسئله ۶

CITATION	ANOMOS (Flat App.)	ANOMOS (Quad. App.)	طول مش (cm×cm×cm)	تعداد مش ($N_x \times N_y \times N_z$)
۲/۵۵۴	۰/۲۸۴	-۰/۲۸۴	۳/۳×۳/۳×۳/۳	۱۸×۱۸×۱۸
۶/۳۶۱	۰/۴۸۳	-۰/۳۴۳	۴/۰×۴/۰×۴/۰	۱۵×۱۵×۱۵
۹/۴۶۳	۰/۵۲۹	-۰/۴۶۹	۵/۰×۵/۰×۵/۰	۱۲×۱۲×۱۲
۲۶/۹۲۶	۳/۰۰۱	-۱/۸۰۵	۱۰/۰×۱۰/۰×۱۰/۰	۶×۶×۶
۵۴/۲۵۱	۵/۵۰۷	-۴/۱۷۱	۲۰/۰×۲۰/۰×۲۰/۰	۳×۳×۳

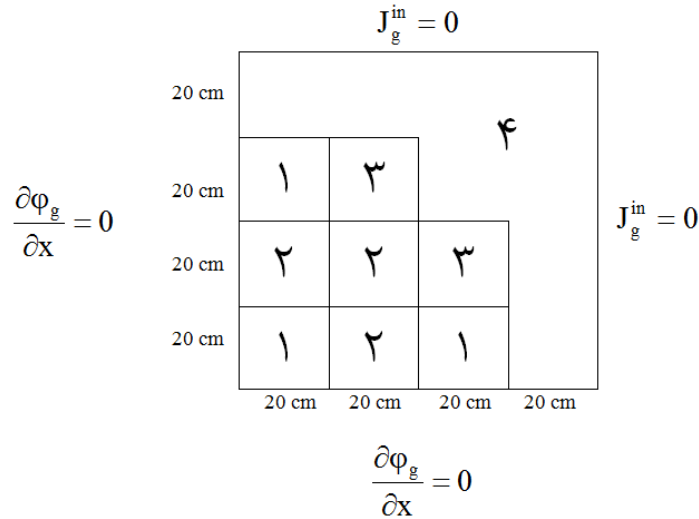
جدول شماره ۲۱: حداکثر درصد خطای نسبی در محاسبه شار گروه دوم مسئله ۶

CITATION	ANOMOS (Flat App.)	ANOMOS (Quad. App.)	طول مش (cm×cm×cm)	تعداد مش ($N_x \times N_y \times N_z$)
۲/۱۳۹	۰/۳۸۶	-۰/۲۱۴	۳/۳×۳/۳×۳/۳	۱۸×۱۸×۱۸
۵/۸۶۳	۰/۶۱۲	-۰/۲۶۸	۴/۰×۴/۰×۴/۰	۱۵×۱۵×۱۵
۹/۱۴۱	۱/۰۱۰	-۰/۳۹۲	۵/۰×۵/۰×۵/۰	۱۲×۱۲×۱۲
۲۹/۰۸۲	۳/۵۹۶	-۱/۸۷۲	۱۰/۰×۱۰/۰×۱۰/۰	۶×۶×۶
۶۱/۷۶۳	۶/۶۶۱	-۴/۷۸۵	۲۰/۰×۲۰/۰×۲۰/۰	۳×۳×۳

۷-۱۰- مسئله ۷

یک راکتور سه بعدی از نوع آب جوشان با هندسه نشان داده شده در شکل ۷ را در نظر بگیرید. سطح مقطع‌های دو گروهی در جدول شماره ۲۲ آمده است.

این راکتور از بالا و پایین به وسیله بازتابنده آب با ضخامت ۲۰ سانتیمتر احاطه شده است، همچنین ارتفاع فعال قلب معادل ۱۶۰ سانتیمتر می‌باشد.



