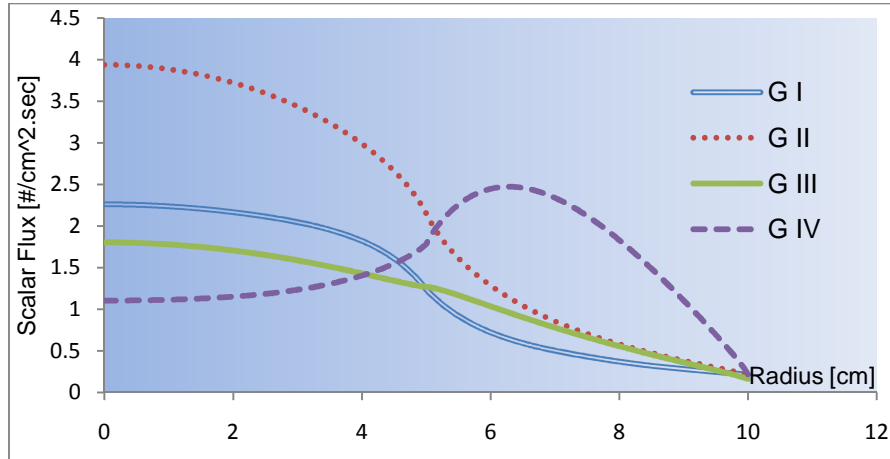


کد محاسباتی ترابرد یک بعدی نوترون بر پایه معادلات زوج پاره



گزارش فنی ENTRANS-1D

بسته دهم - ویرایش ۰ - دی ۱۳۹۲

ANC-TEC-TED-PN-100

فهرست مطالب

- ۱- چکیده..... ۱۳
- ۲- کلیدواژه..... ۱۵
- ۳- اختصارات..... ۱۵
- ۴- مقدمه..... ۱۵
- ۵- دامنه گزارش..... ۱۸
- ۶- آشنایی با معادله ترابرد نوترون و روش‌های حل آن..... ۱۹

- ۷- کاربرد اصول وردشی در فیزیک رآکتور..... ۳۷
- ۸- اصول وردشی بر پایه معادلات زوج و فرد پاره..... ۶۷
- ۹- تحلیل وابستگی زاویه‌ای..... ۹۱
- ۱۰- تحلیل وابستگی مکانی..... ۱۱۴
- ۱۱- تحلیل وابستگی به انرژی..... ۱۳۱
- ۱۲- بررسی معادلات در مختصات یک بعدی..... ۱۳۹
- ۱۳- آزمون‌ها و نتایج..... ۱۷۴

۱۴- نتیجه گیری..... ۲۴۷

۱۵- مراجع..... ۲۴۹

لیست شکل‌ها

- شکل ۱: حجم مورد بررسی با چهار نوع مرز ۵۴
- شکل ۲: مرز بازتابنده کامل ۵۶
- شکل ۳: نمودار کیفی تعیین کران بالا و پایین عامل عدم مزیت یاخته‌های ناهمگن توسط اصول وردشی ۸۸
- شکل ۴: موقعیت بردار یکه زاویه در فضای کارترین ۹۶
- شکل ۵: در روش اجزای محدود پیوستگی شار در گره‌ها باید رعایت شود. ۱۲۶
- شکل ۶: وضعیت بردارهای Ω و X نسبت به یکدیگر در فضای تخت یک بعدی ۱۴۰
- شکل ۷: المان بندی یک تخته یک بعدی ۱۴۴
- شکل ۸: مرز بازتابنده کامل ۱۵۲
- شکل ۹: وضعیت بردارهای r و Ω در مختصات کروی ۱۵۴

- شکل ۱۰: وضعیت بردارهای Ω و \mathbf{r} در مختصات استوانه‌ای ۱۶۵
- شکل ۱۱: هندسه جاذب کامل یک بعدی ۱۸۳
- شکل ۱۲: نمودار تضعیف شار در مراتب مختلف بسط برای جاذب سیاه ۱۸۸
- شکل ۱۳: درصد خطای نسبی بین نتایج تحلیلی و محاسبات ENTRANS در مراتب مختلف بسط برای جاذب سیاه ۱۸۹
- شکل ۱۴: هندسه یاخته یک بعدی سوخت مرتبط با آزمون شماره ۲ ۱۹۳
- شکل ۱۵: نمودار مقایسه نتایج تحلیلی و محاسبات ENTRANS برای یاخته سوخت یک بعدی ۱۹۵
- شکل ۱۶: درصد خطای نسبی بین نتایج تحلیلی و محاسبات ENTRANS برای یاخته سوخت ۱۹۶
- شکل ۱۷: روند همگرایی عامل عدم مزیت با افزایش مرتبه بسط و تعداد عناصر در یاخته سوخت یک بعدی ۱۹۷
- شکل ۱۸: مشخصات هندسی قلب دو گروهی یک بعدی ۱۹۹

- شکل ۱۹: تراز نسبی شار دو گروهی در بسط مرتبه سه ۲۰۱
- شکل ۲۰: نمودار تراز نسبی شار دو گروهی در بسط مرتبه سه ۲۰۶
- شکل ۲۱: مشخصات هندسی رآکتور چهار گروهی یک بعدی ۲۰۸
- شکل ۲۲: شار چهار گروهی برای رآکتور آزمون پنجم ۲۱۱
- شکل ۲۳: درصد اختلاف نسبی شار گروهی بین ENTRANS و کد DRAGON ۲۱۲
- شکل ۲۴: شکل فضایی پراکندگی ناهمسانگرد تابع (۷-۱۳) ۲۱۵
- شکل ۲۵: نمودار شار دو گروهی در محیط با پراکندگی ناهمسانگرد (آزمون ششم) ۲۱۷
- شکل ۲۶: نمودار درصد اختلاف نسبی شار در محیط با پراکندگی ناهمسانگرد (آزمون ششم) ۲۱۸
- شکل ۲۷: نمودار مقایسه شار تحلیلی و محاسبه شده توسط ENTRANS برای کره جاذب با چشمه سطحی ۲۲۱
- شکل ۲۸: نمودار درصد خطای نسبی شار محاسبه شده توسط ENTRANS برای کره جاذب با چشمه سطحی ۲۲۲

شکل ۲۹: نمودار شار نسبی محاسبه شده توسط ENTRANS برای کره پلوتونیومی بحرانی ۲۲۶

شکل ۳۰: نمودار شار نسبی محاسبه شده توسط ENTRANS برای کره اورانیومی بحرانی ۲۲۹

شکل ۳۱: نمودار شار بهنجار شده برای استوانه پلوتونیومی بحرانی ۲۳۶

شکل ۳۲: نمودار شار بهنجار شده برای استوانه پلوتونیومی با بازتابنده آب ۲۴۰

شکل ۳۳: نمودار شار بهنجار شده گروهی برای رآکتور چهارگروهی دو ناحیه‌ای ۲۴۶

لیست جدول‌ها

- جدول شماره ۱: ماتریس‌ها و انتگرال‌های زاویه‌ای برای حالت یک بعدی تخت ۱۴۵
- جدول شماره ۲: ماتریس‌ها و انتگرال‌های مکانی در حالت یک بعدی تخت ۱۴۶
- جدول شماره ۳: ماتریس‌ها و انتگرال‌های زاویه‌ای برای حالت کروی متقارن ۱۵۷
- جدول شماره ۴: ماتریس‌ها و انتگرال‌های مکانی برای حالت کروی متقارن ۱۵۸
- جدول شماره ۵: ماتریس‌ها و انتگرال‌های زاویه‌ای برای حالت استوانه‌ای متقارن ۱۶۸
- جدول شماره ۶: ماتریس‌ها و انتگرال‌های مکانی برای حالت استوانه‌ای متقارن ۱۶۹
- جدول شماره ۷: نتایج تحلیلی و محاسبات ENTRANS در مراتب مختلف بسط در عمق جاذب سیاه یک بعدی ۱۸۶
- جدول شماره ۸: درصد نسبی خطای محاسبات ENTRANS در مراتب مختلف بسط برای جاذب سیاه یک بعدی ۱۸۷

- جدول شماره ۹: سطوح مقاطع مواد بکار رفته در آزمون سوم..... ۲۰۰
- جدول شماره ۱۰: نتایج جستجوی ضریب تکثیر مؤثر نوترون برای آزمون سوم..... ۲۰۲
- جدول شماره ۱۱: سطوح مقاطع مربوط به آزمون چهارم..... ۲۰۴
- جدول شماره ۱۲: نتایج محاسبات بحرانیت برای رآکتور ناهمگن دو گروهی..... ۲۰۵
- جدول شماره ۱۳: سطوح مقاطع مربوط به آزمون پنجم..... ۲۰۹
- جدول شماره ۱۴: نتایج محاسبات بحرانیت برای رآکتور ناهمگن چهار گروهی..... ۲۱۰
- جدول شماره ۱۵: سطوح مقاطع مرتبط با آزمون ششم..... ۲۱۶
- جدول شماره ۱۶: مقادیر محاسبه شده شار در کره جاذب توسط ENTRANS برای بسطها و تعداد المانهای متنوع
..... ۲۲۳
- جدول شماره ۱۷: نتایج محاسبات بحرانیت برای کره پلوتونیومی بحرانی..... ۲۲۵