شکل ۷: مقطع افقی از راکتور مسئله ۷

جدول شماره ۲۲: مشخصات قلب راکتور و بازتابنده مسئله ۷

ماده ۴	ماده ۳	ماده ۲	ماده ۱	پارامتر
۲/۰	۱/۵	۱/۵	۱/۵	$D_1 (cm)$
۰/۳	۰/۴	۰/۴	۰/۴	$D_2 (cm)$
۰/۰۰۰۱۶۰	۰/۰۱۰۱۲۰	۰/۰۱۰۱۲۰	۰/۰۱۰۱۲۰	$\Sigma_{a,1} (cm^{-1})$
۰/۰۱۰۰۲۴	۰/۱۳۰۰۳۲	۰/۰۸۵۰۳۲	۰/۰۸۰۰۳۲	$\Sigma_{a,2} (cm^{-1})$
۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	$v\Sigma_{f,1} (cm^{-1})$
۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۱۳۵۰۰۰	۰/۱۳۵۰۰۰	۰/۱۳۵۰۰۰	$v\Sigma_{f,2} (cm^{-1})$
۰/۰۴۰۰۰۰	۰/۰۲۰۰۰۰	۰/۰۲۰۰۰۰	۰/۰۲۰۰۰۰	$\Sigma_{s,1 \rightarrow 2} (cm^{-1})$
۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	$\Sigma_{s,2 \rightarrow 1} (cm^{-1})$

در شکل ۸، توزیع قدرت مرجع و محاسبه شده با کدهای CITATION، ANOMOS و PARCS با طول مش ۲۰ سانتیمتر ارائه شده است.

	2.1883	
	2.1877	
	2.1868	
	2.1955	
Reference	1.4187	0.8726
..... PARCS (Quad.)	1.4194	0.8716
..... ANOMOS	1.4154	0.8708
..... (Quad.)	1.4210	0.8752
..... ANOMOS (Flat)		
	0.7817	0.2690
	0.7820	0.2689
	0.7900	0.2659
	0.7839	0.2597

شکل ۸: توزیع قدرت شعاعی (طول مش ۲۰ سانتیمتر)

نتایج بدست آمده از کد روش اختلاف محدود با طول مش ۱ سانتیمتر به عنوان مرجع انتخاب شده است. در شکل ۹، توزیع درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت با کدهای CITATION، ANOMOS و PARCS ارائه شده است.

	-0.027	
	-0.068	
	+0.329	
	+6.384	
..... PARCS (Quad.)	+0.042	-0.115
..... ANOMOS (Quad.)	-0.240	-0.206
..... ANOMOS (Flat)	+0.155	+0.298
	-6.656	+1.834
	+0.026	-0.115
	+1.049	-0.206
	+0.269	+0.298
	+1.816	+1.834

شکل ۹: توزیع درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت شعاعی (طول مش ۲۰ سانتیمتر)

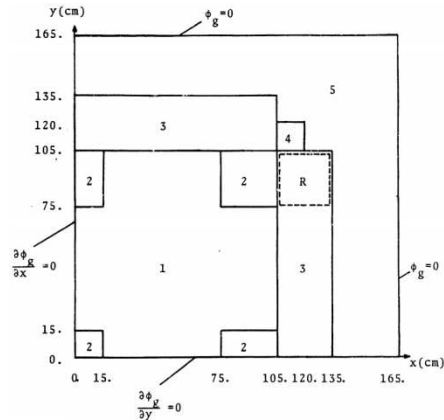
در جدول شماره ۲۳، نتایج کدهای مختلف در محاسبه پارامترهای نوترونی (ضریب تکثیر مؤثر، توزیع قدرت) با طول مش ۲۰ سانتیمتر، ارائه و مقایسه شده‌اند.

جدول شماره ۲۳: مقایسه نتایج کدهای مختلف در محاسبه پارامترهای نوترونی مسئله ۷

ε_{\max} %	ε_{ave} %	err. (pcm)	مرجع	k_{eff}	نام کد (روش)
۰/۱۱	۰/۰۵	۴۵	۰/۹۹۴۷۹	۰/۹۹۵۲۴	PARCS (ANM – Quad.)
۰/۲۳	۰/۱۸	۹۵		۰/۹۹۵۷۴	ANOMOS (ANM – Quad.)
۰/۳۳	۰/۲۵	۲۴۴		۰/۹۹۷۲۳	ANOMOS (ANM – Flat)
۶/۳۸	۲/۲۷	۷۶۹		۱/۰۰۲۴۸	PARCS (FDM)
۶/۳۸	۲/۲۷	۷۶۹		۱/۰۰۲۴۸	CITATION (FDM)

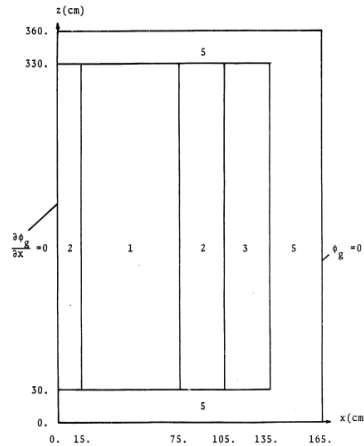
۸-۱۰ - مسئله ۸

یک راکتور سه بعدی از نوع آب جوشان با هندسه نشان داده شده در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ در نظر بگیرید.