- جدول شماره ۱۸: سطوح مقاطع تک گروهی برای کره اورانیومی بحرانی با بازتابنده آب ۲۲۷
- جدول شماره ۱۹: نتایج محاسبات بحرانیت برای کره اورانیومی بحرانی با بازتابنده آب ۲۲۸
- جدول شماره ۲۰: سطوح مقاطع رآکتور اورانیومی با پراکندگی ناهمسانگرد ۲۳۱
- جدول شماره ۲۱: نتایج محاسبات برای رآکتور اورانیومی با پراکندگی ناهمسانگرد ۲۳۱
- جدول شماره ۲۲: نتایج محاسبات بحرانیت برای کره شش گروهی GODIVA؛ ۲۳۳
- جدول شماره ۲۳: سطوح مقاطع تک گروهی استوانه پلوتونیومی ۲۳۵
- جدول شماره ۲۴: نتایج محاسبات بحرانیت برای استوانه پلوتونیومی تک گروهی ۲۳۵
- جدول شماره ۲۵: سطوح مقاطع استوانه پلوتونیومی با بازتابنده آب ۲۳۸
- جدول شماره ۲۶: نتایج محاسبات بحرانیت برای استوانه پلوتونیومی با بازتابنده آب ۲۳۹
- جدول شماره ۲۷: سطوح مقاطع رآکتور همگن سه گروهی (آزمون سوم) ۲۴۲

جدول شماره ۲۸: نتایج محاسبات محیط بی‌نهایت برای رآکتور همگن سه‌گروهی (آزمون سوم)..... ۲۴۲

جدول شماره ۲۹: نتایج محاسبات بحرانیت محیط محدود برای رآکتور همگن سه‌گروهی (آزمون سوم)..... ۲۴۳

جدول شماره ۳۰: نتایج محاسبات بحرانیت برای رآکتور چهار گروهی ناهمگن..... ۲۴۵

۱- چکیده

در این گزارش حل معادله چند بعدی و چند گروهی حالت پایای ترابرد نوترون با استفاده از رهیافت وردشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. معادله درجه اول ترابرد نوترون را می‌توان با استفاده از تقسیم چگالی شار زاویه‌ای، $\psi(\mathbf{r}, E, \Omega)$ ، به دو بخش زوج و فرد به دو معادله درجه دوم جدا از یکدیگر با پارितه زوج و فرد تقسیم نمود. این معادلات درجه دو از ویژگی خود الحاقی برخوردار بوده و لذا هر کدام از آنها می‌تواند یک معادله اوپلر- لاگرانژ برای یک اصل وردشی باشد. با استفاده از روش مربع کمینه تعمیم یافته می‌توان دو تابعی^۱ یافت که بیشینه‌سازی آنها معادل حل جفت معادلات درجه دوم ترابرد نوترون باشد. برای این منظور چگالی شار زاویه‌ای را با استفاده از بسط هماهنگ‌های کروی روی متغیر زاویه (Ω) و با بکارگیری روش اجزای محدود روی متغیر مکانی (\mathbf{r}) تقریب زده می‌شود. بازه انرژی (E) نیز به چندین گروه

¹ Functional

انرژی شکسته می‌شود. جمع این تقریب‌ها نهایتاً به یک دسته معادلات ناهمگن خطی منتهی شده که حل آن به روش‌های گوناگون از جمله بر مبنای تکرار^۲ چگالی شار زاویه‌ای و شار نرده‌ای را برای هر گره در مش‌بندی مورد نظر ارایه می‌کند. ویژگی این رهیافت نسبت به روش P_N معمول، صرفه‌جویی قابل ملاحظه در حافظه مصرفی رایانه و در نتیجه افزایش سرعت و دقت محاسبات است. در این گزارش حل مسئله در حالت سه بعدی و چند گروهی به بحث نظری گذاشته شده و کمیت‌های لازم برای محاسبات یک بعدی در مختصات تخت، کروی و استوانه‌ای هنگام برنامه‌نویسی ارایه شده‌اند. در همین راستا برنامه محاسباتی «ENTRANS» به زبان C تدوین شده که قادر به حل مسائل یک بعدی تا هر مرتبه P_N در مختصات‌های تیغه‌ای، کروی و استوانه‌ای می‌باشد. حل چند گروهی شار نرده‌ای، جستجوی K_{eff} ، محاسبه متوسط شار در هر ناحیه، خروجی‌های EXCEL و نیز امکان تعریف مرزهای برهنه، بازتابنده کامل و مرز با چشمه سطحی از دیگر قابلیت‌های برنامه ENTRANS به شمار می‌رود.

² Iteration

۲- کلیدواژه

معادله چند گروهی و چند بعدی ترابرد نوترون، معادلات پارितه (زوج پاره)، روش‌های وردشی، بسط هماهنگ‌های کروی، روش P_N ، روش اجزای محدود، ENTRANS

۳- اختصارات

توضیح	عبارت اختصاری	عبارت
کد محاسباتی ترابرد یک بعدی نوترون برپایه معادلات زوج پاره	ENTRANS-1D	1D - Even parity Neutron TRANSPORT code

۴- مقدمه

معادله ترابرد نوترون یکی از معادلات کلی حاکم بر توزیع نوترون‌ها در سامانه‌های هسته‌ای از جمله رآکتورها و حفاظ آن است. این معادله در حالت کلی تابع سه متغیر مکانی، دو متغیر زاویه‌ای، یک متغیر انرژی و یک وابستگی زمانی است. این پیچیدگی‌ها سبب می‌شود تا برای حل این معادله عموماً تقریب‌های ساده کننده همچون فرض همسانگردی پراکندگی‌ها و گروهی شدن رفتار سطح مقطع با انرژی و شرایط مرزی تقریبی استفاده شود. ضمناً برای تحلیل رفتار مکانی نیز از انواع روش‌های عددی بهره گرفته می‌شود. در این گزارش از میان روش‌های موجود برای حل معادله ترابرد نوترون روش ترابرد درجه دوم موسوم به معادلات زوج یا فردپاره^۳ برگزیده شده است. در این روش معادله درجه اول ترابرد نوترون به دو معادله درجه دوم مستقل از یکدیگر با پارگی زوج و فرد تفکیک می‌شود. از آنجا که معادلات به دست

³ Even (Odd) Parity Equations

آمده از درجه دوم هستند می توان از آنها به عنوان یک معادله اویلر- لاگرانژ برای یک اصل وردشی یاد نمود. اصل وردشی مربوطه توسط روش کمینه مربعات تعمیم یافته ساخته می شود به گونه ای که بیشینه سازی این اصل وردشی معادل یافتن پاسخ معادله درجه دوم یا همان شار نرده ای نوترون است. پس از ساختن اصل ورشی معادلات گروهی بدست آمده توسط هماهنگ های کروی روی متغیر زاویه بسط داده شده و در بخش مکانی نیز روش اجزای محدود اعمال می شود. این دو رهیافت نهایتاً به یک دسته معادلات خطی منتج می شوند که حل آنها شار نرده ای و تکانه های بسط چگالی شار زاویه ای در هر نقطه را به دست می دهد. ضمناً در این فرمول بندی امکان تحلیل مسائلی با پراکندگی های ناهمسانگرد به راحتی وجود دارد.

۵- دامنه گزارش

این گزارش به حل معادله چند گروهی و چند بعدی حالت پایای ترابرد نوترون به روش وردشی یا اصطلاحاً معادلات درجه دوم زوج پاره می‌پردازد. در این گزارش روند حل چند بعدی معادلات با استفاده از بسط هماهنگ‌های کروی و اعمال روش اجزای محدود به طور مبسوط تشریح شده و معادلات یک بعدی در دستگاه‌های مختصات تخت، کروی و استوانه‌ای استخراج می‌شوند. همچنین در ادامه ویژگی‌های کد یک بعدی ENTRANS با قابلیت حل چند گروهی معادله ترابرد نوترون در محیط‌های تخت، کروی و استوانه‌ای و یافتن شار نرده‌ای و ضریب تکثیر مؤثر نوترون‌ها و نیز محاسبه شار متوسط هر ناحیه و همچنین محاسبه شار در حضور چشمه‌های مرزی و حجمی تشریح می‌شود. محک‌های متعددی نیز برای راستی‌آزمایی و اعتبارسنجی کد ENTRANS پیش‌بینی شده که در انتهای گزارش به آن اشاره شده است.

۶- آشنایی با معادله ترابرد نوترون و روش‌های حل آن

۶-۱- معادله ترابرد نوترون

از زمان کشف شکافت اورانیوم در سال ۱۹۳۹م تاکنون معادله ترابرد نوترون به طور گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفته است. یکی از دلایل این امر الزام فناوری و فشار برای ساخت هر چه سریع‌تر و بهتر رآکتورهای هسته‌ای (اعم از شکافت و گداخت) بوده است. متأسفانه ساختار معادله ترابرد متفاوت‌تر و پیچیده‌تر از بسیاری از معادلات حاکم بر فیزیک است که در حوزه ریاضی - فیزیک مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد (مانند معادلات حاکم بر الکترومغناطیس، کوانتوم و...). به اعتقاد کیس^۴ و زوایفل^۵ استفاده از واژه‌ی «متأسفانه» دو علت اساسی دارد [۲۳ - مقدمه]:

⁴ Kenneth M. Case

⁵ Paul F. Zweifel

۱. نوع مسائل قابل حل به روش تحلیلی در معادله ترابرد به حالت‌های بسیار ابتدایی و ساده شده با فرض‌های دور از واقع محدود می‌گردد. بنابراین در مسائل عملی، مهندسان باید از روش‌های تقریبی و عددی بهره گیرند. علاوه بر آن مسائل قابل حل در متون درسی، به یک سری مثال‌های منزوی تبدیل شده‌اند که به روش‌های مختلف حل آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ و
۲. کسی که برای نخستین بار با مسائل ترابرد نوترون مواجه می‌شود باید در بکارگیری ایده‌های معمول در حل مسائل مقدار مرزی چیره دست باشد.

معادلات ترابرد خطی دسته معادلاتی هستند که به لحاظ تاریخی ابتدا در حوزه انتقال تابشی^۶ و پس از آن در سایر زمینه‌هایی که بحث «انتشار و انتقال» مطرح است، همچون پخش نوترون^۷، نظریه پلازما، انتشار صوت و... مورد پژوهش

⁶ Radiative Transfer

⁷ Diffusion of Neutrons

قرار گرفته‌اند. صرف نظر از تفاوت نام، ساختار این معادلات عموماً مشابه یکدیگر است. همچنین، هنگام ایده‌آل‌سازی معادلات خطی ترابرد برای دستیابی به یک رهیافت تحلیلی بیشترین شباهت به حالت واقعی و طبیعی، در مورد پخش نوترون‌ها حفظ می‌شود. در این میان در حل معادله تک گروهی ترابرد نوترون اگرچه از فرض‌های ساده‌کننده استفاده می‌شود، لکن همین حل تحلیلی به دلایلی از اهمیت وافر برخوردار است:

۱. در برخی مواقع خاص این رهیافت‌ها می‌توانند تقریب مناسبی از مسئله فیزیکی مورد بحث باشد؛
۲. به لحاظ ریاضی رهیافت حاصل در بررسی خصوصیات حل‌های معادلات خطی ترابرد با مقادیر مرزی اهمیت مضاعفی دارد؛ و
۳. شاید مهم‌ترین اهمیت این نوع حل در این نکته نهفته باشد که در درستی‌آزمایی و دقت‌سنجی روش‌های تقریب پیشنهادی برای حالت‌های عمومی‌تر کاربرد مؤثری دارند. [۲۳ - مقدمه]

معادله ترابرد نوترون در کلی‌ترین حالت خود تابع هفت متغیر مستقل شامل سه متغیر مکانی، دو متغیر زاویه، انرژی و زمان است. شکل این معادله در یکی از کلی‌ترین حالات خود عبارت است از: [۳۹-ص ۴۰ و ۴۱] [۳۴-ص ۲۹۹]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + \sigma_t(\mathbf{r}, E, t) \psi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) \\ & = \int_0^{+\infty} \int_{4\pi} \sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}, t) \psi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) d\Omega' dE' \\ & + \sum_j (1 - \beta_j) \frac{\chi_p^j(E)}{4\pi} v^j \int_0^{+\infty} \int_{4\pi} \sigma_f^j(\mathbf{r}, E', t) \psi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) d\Omega' dE' \end{aligned} \quad (۱-۶)$$

$$+ \sum_l \chi_l(E) \lambda_l C_l(\mathbf{r}, t) + q_{ext}(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$$

$$\frac{\partial C_l(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \sum_j \beta_l^j v^j \int_0^{+\infty} \int_{4\pi} \sigma_f^j(\mathbf{r}, E', t) \psi(\mathbf{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) d\Omega' dE' - \lambda_l C_l(\mathbf{r}, t) \quad (۲-۶)$$

با یادآوری اینکه در این گزارش حروف و نمادهای ضخیم به منزله بردار تلقی می‌شوند، در دو رابطه فوق تفسیر جملات به شرح زیر است:

گذشته از معادله (۶-۲) که رابطه‌ای برای غلظت مولدهای نوترون تاخیری است، معادله (۶-۱) در حقیقت یک تعادل بین نرخ مصرف و تولید نوترون است. سمت راست (۶-۱) همگی جملات چشمه برای جهت Ω و انرژی E و زمان t بوده و سمت چپ نیز به ترتیب مبیّن تغییرات زمانی شار نوترون، نشت و حذف آن از جهت Ω و انرژی E در مکان \mathbf{r} در زمان t است. چنانچه وابستگی زمانی این معادله مطرح باشد «معادله وابسته به زمان ترابرد نوترون»^۸ یا «معادله وابسته به زمان بولتزمان»^۹ و چنانچه وابستگی زمانی آن حذف شود، «معادله حالت پایای^{۱۰} ترابرد نوترون» به دست می‌آید. همچنین با

^۸ Time-dependent neutron transport equation

^۹ Boltzmann

^{۱۰} Steady State

انتگرال گیری روی محدوده انرژی می توان وابستگی معادله (۱-۶) به انرژی را نیز از بین برد که در این صورت به معادله «تک گروهی (یا تک سرعتی) حالت پایای نوترون» تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \Omega) + \sigma_t(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, \Omega) \\ = \int_{4\pi} \sigma_s(\mathbf{r}, \Omega' \cdot \Omega) \psi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + \sum_j \nu^j \sigma_f^j(\mathbf{r}) \int_{4\pi} \psi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' \\ + q_{ext}(\mathbf{r}, E, \Omega, t) \end{aligned} \quad (3-6)$$

که در رابطه (۳-۶) از سهم نوترون های تاخیری صرف نظر شده است. چنانچه بازه انرژی به محدوده های متناهی و غیر همپوشان شکسته شده و انتگرال گیری روی هر یک از این محدوده ها صورت پذیرد، حاصل به «معادله چندگروهی حالت پایای ترابرد» معروف است. این معادله در جای خود مورد بررسی قرار می گیرد. شاید بخش اعظم مطالعات انجام شده در حوزه ترابرد نوترون به کار بر روی معادله پخش برمی گردد. برای دستیابی به این معادله ابتدا روی متغیر Ω در رابطه (۶-۱) انتگرال گیری می شود:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, E, t) + \nabla \cdot \int \boldsymbol{\Omega} \psi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) d\boldsymbol{\Omega} + \sigma_t(\mathbf{r}, E, t) \psi(\mathbf{r}, E, t) \\ = \int_0^{+\infty} \sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t) \psi(\mathbf{r}, E', t) dE' + \mathcal{S}(\mathbf{r}, E, t) \end{aligned} \quad (۴-۶)$$

که در این رابطه $\mathcal{S}(\mathbf{r}, E, t)$ شامل چشمه‌های خارجی و ناشی از شکافت می‌شود. حال کمیتی به نام بردار جریان را معرفی می‌کنیم:

$$J(\mathbf{r}, E, t) \equiv \int \boldsymbol{\Omega} \psi(\mathbf{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) d\boldsymbol{\Omega} \quad (۵-۶)$$

بنابراین رابطه (۴-۶) عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, E, t) + \nabla \cdot J(\mathbf{r}, E, t) + \sigma_t(\mathbf{r}, E, t) \psi(\mathbf{r}, E, t) \\ = \int_0^{+\infty} \sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t) \psi(\mathbf{r}, E', t) dE' + \mathcal{S}(\mathbf{r}, E, t) \end{aligned} \quad (۶-۶)$$

رابطه (۶-۶) به معادله تعادل^{۱۱} یا پایستاری^{۱۲} [۳۹-ص ۲۵] شهرت دارد. در نیل به معادله پخش نوترون از تقریبی استفاده می‌شود که قانون فیک^{۱۳} نام دارد:

$$J(\mathbf{r}, E, t) \approx -D(\mathbf{r}, E)\nabla\psi(\mathbf{r}, E, t) \quad (۷-۶)$$

که $D(\mathbf{r}, E)$ «ثابت پخش» نامیده می‌شود. با جایگذاری رابطه (۷-۶) در (۶-۶) «معادله وابسته به زمان پخش نوترون» به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(E)} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, E, t) - \nabla \cdot (D(\mathbf{r}, E)\nabla\psi(\mathbf{r}, E, t)) + \sigma_t(\mathbf{r}, E, t) \psi(\mathbf{r}, E, t) \\ = \int_0^{+\infty} \sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, t) \psi(\mathbf{r}, E', t) dE' + S(\mathbf{r}, E, t) \end{aligned} \quad (۸-۶)$$

¹¹ Balance Equation.

¹² Conservation

¹³ Fick's Law

همانطور که اشاره گردید، این معادله تنها به صورت تقریبی از معادله اصلی ترابرد نوترون بوده که دقت آن به تطبیق رابطه فیک (۶-۷) با فرایند واقعی پخش نوترون‌ها برمی‌گردد. متأسفانه این معادله تنها در شرایطی از دقت مناسب برخوردار است که فرض‌های زیر نزدیک به واقعیت باشد:

۱. ابعاد محیط نسبت به پویش آزاد متوسط نوترون‌ها^{۱۴} بزرگ باشد. بنابراین دقت معادله در اطراف مرزهای رآکتور تحلیل می‌رود؛
۲. محیط تا حد زیادی همگن باشد؛
۳. جذب نوترون‌ها ضعیف و پراکندگی تقریباً همسانگرد باشد؛
۴. در فاصله کوتاهی از محیط مورد بررسی چشمه نوترونی وجود نداشته باشد؛

¹⁴ Mean Free Path

۵. تغییرات شار نوترون نسبت به مکان (مشتق مکانی شار) اندک باشد، بنابراین در اطراف میله‌های کنترل، محیط‌های جاذب و یا مرزهای سامانه این معادله دقت ندارد؛ و
۶. تغییرات زمانی شار نوترون نسبت به مقدار آن، $\left| \frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dt} \right|$ ، باید خیلی کوچک‌تر از زمان لازم برای مهاجرت نوترون به فاصله چندین پویش آزاد متوسط باشد. این امر می‌طلبد که پویش آزاد متوسط نوترون‌ها ابعادی در حدود سانتی‌متر داشته باشد. [۳۸- ص ۱۲۹]

مشاهده می‌شود که تقریب‌های بکار رفته در تحصیل معادله پخش و اعتبار قانون فیک، در بسیاری از موارد کاملاً محدود کننده بوده و دقت آن زیر سؤال است. بنابراین روی آوردن به معادله اصلی ترابرد نوترون امری اجتناب‌ناپذیر می‌نماید. با این حال شاید بتوان گفت که بخش اعظم مطالعات در حوزه نوترونیک، به کار بر روی معادله پخش برمی‌گردد. این معادله علی‌رغم ضعف‌های مطروحه، پایه و اساس طراحی بسیاری از رآکتورهای حرارتی در حال کار امروزی را تشکیل

می‌دهد [۳۴-ص ۳۳۳]. لکن در رآکتورهای سریع ابعاد محیط رآکتور با پویش آزاد متوسط نوترون‌ها قابل مقایسه بوده و لذا از دقت قانون فیک کاسته می‌شود. ما نیز در این گزارش بررسی خود را متوجه معادله ترابرد نوترون نموده و تلاش می‌نماییم که روش مناسبی را برای حل آن در محیط‌های چند بعدی توسعه دهیم.