شکل ۱۰: مقطع افقی از راکتور مسئله ۸

سطح مقطع‌های دو گروهی مربوطه در جدول شماره ۲۴ آمده است.



شکل ۱۱: مقطع عمودی از راکتور مسئله ۸

جدول شماره ۲۴: مشخصات قلب راکتور و بازتابنده مسئله ۸

ماده ۵	ماده ۴	ماده ۳	ماده ۲	ماده ۱	پارامتر
۱/۲۵۷۰	۱/۲۵۹۰	۱/۲۵۹۰	۱/۲۶۸۰	۱/۲۵۵۰	$D_1 (cm)$
۰/۱۵۹۲	۰/۲۰۹۱	۰/۲۰۹۱	۰/۱۹۰۲	۰/۲۱۱۰	$D_2 (cm)$
۰/۰۰۰۶۰۳۴	۰/۰۰۸۰۰۲	۰/۰۰۸۰۰۲	۰/۰۰۷۱۸۱	۰/۰۰۸۲۵۲	$\Sigma_{a,1} (cm^{-1})$
۰/۰۱۹۱۱۰	۰/۰۷۳۳۲۴	۰/۰۸۳۴۴۰	۰/۰۷۰۴۷۰	۰/۱۰۰۳۰۰	$\Sigma_{a,2} (cm^{-1})$
۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۴۶۶۳	۰/۰۰۴۶۶۳	۰/۰۰۴۶۰۹	۰/۰۰۴۶۰۲	$v\Sigma_{t,1} (cm^{-1})$
۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۱۰۲۱۰۰	۰/۱۰۲۱۰۰	۰/۰۸۶۷۵۰	۰/۱۰۹۱۰۰	$v\Sigma_{t,2} (cm^{-1})$
۰/۰۴۷۵۴۰	۰/۰۲۶۱۷۰	۰/۰۲۶۱۷۰	۰/۰۲۷۶۷۰	۰/۰۲۵۳۳۰	$\Sigma_{s,1 \rightarrow 2} (cm^{-1})$
۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	$\Sigma_{s,2 \rightarrow 1} (cm^{-1})$

در شکل‌های ۱۲ و ۱۳، توزیع قدرت شعاعی مرجع و محاسبه شده با کدهای ANOMOS و PARCS با طول مش ۱۵ سانتیمتر برای حالت‌های دو بعدی و سه بعدی ارائه شده است.

0.6122	0.4402	0.4130	0.5118	0.7902	1.386	1.661	1.481	0.9242
0.6125	0.4397	0.4126	0.5113	0.7888	1.386	1.662	1.481	0.9234
0.6126	0.4398	0.4127	0.5113	0.7888	1.386	1.662	1.481	0.9234
	0.3995	0.4067	0.4904	0.6705	0.9398	1.151	1.281	0.8672
	0.3996	0.4063	0.4900	0.6710	0.9390	1.149	1.281	0.8667
	0.3996	0.4064	0.4900	0.6710	0.9390	1.149	1.281	0.8668
		0.4240	0.4921	0.6181	0.7826	0.9667	1.173	0.8268
		0.4239	0.4921	0.6179	0.7822	0.9659	1.171	0.8264
		0.4239	0.4921	0.6179	0.7822	0.9659	1.171	0.8264
			0.5524	0.6782	0.8432	1.022	1.221	0.8530
			0.5525	0.6780	0.8429	1.022	1.220	0.8529
			0.5526	0.6780	0.8429	1.022	1.220	0.8529
				0.8643	1.152	1.339	1.422	0.9325
				0.8653	1.151	1.338	1.423	0.9327
				0.8653	1.151	1.338	1.423	0.9327
					1.852	2.051	1.679	0.9716
					1.853	2.054	1.680	0.9734
					1.853	2.053	1.680	0.9734
						2.161	1.621	0.8465
						2.164	1.623	0.8465
						2.164	1.623	0.8464
							1.328	
							1.329	
							1.329	

..... Reference
..... PARCS (Quad.)
..... ANOMOS (Quad.)