۶-۲- روش‌های حل عددی معادله ترابرد نوترون

همان‌گونه که دیده می‌شود، رابطه (۶-۱) یک معادله انتگرو- دیفرانسیلی^{۱۵} وابسته به هفت متغیر مستقل است. علاوه بر آن رفتار سطوح مقاطع با تغییرات انرژی بسیار پیچیده بوده و افت و خیزهای نامرتب فراوانی موسوم به تشدید^{۱۶} دارد. به

¹⁵ Integro-differential

¹⁶ Resonance

همین دلیل حل تحلیلی این معادله جز در برخی مسائل الگو با سطح دانش فعلی در حوزه آنالیز و حسابان ناممکن بوده و شاید اساساً میسر نباشد. در پاسخ به نیاز مهندسان برای یافتن حل‌های قابل اطمینان در طراحی تاسیسات و سامانه‌های هسته‌ای (رآکتورها، آشکارسازها، شتاب‌دهنده‌ها، حفاظ‌های پرتو و...) روش‌های عددی زیادی توسعه یافته‌اند که اغلب آنان رابطه (۶-۱) را به دسته معادلاتی تقریبی تبدیل نموده و سپس با استفاده از رایانه به حل آن می‌پردازند. در این میان می‌توان به برخی از مشهورترین این روش‌ها اشاره نمود. [۴۶- ص ۲۱]

• روش هماهنگ‌های کروی $(P_N)^{17}$:

در این روش وابستگی شار زاویه‌ای توسط هماهنگ‌های کروی بسط داده می‌شود. چنانچه این بسط تا مرتبه N ادامه یافته و از بقیه مراتب بسط صرف‌نظر شود (یعنی $N+1$ جمله اول با احتساب P_0 برگزیده شود)، آنگاه این ترتیب به بسط

¹⁷ Spherical Harmonics Method

P_N معروف خواهد بود. با جایگذاری این بسط در معادله اصلی و استفاده مکرر از رابطه تعامد هماهنگ‌های کروی یک مجموعه متناهی از معادلات همزمان بدست می‌آید که به معادلات P_N مشهور است. اثبات می‌شود که با استفاده از بسط P_1 در وابستگی زاویه‌ای و تقریب فیک می‌توان به معادله پخش نوترون دست یافت. [۲۵-۲۵] [۱۳۹ ص ۲۵-۲۵] فصل ۱۰-۱۲].

اگر چه روش P_N در یک بعد نتایج نیمه تحلیلی عالی را فراهم می‌آورد، لکن تا همین اواخر حل عملی آن در ابعاد بالاتر با مشکلاتی از جمله مصرف حافظه زیاد دست به گریبان بوده است. در میان کدهای مبتنی بر این روش می‌توان به کد MARC که توسط فیلچر^{۱۸} توسعه یافته اشاره نمود. این کد قادر به حل معادله چندگروهی حالت پایای ترابرد نوترون هم به روش اجزای محدود و هم به روش اختلاف محدود است. در مرجع [۲۵] بحث نسبتاً جامعی پیرامون این روش مطرح شده است.

¹⁸ Fletcher

• روش جهت‌های گسسته^{۱۹} (SN):

این روش یکی از قدرتمندترین و پرکاربردترین ابزارهای موجود در مطالعات ترابرد نوترون برای رآکتور است. در این روش محدوده متغیر Ω به چندین جهت مجزا شکسته شده و به هریک از این جهت‌ها یک وزن اختصاص می‌یابد. انتگرال موجود در معادله ترابرد نوترون توسط این وزن‌ها تقریب زده شده و نهایتاً معادله روی هریک از این جهت‌ها مقداردهی می‌شود. با این حال روش جهت‌های گسسته از دو ضعف عمده رنج می‌برد. ضعف نخست به «اثر پرتو»^{۲۰} معروف بوده و در اثر آن نمودار ارایه شده توسط روش SN حول جواب دقیق مسئله نوسان می‌کند. دلیل این امر آن است که در گسسته‌سازی و محدود کردن Ω به جهت‌های خاص برخی چشمه و چاه‌های موجود در محیط گم می‌شود. اگرچه بالاتر

¹⁹ Discrete Ordinates Method

²⁰ Ray Effect

بردن شمار این جهت‌ها به کاهش اثر کمک می‌کند، لکن این امر به طولانی شدن زمان لازم برای همگرایی حل انجامیده و حافظه بیشتری را نیز طلب می‌کند.

نقص دوم روش S_N محدود بودن آن به اشکال هندسی ساده است. اگر چه برای رفع این نقیصه می‌توان محیط مورد بررسی را به مش‌بندی‌های ظریف‌تر مزین نمود، اما این کار شمار معادلات آماده شده برای حل را افزایش می‌دهد. دیوسیون [۲۵-ص ۱۸۹] در مقام مقایسه، برتری S_N بر P_N را به ویژه در حالات چند بعدی بعید دانسته، لکن هنری [۳۴-ص ۳۶۷] در اظهار نظری متفاوت این روش را برای حل مسائل رآکتور در جایی که تقریب پخش دقیق نباشد، بسیار مفید برشمرده و مزیت‌هایی را برای آن نسبت به روش P_N قایل شده است. به نظر می‌رسد که متأخرین پس از دیوسیون روش S_N را مفیدتر دانسته و بر کاربرد آن تأکید کرده‌اند. با این حال به نظر می‌رسد که در این اواخر حجم مقالات پیرامون روش P_N مجدداً افزایش یافته است. به هر حال روش جهت‌های مجزا یک روش کاملاً جا افتاده بوده و

کدهای مختلفی از جمله ANISN، TWOTRAN، DORT و... بر پایه آن توسعه یافته‌اند. این کدها غالباً از روش اختلاف محدود در تحلیل بخش فضایی بهره می‌برند. مرجع [۳۹] برای افزایش اطلاعات پیرامون این روش و نقایص و مزایای آن بسیار مفید به نظر می‌رسد.

- روش‌های ترابرد انتگرالی^{۲۱}:

لازم به ذکر است که علاوه بر شکل انتگرو-دیفرانسیلی معادله ترابرد، (۶-۱)، نوع دیگری از بیان رفتار نوترون تحت عنوان معادله انتگرالی ترابرد میسر است که به دلیل عدم نیاز از اشاره به آن خودداری گردید. این معادله از انتگرال‌گیری روی فضای فاز بدست می‌آید. یک روش خاص در بررسی این انتگرال، به روش احتمال برخورد^{۲۲} موسوم است. در این روش‌ها معادله مذکور به گونه‌ای شکسته می‌شود که حاصل، ماتریس‌های کاملاً پر از درایه است. بنابراین کاربرد آن به

²¹ Integral Transport Methods

²² Collision Probability Method

مسائل ی با تراکم کم محدود می‌شود. کدهایی مانند DRAGON، RIPPLE، SURCU و THERMOS برای حل مسائل به روش ترابرد انتگرالی توسعه یافته‌اند.

- روش مونت کارلو^{۲۳}:

در این روش برخلاف سایر روش‌های ذکر شده معادله ترابرد نوترون حل نمی‌شود، بلکه رفتار نوترون از زمان تولد یا ورود به سیستم شبیه‌سازی شده و فرایندهای پیش روی آن تا هنگام جذب یا نشت از محیط به شکلی احتمالی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای هر ذره یک عدد تصادفی ایجاد شده و بر اساس آن نحوه پخش نوترون‌ها تحلیل می‌شود. مزیت این روش عدم محدودیت بر روی اشکال هندسی پیچیده بوده، لکن به دلیل نیاز به شبیه‌سازی رفتار تعداد بسیار زیادی از نوترون‌ها برای نیل به توزیع واقعی، زمان لازم برای انجام محاسبات و ایجاد تاریخچه طولانی‌تر است. با این حال روش

²³ Monte Carlo Method

مونت کارلو یکی از قوی‌ترین روش‌های بررسی نوترونیک بوده و به ویژه در آخرین مراحل که قصد طراحی بر اساس داده‌های موجود از سایر کدها وجود دارد، این روش را برای اطمینان بخشی نهایی بکار می‌گیرند. در میان کدهای موجود که براساس این روش توسعه یافته‌اند می‌توان به MORSE، KENO، MACBEND و شاید قوی‌ترین و قابل‌ترین آنها MCNP اشاره نمود. این کدها علاوه بر قابلیت حل مسائل ترابرد نوترون توانایی بررسی فوتونیک (ترابرد گاما) در محیط و یا هر دو مورد را به صورت همزمان دارا می‌باشند.

در این گزارش قصد داریم تا گونه دیگری از روش‌های ممکن برای حل معادله ترابرد نوترون در حالت چندگروهی و چند بعدی را با استفاده از روش‌های وردشی^{۲۴} و بسط هماهنگ‌های کروی روی زاویه و نیز استفاده از اجزای محدود^{۲۵} روی

²⁴ Variational Methods

²⁵ Finite Element Method

متغیرهای فضایی معرفی نماییم. ولی پیش از آن لازم است تا به طور مختصر با پیشینه روش‌های وردشی آشنایی یافته و کلیات آن معرفی گردند.

۷- کاربرد اصول وردشی در فیزیک رآکتور

۷-۱- مشابهت فیزیک رآکتور با فیزیک کلاسیک

در بسیاری از مسائل فیزیکی با توجه به قیود وضع شده بر سامانه، متغیرها (طول، جرم، سرعت و...) به گونه‌ای خود را مرتب می‌کنند که یک تابعی ناشی از طبیعت مسئله به طور خودکار کمینه و یا بیشینه شود. این تابعی را ژوزف لویی

لاگرانژ در سال ۱۷۸۸ در کتاب خود تحت عنوان مکانیک تحلیلی^{۲۶} معرفی کرده و نشان داد که بسیاری از مسائل مطرح در مکانیک کلاسیک را می‌توان تحت عنوان یک اصل وردشی خلاصه نمود: «اصل کمترین کنش». در همین راستا وی تابع لاگرانژ $\mathcal{L} \equiv T - U$ را معرفی نمود که در آن T انرژی جنبشی و U انرژی پتانسیل سیستم است.

لاگرانژ نشان داد که اگر \mathcal{L} به صورت تابعی از زمان، مختصات تعمیم یافته q_i و مشتقات زمانی آن‌ها \dot{q}_i باشد یعنی $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, q_i, \dot{q}_i)$ ، آنگاه معادله رابطه مشهور $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ برای هر ذره مورد بحث در سیستم را می‌توان از طریق معادله اویلر-لاگرانژ زیر تحصیل نمود:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (1-7)$$

²⁶ *Mechanique Analytique*

این معادله ناشی از آن است که طبیعت، کنش زمانی تابع لاگرانژ را برای هر سیستم مکانیکی کمینه یا بیشینه می‌کند و لذا «تابعی کنش^{۲۷}» که به صورت

$$S[q] \equiv \int_0^t \mathcal{L}(t, q_i, \dot{q}_i) dt \quad (۲-۷)$$

تعریف می‌شود، وابستگی لاگرانژی \mathcal{L} را به زمان به مختصات q_i و مشتقات زمانی آن به گونه‌ای تنظیم می‌کند که کمترین کنش ممکن رخ دهد.

مشابه این مطلب در فیزیک رآکتور نیز صادق است و در واقع با توجه به هندسه رآکتور، شرایط مرزی و اولیه و نیز چینش چشمه در رآکتور شکل شار نوترون در آن به گونه‌ای سامان می‌یابد که نوعی از اصل کمترین کنش در آن رعایت شود. تابعی لازم برای یک سامانه مستقل از زمان، روی حجم و سطوح در برگیرنده آن تعریف می‌شود [۱۱- ص ۲۷۵].

²⁷ Action functional

طور کلی هنگامی که تابعی سیستم حاوی مشتقاتی از مرتبه m است، معادله اوپلر-لاگرانژ حاصل از مرتبه $2m$ خواهد بود. بنابراین استفاده از معادلات اوپلر-لاگرانژ کلاسیکی تنها هنگامی میسر است که یک معادله ترابرد از درجه دوم وجود داشته باشد و لذا امکان ایجاد مستقیم معادلات درجه اول ترابرد نوترون چه در حالت مستقل از زمان و چه وابسته به آن فراهم نیست. دودرشتات^{۲۸} و مارتین^{۲۹} [۳۱] در یک نگاه بدبینانه چنین ابراز کرده‌اند که چون معادله درجه اول ترابرد خود الحاق نیست، پس اساساً اصول اکسترمی^{۳۰} برای آن وجود ندارد. اما اکروید^{۳۱} در نقد این عبارت چنین می‌گوید [۱۱-ص ۲۷۵] «این بیان از این لحاظ صحیح است که اصل اکسترمی ناشی از معادله اوپلر-لاگرانژ کلاسیکی برای

²⁸ J. J. Duderstadt

²⁹ W. R. Martin

³⁰ Extermum Principle

³¹ Ronald T. Ackroyd (1921-2006)

معادله درجه اول ترابرد نوترون وجود ندارد، چرا که دیویسون^{۳۲} [۲۵- فصل ۱۵] برای معادله انتگرالی ترابرد نوترون در محیطی با پراکندگی همسانگرد یک اصل وردشی ارائه داده است.

خود اکروید نیز در سال ۱۹۸۳ پس از آنکه ماگری^{۳۳} [۴۲] در سال ۱۹۷۴ اثبات نمود که برای هر معادله خطی یک اصل وردشی وجود دارد، طی مقاله‌هایی [۵-۶] برای معادله درجه اول ترابرد در حالت پایا یک اصل وردشی ارائه نموده و سپس در سال ۱۹۹۴ به کمک دی اولیویرا^{۳۴} آن را به حالت وابسته به زمان تعمیم می‌دهد [۷]. در تمام دهه هشتاد و نود میلادی اکروید به کمک شاگردان خویش و نیز سایرین به طور جداگانه، اصول وردشی متعددی را برای حل معادلات ترابرد نوترون معرفی کردند که ویژگی اکثر آنها عدم نیاز به ارضای شرایط مرزی برای یافتن تابع شار است.

³² B. Davison

³³ F. Magri

³⁴ C. R. E. de Oliveira

در برخی از این اصول تنها لازم است که تابع آزمون بکار رفته پیوسته قطعه‌ای بوده، بدان معنی که روی عناصر^{۳۵} فضا پیوسته بوده در حالی که در برخی دیگر از اصول تعمیم یافته، ارضای همین شرط نیز ضرورت ندارد. یکی از کاربردهای مهم این اصول وردشی آن است که به کمک آنها می‌توان حد بالا و پایینی را (بسته به دقت تابع آزمون) بر ویژگی‌های کلی یک رآکتور از جمله عامل عدم مزیت^{۳۶} در سلول‌های سوختی وضع نمود که نانه^{۳۷} [۴۷ و ۸] و اسپلاوسکی^{۳۸} [۵۳] و [۳۴] در پایان‌نامه‌های خود تحت هدایت اکروید به خوبی به آن پرداخته‌اند که در جای مناسب خود به آن اشاره خواهد شد. هر دو نفر در روش خود از مربع کمینه تعمیم یافته برای یافتن اصول وردشی معادله ترابرد استفاده کرده‌اند. مناسب‌تر آن است که پیش از ادامه بحث به معرفی این روش بپردازیم.

³⁵ element

³⁶ Disadvantage Factor

³⁷ M. M. Nanneh

³⁸ B. A. Splawsky

۷-۲- روش مربع کمینه^{۳۹}

این روش ابتدا در مسائل مربوط به کشسانی در مکانیک مورد استفاده قرار گرفته و سپس به سایر حوزه‌های مهندسی تعمیم داده شد. رهیافت نسبتاً ساده‌ای از این روش به صورت زیر است. فرض می‌کنیم ϕ_0 روی حجم V پاسخ معادله زیر بوده و روی مرزهای آن، ∂V ، نیز برابر ψ است:

$$M\phi_0 = S \quad (۳-۷)$$

حال اگر یک تابع ϕ تقریبی از ϕ_0 باشد، روش مربع کمینه معمول طلب می‌کند که تابعی زیر کمینه شود:

$$F[\phi] = \int_V (M\phi - S)^2 dV + \lambda \int_{\partial V} (\phi - \psi)^2 dS \quad (۴-۷)$$

³⁹ Least Square Method

که λ یک پارامتر است که باید به طور مناسبی انتخاب شود. بنابراین چنانچه یک تابع تقریب به صورت $\phi = \phi_0 + \varepsilon\eta$ در نظر بگیریم که ε یک ثابت کوچک دلخواه و η یک تابع خوش رفتار دلخواه باشد، آنگاه تابعی مربوطه برابر است با:

$$\begin{aligned}
 F[\phi] &= F[\phi_0 + \varepsilon\eta] = \int_V [\mathbb{M}(\phi_0 + \varepsilon\eta) - \mathbb{S}]^2 dV + \lambda \int_{\partial V} (\phi_0 + \varepsilon\eta - \psi)^2 dS \\
 &= \int_V \{(\mathbb{M}\phi_0)^2 + \mathbb{S}^2 + \varepsilon^2(\mathbb{M}\eta)^2 + 2\varepsilon[(\mathbb{M}\phi_0)(\mathbb{M}\eta) - \mathbb{M}\eta\mathbb{S}] - 2\mathbb{M}\phi_0\mathbb{S}\} dV \\
 &\quad + \lambda \int_{\partial V} [(\phi_0 - \psi)^2 + 2\varepsilon\eta(\phi_0 - \psi) + \varepsilon^2\eta^2] dS
 \end{aligned} \tag{5-7}$$

بنابراین:

$$F[\phi] = F[\phi_0] + \delta F[\phi_0] + \delta^2 F[\phi_0] \tag{6-7}$$

برای کمینه بودن تابعی F به ازای ϕ لازم است که وردش نخست آن، (δF) ، در اثر تغییرات برابر صفر باشد. بنابراین جمله خطی برحسب \mathcal{E} باید برای ارضای این شرط متحد با صفر باشد:

$$\int_V [(\mathbb{M}\phi_0)(\mathbb{M}\eta) - \mathbb{M}\eta\mathbb{S}]dV + \lambda \int_{\partial V} \eta(\phi_0 - \psi)dS = 0. \quad (7-7)$$

با استفاده از فرمول گرین^{۴۰}:

$$\int uLv dV = \int vL^*udV \quad (8-7)$$

که در رابطه بالا L^* مزدوج مختلط L است، رابطه (7-7) تبدیل می شود به:

$$\int_V \eta\mathbb{M}^*[\mathbb{M}\phi_0 - \mathbb{S}]dV + \lambda \int_{\partial V} \eta(\phi_0 - \psi)dS = 0 \quad (9-7)$$

⁴⁰ Green's Formula

و چون رابطه (۷-۷) باید به ازای هر مقدار η برقرار باشد تنها چاره آن است که:

$$V: M^*M\phi_0 - M^*S = 0 \quad ; \quad \partial V: \phi_0 = \psi \quad (۱۰-۷)$$

مشاهده می‌شود که به جای رسیدن به معادله اصلی یعنی (۷-۳) به معادله (۷-۱۰) دست یافته‌ایم که برای ϕ_0 یک معادله از مراتب بالاتر مشتق‌پذیری است. (اگر M یک عملگر دیفرانسیلی باشد M^*M عملگری از مراتب بالاتر است). نتیجتاً باید دقت نمود که آیا تابع تقریبی ϕ شرایط لازم برای ارضای (۷-۱۰) را دارد یا خیر. علاوه بر آن با این معادله اخیر تابع تقریب باید مراتب بالاتری از پیوستگی را نسبت به تابع اصلی ϕ_0 داشته باشد. برای رفع این مشکل می‌توان گونه دیگری از روش مربع کمینه را بررسی نمود که در زیر به آن پرداخته می‌شود: [۴-ص ۶] [۴۵-ص ۴۰] [۱۱-ص ۱۶]