شکل ۱۲: توزیع قدرت شعاعی در حالت دو بعدی (طول مش ۱۵ سانتیمتر)

0.6118	0.4403	0.4131	0.5119	0.7901	1.3844	1.6599	1.4807	0.9239
0.6118	0.4393	0.4123	0.5110	0.7885	1.3852	1.6622	1.4808	0.9234
0.6176	0.4399	0.4127	0.5112	0.7894	1.3917	1.6694	1.4826	0.9237
	0.3995	0.4067	0.4904	0.6703	0.9397	1.1506	1.2806	0.8669
	0.3992	0.4060	0.4897	0.6707	0.9388	1.1493	1.2813	0.8668
	0.4014	0.4072	0.4911	0.6728	0.9387	1.1488	1.2839	0.8683
		0.4240	0.4920	0.6181	0.7826	0.9667	1.1726	0.8266
		0.4236	0.4918	0.6176	0.7821	0.9659	1.1713	0.8265
		0.4245	0.4924	0.6180	0.7820	0.9658	1.1713	0.8267
			0.5524	0.6782	0.8434	1.0224	1.2211	0.8528
			0.5523	0.6778	0.8428	1.0217	1.2202	0.8530
			0.5524	0.6774	0.8421	1.0206	1.2190	0.8522
				0.8643	1.1521	1.3394	1.4215	0.9324
				0.8653	1.1511	1.3384	1.4237	0.9329
				0.8642	1.1493	1.3362	1.4214	0.9314
					1.8515	2.0505	1.6796	0.9719
					1.8533	2.0539	1.6808	0.9737
					1.8498	2.0499	1.6775	0.9718
						2.1607	1.6216	0.8484
						2.1647	1.6235	0.8467
						2.1602	1.6201	0.8449
							1.3319	
							1.3293	
							1.3264	

..... Reference
 PARCS (Quad.)
 ANOMOS (Quad.)

شکل ۱۳: توزیع قدرت شعاعی در حالت سه بعدی (طول مش ۱۵ سانتیمتر)

در شکل‌های ۱۴ و ۱۵، توزیع درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت شعاعی با کدهای ANOMOS و PARCS در طول مش ۱۵ سانتیمتر در حالت‌های دو بعدی و سه بعدی ارائه شده است.

+0.049	-0.114	-0.097	-0.098	-0.177	+0.000	+0.060	+0.000	-0.087
+0.065	-0.091	-0.073	-0.098	-0.177	+0.000	+0.060	+0.000	-0.087
	+0.025	-0.098	-0.082	+0.075	-0.085	-0.174	+0.000	-0.058
	+0.025	-0.074	-0.082	+0.075	-0.085	-0.174	+0.000	-0.046
		-0.024	+0.000	-0.032	-0.051	-0.083	-0.170	-0.048
		-0.024	+0.000	-0.032	-0.051	-0.083	-0.170	-0.048
			+0.018	-0.030	-0.036	+0.000	-0.082	-0.012
			+0.036	-0.030	-0.036	+0.000	-0.082	-0.012
				+0.116	-0.087	-0.075	+0.070	+0.021
				+0.116	+0.087	-0.075	+0.070	+0.021
					+0.054	+0.146	+0.060	+0.185
					+0.054	+0.098	+0.060	+0.185
						+0.139	+0.123	+0.000
						+0.139	+0.123	-0.012
							+0.075	
							+0.075	

..... PARCS (Quad.)
 ANOMOS (Quad.)

شکل ۱۴: توزیع درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت در حالت دو بعدی (طول مش ۱۵ سانتیمتر)

+0.000	-0.227	-0.194	-0.176	-0.202	+0.059	+0.139	+0.007	-0.054
+0.948	-0.091	-0.097	-0.137	-0.089	+0.527	+0.572	+0.128	-0.022
	-0.075	-0.172	-0.143	+0.060	-0.096	-0.113	+0.055	-0.012
	+0.476	+0.123	+0.143	+0.373	-0.106	-0.156	+0.258	+0.162
		-0.094	-0.041	-0.081	-0.064	-0.083	-0.111	-0.012
		+0.118	+0.081	-0.016	-0.077	-0.093	-0.111	+0.012
			-0.018	-0.059	-0.071	-0.068	-0.074	+0.024
			+0.000	-0.118	-0.154	-0.176	-0.172	-0.070
				+0.116	-0.087	-0.075	+0.155	+0.054
				-0.012	-0.243	-0.239	-0.007	-0.107
					+0.097	+0.166	+0.071	+0.185
					-0.092	-0.029	-0.125	-0.010
						+0.185	+0.117	-0.200
						-0.023	-0.092	-0.412
							-0.195	
							-0.413	

..... PARCS (Quad.)
 ANOMOS (Quad.)