۷-۳- روش مربع کمینه تعمیم یافته^{۴۱}

در این روش باقیمانده $R \equiv M\phi_0 - S$ ناشی از استفاده از تابع تقریب ϕ به جای ϕ_0 توسط یک تابع یا عملگر وزن می‌شود تا تابعی خطا کمینه شود:

$$F[\phi] = \int_V (M\phi - S)W(M\phi - S)dV + \lambda \int_{\partial V} (\phi - \psi)^2 dS \quad (۷-۱۱)$$

این روش عمومی‌تر از روش مربع کمینه معمولی بوده و برای استفاده در ترابرد نوترون مناسب‌تر است. ثانیاً اگر تابع یا عملگر W خود الحاق^{۴۲} و مثبت قطعی^{۴۳} باشد، [این مفاهیم در ادامه تفسیر خواهند شد] تابعی مذکور تنها در صورتی کمینه خواهد شد که معادله (۷-۳) در تمام حجم فضا ارضا شود. [۴-ص]

⁴¹ Generalized Least Square Method

⁴² Self-Adjoint

۷-۴- معادله درجه دوم ترابرد نوترون

همان گونه که اشاره شد به دلیل آن که معادله ترابرد نوترون یک معادله درجه اول است، امکان استفاده از روش وردشی کلاسیک مستقیماً برای آن وجود ندارد. لکن می‌توان با تبدیل این معادله به دو معادله درجه دوم از روش مذکور بهره گرفت. این کار از طریق تبدیل معادله درجه اول به دو معادله با پارितه زوج و فرد میسر است که این دو معادله از یکدیگر مستقل بوده اما مکمل محسوب می‌شوند. به اعتقاد لویس^{۴۴} و میلر^{۴۵} اخیراً معادله ترابرد نوترون با پارگی^{۴۶} زوج مورد توجه قرار گرفته، چرا که «در این روش معادلات درون گروهی را می‌توان به روش وردشی بگونه‌ای مرتب نمود که بتوان بازه‌ای از روش‌های تقریبی را برای حل معادلات همزمان بدست آمده در قالب ماتریس‌های متقارن بکار گرفت.» نتیجتاً

⁴³ Positive Definite

⁴⁴ E. E. Lewis

⁴⁵ W. F. Miller

⁴⁶ Parity

«معادلات با پارितه زوج یک روش نسبتاً راحت را برای مقایسه با سایر روش‌ها و نیز توسعه روش‌های جدید فراهم می‌آورد.» [۳۹-ص ۲۵۷]

اگر چه این جملات به سال ۱۹۸۴ میلادی برمی‌گردد، لکن شواهد نشان می‌دهد که حداقل لویس همچنان بر عقیده خود مبنی بر فزاینده بودن توجهات به سوی معادلات با پارگی زوج (درجه دوم) تاکید می‌کند. [۵۲- فصل ۲]. ذوالفقاری [۱-ص ۷] بیان می‌کند که «متأسفانه معادله درجه اول ترابرد نوترون به صورت خود الحاق نبوده و هر چند بیان یک اصل وردشی برای آن میسر است، لکن اگر یک اصل وردشی برای یافتن جواب‌های تقریبی معادله درجه اول مورد استفاده قرار گیرد، اولاً ممکن است که این حل بهترین حل ممکن نبوده و ثانیاً منجر به تولید دسته معادلات نامتقارنی خواهد شد که حل آن به کمک رایانه زمان و هزینه بیشتری [نسبت به روش‌های معمول حل عددی] طلب می‌کند». بنابراین یکی از دلایل روز افزون بودن تمایلات به استفاده از معادلات درجه دوم آن است که «این معادلات از ویژگی خود الحاقی

برخوردار بوده و بنابراین منجر به تولید دسته معادلات مقارنی شده که امکان حل آن با روش‌های استاندارد عددی فراهم است.» [۳۹-۲۷۵]. از آنجا که در نوشتجات ذکر شده یکی از مزیت‌های معادله ترابرد درجه دوم «خود الحاقی» آن بیان گردیده، پیش از تحصیل معادلات مربوطه به شرح و تفصیل این مفهوم می‌پردازیم.

۷-۵- خودالحاقی و اهمیت آن

معادله الحاقی ترابرد نوترون دارای کاربردهای گوناگون محاسباتی بوده و به ویژه آنجا که از روش‌های مونت کارلو در محاسبات استفاده می‌شود، اهمیت ویژه‌ای می‌یابد. همچنین معادله الحاقی کاربرد وسیعی در محاسبات اختلالی داشته و آنجا که تغییرات اندکی در ویژگی‌های محیط ایجاد می‌شود، به کمک معادله الحاقی می‌توان محاسبات ساده‌تری را برای یافتن تأثیر این اختلالات بر عملکرد سیستم انتظار داشت.

با این حال یک راه فرار از رجوع به معادله الحاقی آن است که خود معادله ترابرد نوترون را به گونه‌ای بازنویسی کنیم که دارای عملگرهای خود الحاقی حقیقی باشد. اگر چنین امری میسر گردد، هنگام تقلیل فضای پیوسته توابع در فضای هیلبرت (ماتریس بی نهایت بعدی) به فضای متناهی (با استفاده از اجزای محدود) می‌توان انتظار یک دسته معادلات

مقارن را داشت که این مزیت، حل معادلات ماتریسی بدست آمده را روان تر کرده و حافظه به مراتب کمتری از رایانه را اشغال خواهد کرد. این امر به نوبه خود در زمان لازم برای محاسبات صرفه جویی قابل توجهی را امکانپذیر می کند.

۷-۶- فرمول بندی معادله ترابرد نوترون با پارگی^{۴۷} زوج و فرد

همان گونه که قید شد، یکی از دلایل توجه فزاینده به معادلات زوج یا فرد پاره، خود الحاقی این معادلات و در نتیجه تقارن معادلات بدست آمده هنگام اعمال روش اجزای محدود بر آن است. برای دستیابی به این معادلات از معادله انتگرو دیفرانسیلی و تک گروهی ترابرد نوترون شروع می کنیم. فرض می کنیم محیط مورد بررسی ما از یک حجم V با مرزهای

⁴⁷ Parity

بازتابنده کامل S_{pr}^{48} ، مرز خلأ (آزاد یا برهنه) S_b^{49} ، مرز آلبدو S_a^{50} و مرزی با چشمه سطحی S_s تشکیل شده است که چشمه حجمی $\mathcal{S}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ در تمام آن پخش شده است. چشمه حجمی مذکور می‌تواند ترکیب چشمه‌های شکافت و چشمه ثابت داخلی باشد:

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \equiv \nu \sigma_f(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) + q(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \quad (12-7)$$

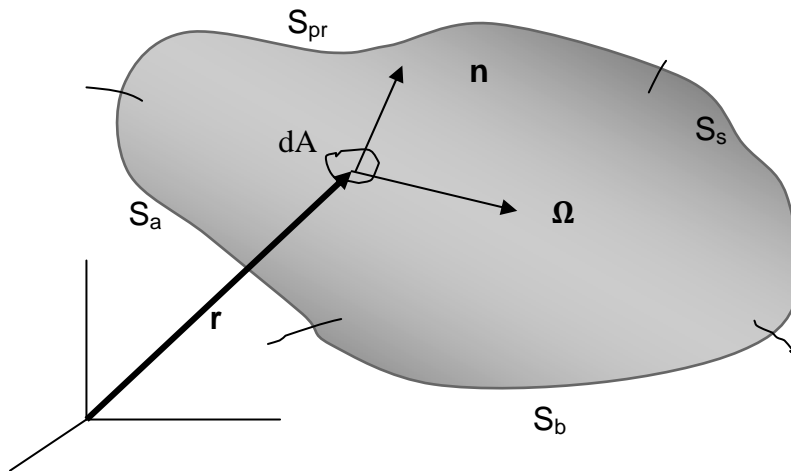
بنابراین درون حجم V معادله زیر برقرار است:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + \sigma_t(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \int_{4\pi} \sigma_s(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') \psi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') d\Omega' + \mathcal{S}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \quad ; \quad \mathbf{r} \in V \quad (13-7)$$

⁴⁸ Perfect Reflector

⁴⁹ Bare (free-vacuum) Surface

⁵⁰ Albedo



شکل ۱: حجم مورد بررسی با چهار نوع مرز

شروط مرزی چهارگانه این معادله عبارتند از:

- مرز آزاد (خلاً- برهنه) (S_b):

این مرز در تماس مستقیم با خلاً بوده و نوترونی که از این مرز به خارج می‌گریزد، دیگر به آن برنمی‌گردد. این مرز نمی‌تواند چنان تقعری داشته باشد که نوترون خارج شده از یک سو از سوی دیگر آن به سیستم بازگردد^{۵۱}. مثلاً سطحی که روی شکل با علامت S_{pr} مشخص شده نمی‌تواند یک سطح خلا باشد، چرا که احتمال بازگشت نوترون به آن وجود دارد. لذا روی این مرز داریم:

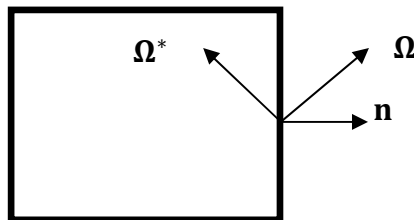
$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}_b, \boldsymbol{\Omega}) = 0 & ; \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} < 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_b \in S_b \\ \psi(\mathbf{r}_b, -\boldsymbol{\Omega}) = 0 & ; \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} > 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_b \in S_b \end{cases} \quad (۱۴-۷)$$

⁵¹ non-re-entrant boundary

(با تقریب خوبی می توان مرز متصل به جاذب قوی را مشابه مرز خلأ دانست)

- مرز بازتابنده کامل (S_{pr}):

عملکرد این سطح در خصوص نوترون همانند عملکرد آینه در مقابل نور است (شکل ۲). به ازای هر نوترونی که در جهت Ω از سطح گذر می کند یک نوترون با همان انرژی در جهت Ω^* به درون حجم وارد می شود:



شکل ۲: مرز بازتابنده کامل

$$\psi(\mathbf{r}_{pr}, \boldsymbol{\Omega}) = \psi(\mathbf{r}_{pr}, \boldsymbol{\Omega}^*) \quad ; \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} = -\boldsymbol{\Omega}^* \cdot \mathbf{n} \neq 0 \quad \text{and} \quad (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}^*) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_{pr} \in S_{pr} \quad (15-7)$$

استفاده از مرز بازتابنده کامل در مواقعی که تقارن مسئله اجازه می‌دهد، باعث کاهش قابل توجه محاسبات از طریق حذف قسمت‌های مشابه یا متقارن می‌شود.

• مرز با چشمه سطحی (S_s):

چنانچه یک چشمه سطحی به قدرت T روی بخشی از مرزهای حجم V گذاشته شود، شار زاویه‌ای نوترون در جهت ورودی به حجم روی مرز آن برابر با قدرت چشمه است:

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) = T(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) & ; \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} < 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_s \in S_s \\ \psi(\mathbf{r}_s, -\boldsymbol{\Omega}) = T(\mathbf{r}_s, -\boldsymbol{\Omega}) & ; \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} > 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_s \in S_s \end{cases} \quad (16-7)$$

• مرز آلبدو (S_a):

در این مرز به ازای هر نوترون گذرنده از آن، ρ نوترون (که $\rho < 1$) در جهت عکس با همان انرژی به حجم بر می گردد.

$$\psi(\mathbf{r}_a, -\Omega) = \rho \psi(\mathbf{r}_a, \Omega) \quad ; \quad \Omega \cdot \mathbf{n} > 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_a \in S_a \quad (17-7)$$

این مرز در بیان عملکرد بازتابنده‌ها موثر بوده و در حالت چند گروهی ρ برای هر گروه انرژی ممکن است متفاوت باشد.

حال معادله (7-13) را برای جهت $-\Omega$ بازنویسی می کنیم:

$$-\Omega \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, -\Omega) + \sigma_t(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, -\Omega) = \int_{4\pi} \sigma_s(\mathbf{r}, -\Omega, \Omega') \psi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + \mathcal{S}(\mathbf{r}, -\Omega) \quad ; \quad \mathbf{r} \in V \quad (18-7)$$

با جمع و تفریق دو معادله (7-13) و (7-18) دو معادله اضافی به شرح زیر بدست می آید:

$$\Omega \cdot \nabla \psi^-(\mathbf{r}, \Omega) + \mathbb{C} \psi^+(\mathbf{r}, \Omega) = \mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \Omega) \quad (19-7)$$

$$\Omega \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \Omega) + \mathbb{G}^{-1} \psi^-(\mathbf{r}, \Omega) = \mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \Omega) \quad (20-7)$$

در روابط بالا ψ^+ و ψ^- به ترتیب بیانگر شار زاویه‌ای زوج و فرد بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\psi^+(\mathbf{r}, \Omega) \equiv \frac{1}{2} [\psi(\mathbf{r}, \Omega) + \psi(\mathbf{r}, -\Omega)] \quad (21-7)$$

$$\psi^-(\mathbf{r}, \Omega) \equiv \frac{1}{2} [\psi(\mathbf{r}, \Omega) - \psi(\mathbf{r}, -\Omega)] \quad (22-7)$$

همچنین \mathcal{S}^+ و \mathcal{S}^- نشانگر چشمه‌های زوج و فرد بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathcal{S}^\pm(\mathbf{r}, \Omega) \equiv \frac{1}{2} [\mathcal{S}(\mathbf{r}, \Omega) \pm \mathcal{S}(\mathbf{r}, -\Omega)] \quad (23-7)$$

عملگر \mathbb{C} به نام عملگر حذف معروف بوده و تعریف آن عبارت است از:

$$\mathbb{C}f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \equiv \sigma_t(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) - \int_{4\pi} \frac{1}{2} [\sigma_s(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') + \sigma_s(\mathbf{r}, -\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}')] f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') d\Omega' \quad (24-7)$$

نیز عملگر \mathbb{G} به نام عملگر نشت شناخته شده و معکوس آن چنین تعریف می شود:

$$\mathbb{G}^{-1}f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \equiv \sigma_t(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) - \int_{4\pi} \frac{1}{2} [\sigma_s(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') - \sigma_s(\mathbf{r}, -\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}')] f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') d\Omega' \quad (25-7)$$

و البته می توان از تعریف سطوح مقاطع زوج و فرد نیز در دو رابطه بالا بهره جست:

$$\sigma_s^\pm(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') = \frac{1}{2} [\sigma_s(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') \pm \sigma_s(\mathbf{r}, -\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}')] \quad (26-7)$$

نهایتاً با توجه به شروط یاد شده، شرایط مرزی مرتبط با جفت معادلات (7-19 و 7-20) عبارت است از:

- مرز آزاد (خلا)

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}_b, \boldsymbol{\Omega}) = \psi^+(\mathbf{r}_b, \boldsymbol{\Omega}) + \psi^-(\mathbf{r}_b, \boldsymbol{\Omega}) = 0 & ; \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} < 0 \text{ and } \mathbf{r}_b \in S_b \\ \psi(\mathbf{r}_b, -\boldsymbol{\Omega}) = \psi^+(\mathbf{r}_b, \boldsymbol{\Omega}) - \psi^-(\mathbf{r}_b, \boldsymbol{\Omega}) = 0 & ; \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} > 0 \text{ and } \mathbf{r}_b \in S_b \end{cases} \quad (27-7)$$

- مرز بازتابنده کامل

$$\begin{cases} \psi^+(\mathbf{r}_{pr}, \boldsymbol{\Omega}) = \psi^+(\mathbf{r}_{pr}, \boldsymbol{\Omega}^*) & ; \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} = -\boldsymbol{\Omega}^* \cdot \mathbf{n} \neq 0 \text{ and } (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}^*) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ and } \mathbf{r}_{pr} \in S_{pr} \\ \psi^-(\mathbf{r}_{pr}, \boldsymbol{\Omega}) = \psi^-(\mathbf{r}_{pr}, \boldsymbol{\Omega}^*) & ; \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} = -\boldsymbol{\Omega}^* \cdot \mathbf{n} \neq 0 \text{ and } (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}^*) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ and } \mathbf{r}_{pr} \in S_{pr} \end{cases} \quad (28-7)$$

- مرز با چشمه سطحی

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) = \psi^+(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) + \psi^-(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) = T(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) & ; \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} < 0 \text{ and } \mathbf{r}_s \in S_s \\ \psi(\mathbf{r}_s, -\boldsymbol{\Omega}) = \psi^+(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) - \psi^-(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) = T(\mathbf{r}_s, -\boldsymbol{\Omega}) & ; \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} > 0 \text{ and } \mathbf{r}_s \in S_s \end{cases} \quad (29-7)$$

- مرز آلبدو

$$\begin{cases} (1 - \rho)\psi^+(\mathbf{r}_a, \boldsymbol{\Omega}) + (1 + \rho)\psi^-(\mathbf{r}_a, \boldsymbol{\Omega}) = 0 & ; \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} < 0 \text{ and } \mathbf{r}_a \in S_a \\ (1 - \rho)\psi^+(\mathbf{r}_a, \boldsymbol{\Omega}) - (1 + \rho)\psi^-(\mathbf{r}_a, \boldsymbol{\Omega}) = 0 & ; \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} > 0 \text{ and } \mathbf{r}_a \in S_a \end{cases} \quad (30-7)$$

ویژگی‌های زیر برای چگالی شار زاویه‌ای زوج و فرد ثابت است:

$$\psi^+(\mathbf{r}, -\Omega) = \psi^+(\mathbf{r}, \Omega) \quad ; \quad \psi^-(\mathbf{r}, -\Omega) = -\psi^-(\mathbf{r}, \Omega) \quad (31-7)$$

همچنین شار زاویه‌ای اصلی نیز جمع دو چگالی شار زاویه‌ای مثبت و منفی است:

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega) = \psi^+(\mathbf{r}, \Omega) + \psi^-(\mathbf{r}, \Omega) \quad (32-7)$$

برای شار نرده‌ای $^{\text{H}^2}$ نوترون نیز می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \psi(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega = \int_{4\pi} \psi^+(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega \quad (33-7)$$

چرا که به دلیل فرد بودن $\psi^-(\mathbf{r}, \Omega)$ نسبت به Ω :

$$\int_{4\pi} \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega = 0. \quad (34-7)$$

حال اگر معادلات (۱۹-۷) و (۲۰-۷) را به صورت زیر بازنویسی کرده:

$$\psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \mathbb{C}^{-1}[\mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})] \quad (35-7)$$

$$\psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \mathbb{G}[\mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})] \quad (36-7)$$

و آنگاه برای حذف ψ^- در (۱۹-۷) از (۳۶-۷) و برای حذف ψ^+ در (۲۰-۷) از (۳۵-۷) استفاده نماییم. جفت معادلات زیر مستقل از یکدیگر بدست می آیند:

$$-\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbb{G} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + \mathbb{C} \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbb{G} \mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \quad (37-7)$$

$$-\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbb{C}^{-1} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + \mathbb{G}^{-1} \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbb{C}^{-1} \mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \quad (38-7)$$

همانطور که مشاهده می‌شود این معادلات درجه دوم بوده و حل هر یک بخشی از پاسخ (۷-۱۳) را فراهم می‌کند. چنانچه مقصود از حل (۷-۱۳) یافتن شار نرده‌ای نوترون‌ها باشد، با توجه رابطه (۷-۳۳) حل (۷-۳۷) کفایت می‌کند. اما اهمیت این معادلات بیشتر در آن است که امکان بنا نهادن اصول وردشی کلاسیک بر پایه آنها میسر می‌شود. این مطلب در ادامه دنبال خواهد شد.