شکل ۱۵: توزیع درصد خطای نسبی در محاسبه توزیع قدرت در حالت سه بعدی (طول مش ۱۵ سانتیمتر)

در جدول‌های شماره ۲۵ و ۲۶، نتایج کدهای مختلف در محاسبه پارامترهای نوترونی (ضریب تکثیر مؤثر، توزیع قدرت) با طول مش ۱۵ سانتیمتر، در حالت‌های دو بعدی و سه بعدی ارائه و مقایسه شده‌اند.

جدول شماره ۲۵: مقایسه نتایج کدهای مختلف در محاسبه پارامترهای نوترونی مسئله ۸ در دو بعد

ε_{\max} %	ε_{ave} %	err. (pcm)	مرجع	k_{eff}	نام کد (روش)
۰/۱۸	۰/۰۷	۵	۰/۹۹۶۳۶	۰/۹۹۶۴۱	PARCS (ANM – Quad.)
۰/۱۹	۰/۰۷	۵		۰/۹۹۶۴۱	QUANDRY (ANM – Quad.)
۰/۱۸	۰/۰۷	۵		۰/۹۹۶۴۱	ANOMOS (ANM – Quad.)
۲/۹۸	۱/۳۰	۵۹		۰/۹۹۶۹۵	ANOMOS (ANM – Flat)
۲۱/۷۰	۱۰/۸۶	۷۵۳		۱/۰۰۳۸۹	PARCS (FDM)

جدول شماره ۲۶: مقایسه نتایج کدهای مختلف در محاسبه پارامترهای نوترونی مسئله ۸ در سه بعد

ε_{\max} %	ε_{ave} %	err. (pcm)	مرجع	k_{eff}	نام کد (روش)
۰/۲۳	۰/۱۰	۶	۰/۹۹۶۳۹	۰/۹۹۶۴۵	PARCS (ANM – Quad.)
۰/۲۴	۰/۰۸	۵		۰/۹۹۶۴۴	QUANDRY (ANM – Quad.)
۰/۹۵	۰/۱۷	۹		۰/۹۹۶۴۸	ANOMOS (ANM – Quad.)
۴/۵۸	۱/۸۸	۹۴		۰/۹۹۷۳۳	ANOMOS (ANM – Flat)
۲۱/۶۰	۱۰/۸۲	۷۹۱		۱/۰۰۴۳۲	PARCS (FDM)

۱۱- نتیجه گیری

در این پروژه، مراحل انجام محاسبات لازم برای بدست آوردن شار نوترونی برای مسائل سه بعدی یک و دو گروهی با استفاده از روش نودال تحلیلی در هندسه چهارگوش ارائه شده است. برای راستی‌آزمایی نتایج حاصل از کد توسعه داده شده (ANOMOS)، از مقایسه با نتایج حاصل از کدهایی از قبیل PARCS و CITATION استفاده شده است. در نتیجه این مقایسه‌ها، صحت نتایج و اعتبار روش نودال تحلیلی در حل معادله پخش نوترون مورد تأیید قرار گرفته و تحقیقاً، می‌توان بیان داشت که این روش در دو و سه بعد به پاسخ قابل قبولی، با طول‌مش بزرگ، خواهد رسید.

۱۲- مراجع

1. Smith, K.S. "An Analytic Nodal Method for Solving the Two Group Multidimensional Static and Transient Neutron Diffusion Equations", PhD Thesis, MIT, 1976.
2. Chao, Y.A. "A Theoretical Analysis of the Coarse Mesh Finite Difference Representation in Advanced Nodal Methods", Mathematics and Computation, Reactor Physics and Environmental Analysis, in Nuclear Applications, vol. 1, pp. 117, 1999.
3. Chao, Y.A. "Coarse Mesh Finite Difference Methods and Applications", Advances in Reactor Physics and Mathematics and Computation into the Next Millennium, PHYSOR-2000, vol. 1, Pittsburgh, pp. 9404, 1999.
4. Aragonés, J.M., Ahnert, C., Herranz, N.G. "The Analytic Coarse Mesh Finite Difference Method for Multi group and Multidimensional Diffusion Calculations," Nuclear Science and Engineering, Vol. 157, pp. 1, 2007.
5. Lozano, J.A., Herranz, N.G., Ahnert, C., Aragonés, J.M. "The Analytic Nodal Diffusion Solver in Multi Groups for 3D Rectangular Geometry," Annals of Nuclear Energy, Vol. 35, pp. 2365, 2008.