۷-۷- ویژگی عملگرهای \mathbb{C} و \mathbb{H} و معکوس آنها

- مثبت قطعی:

چنانچه $f(\mathbf{r}, \Omega)$ یک تابع دلخواه از \mathbf{r} و Ω باشد، گفته می‌شود که \mathbb{C} و \mathbb{H} و معکوس آنها مثبت قطعی هستند یعنی:

$$\langle f(\mathbf{r}, \Omega) \mathbb{C} f(\mathbf{r}, \Omega) \rangle \geq 0 \quad (۷-۳۹)$$

$$\langle f(\mathbf{r}, \Omega) \mathbb{C}^{-1} f(\mathbf{r}, \Omega) \rangle \geq 0 \quad (40-7)$$

$$\langle f(\mathbf{r}, \Omega) \mathbb{G} f(\mathbf{r}, \Omega) \rangle \geq 0 \quad (41-7)$$

$$\langle f(\mathbf{r}, \Omega) \mathbb{G}^{-1} f(\mathbf{r}, \Omega) \rangle \geq 0 \quad (42-7)$$

و تساوی تنها در صورتی برقرار است که $f(\mathbf{r}, \Omega) = 0$. در اینجا ما از یکی از نمادگذاری‌های رایج برای انتگرال‌گیری استفاده کرده‌ایم که در آن:

$$\langle f(\mathbf{r}, \Omega) g(\mathbf{r}, \Omega) \rangle \equiv \int_{4\pi} f(\mathbf{r}, \Omega) g(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega \quad (43-7)$$

اثبات مثبت قطعی بودن عملگرهای \mathbb{C} ، \mathbb{C}^{-1} ، \mathbb{G} ، \mathbb{G}^{-1} در پیوست الف ذکر شده است. یک ویژگی عملگرهای مثبت قطعی، مثبت بودن تمامی ویژه‌مقدارهای آن‌ها است.

• خود الحاقی:

دیگر خصوصیت مهم عملگرهای \mathbb{C} و \mathbb{G} و معکوس آنها ویژگی خودالحاقی است که به صورت زیر بیان می شود:

$$\langle f(\mathbf{r}, \Omega) \mathbb{C}g(\mathbf{r}, \Omega) \rangle = \langle g(\mathbf{r}, \Omega) \mathbb{C}f(\mathbf{r}, \Omega) \rangle \quad (44-7)$$

$$\langle f(\mathbf{r}, \Omega) \mathbb{C}^{-1}g(\mathbf{r}, \Omega) \rangle = \langle g(\mathbf{r}, \Omega) \mathbb{C}^{-1}f(\mathbf{r}, \Omega) \rangle \quad (45-7)$$

$$\langle f(\mathbf{r}, \Omega) \mathbb{G}g(\mathbf{r}, \Omega) \rangle = \langle g(\mathbf{r}, \Omega) \mathbb{G}f(\mathbf{r}, \Omega) \rangle \quad (46-7)$$

$$\langle f(\mathbf{r}, \Omega) \mathbb{G}^{-1}g(\mathbf{r}, \Omega) \rangle = \langle g(\mathbf{r}, \Omega) \mathbb{G}^{-1}f(\mathbf{r}, \Omega) \rangle \quad (47-7)$$

اثبات این ویژگی نیز در پیوست ب مذکور است. ویژگی بارز این عملگرها تقارن آنها است. در حالت ماتریسی جمع دو ویژگی مثبت قطعی و خودالحاق ماتریس‌های متقارنی را حاصل می‌سازد که امکان بهره‌گیری بهینه از بسیاری از الگوریتم‌ها برای حل معادلات نهایی فراهم می‌شود.

کاربرد این ویژگی‌ها در فصول آتی روشن تر خواهد شد.

۸- اصول وردشی بر پایه معادلات زوج و فرد پاره

۸-۱- سابقه کاربرد اصول وردشی در فیزیک رآکتور

سابقه اصول وردشی در ترابرد نوترون به سال ۱۹۶۱ برمی‌گردد. در آن سال یک ریاضی‌دان جوان روسی به نام ولادیمیروف^{۵۳} در کتابچه‌ای تحت عنوان «مسائل ریاضیاتی نظریه تک سرعتی ترابرد ذرات» [۳۵]، نخستین اصل وردشی را برای حالت تک گروهی ترابرد نوترون ارائه نمود. کمتر کتابی و یا مقاله‌ای را می‌توان یافت که در آن، هنگام بحث درباره اصول وردشی ترابرد به کار این ریاضی‌دان کاملاً مشهور روسی ارجاع نداده باشد. پس از آن علاقه به پژوهش در خصوص انواع روش‌های وردشی جایگزین و ارتباط آنان با یکدیگر روبه تزايد گذاشت.

⁵³ V. S. Vladimirov

همزمان با ارایه مسائل ریاضیاتی و تحلیلی این روش‌ها، کاربرد روش عددی اجزای محدود نیز ابتدا در مهندسی مکانیک و پس از آن در سایر حوزه‌ها آغاز گردید. به زودی این روش جایگزین روش قدیمی‌تر اختلاف محدود شد، چرا که دقت و انعطاف‌پذیری آن در حل مسائل پیچیده بهتر بوده و پایه‌های نظری آن نیز محکم و استوار است. از آنجا که روش‌های اجزای محدود ارتباط تنگاتنگی با روش‌های وردشی دارند، کاربرد آنها در ترابرد نوترون به شکل گسترده‌ای توسط چارچوب روش‌های وردشی تسهیل گردیده و در حل معادله بولتزمان مورد استفاده قرار گرفتند. نخستین کاربرد روش اجزای محدود به اوایل دهه ۷۰ میلادی برمی‌گردد و چون در آن هنگام معادله پخش نوترون در مسائل مهندسی هسته‌ای محبوبیت زیادی داشت، این روش‌ها ابتدا جذب این معادله شدند.

در اواخر دهه ۷۰ و ۸۰ میلادی روش ترابرد درجه دوم تنها به یک سری کدهای ابتدایی در حل مسائل نمونه و اولیه محدود شده و کاربرد عملی و گسترده نیافته بود. دلیل این امر، محدودیت حافظه رایانه‌ای وقت است. در آن سال‌ها روش

جهت‌های گسسته به دلیل عدم نیاز به حافظه زیاد، کاربرد گسترده مهندسی داشته و کدهای مربوطه قادر به حل مسائل بزرگ مهندسی بودند. پس از آن با افزایش اعجاب‌انگیز توان و حافظه رایانه‌ها، سایر روش‌های محاسباتی از جمله معادله ترابرد درجه دوم در دستور کار قرار گرفته و به عنوان جایگزینی ارزشمند در محاسبات مقیاس بزرگ مهندسی شناخته شدند.

در میان اصول وردشی متعدد، انتخاب ما دو اصل $K^+[\psi^+]$ و $K^-[\psi^-]$ است، به اعتقاد اکروید [۱۱- ص ۲۹۹] این دو، بهترین جفت اصول شناخته شده برای استفاده در ترابرد نوترون بوده و اگر چه اصول دیگری نیز توسعه یافته‌اند، لکن حجم غالب کارهای انجام شده با استفاده از این دو اصل است. این دو اصل شباهت زیادی به کار ولادیمیرف داشته و

استیسی^{۵۴} [۵۶-فصل۵] نیز در کتاب خود پیرامون اصل ولادیمیروف مانور داده و لویس هم با بهره‌گیری از کار ولادیمیرف روابط وردشی خود را ارائه داده است. [۳۹-فصل۶] [۵۲-فصل۲]

در میان دو اصل K^+ و K^- نیز، غالب توجهات به سوی K^+ است، چرا که یافتن $\psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ از این اصل وردشی برای یافتن شار مکانی نوترون، $\phi(\mathbf{r})$ ، کافی است:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega \quad (۱-۸)$$

و با توجه به اینکه:

$$J(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \boldsymbol{\Omega} \psi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega = \int_{4\pi} \boldsymbol{\Omega} \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega \quad (۲-۸)$$

⁵⁴ W. M. Stacey

یافتن ψ^- برای موارد خاصی از جمله دانستن جریان نوترون‌ها و یا تعیین کران بالا عامل عدم مزیت یاخته^{۵۵}های ناهمگن سوخت و... مفید است. در این گزارش ابتدا هر دو اصل $K^+[\psi^+]$ و $K^-[\psi^-]$ را اثبات نموده و در مابقی آن توجه خود را به $K^+[\psi^+]$ معطوف می‌کنیم.

۸-۲- اثبات اصول وردشی $K^+[\psi^+]$ و $K^-[\psi^-]$

فرض کنیم همانند قبل محیط بررسی ما از یک حجم V با چهار نوع مرز بازتابنده کامل، خلأ، مرز با چشمه سطحی و نیز مرز آلبدو تشکیل یافته و چشمه حجمی $\mathcal{D}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ در تمام حجم آن پخش است. با رجوع به جفت معادلات ترکیبی ترابرد نوترون یعنی (۷-۱۹) و (۷-۲۰) به یاد می‌آوریم که اگر ψ_0^+ و ψ_0^- پاسخ صحیح شار زاویه‌ای زوج و فرد در حجم V و مرزهای آن باشند آنگاه دو معادله زیر برقرار است:

⁵⁵ Cell

$$\Omega \cdot \nabla \psi_0^-(\mathbf{r}, \Omega) + \mathbb{C} \psi_0^+(\mathbf{r}, \Omega) - \mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \quad (3-8)$$

$$\Omega \cdot \nabla \psi_0^+(\mathbf{r}, \Omega) + \mathbb{G}^{-1} \psi_0^-(\mathbf{r}, \Omega) - \mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \Omega) = 0 \quad (4-8)$$

که این دو شار شرایط مرزی (۲۳-۷) تا (۲۶-۷) را نیز ارضا می‌کنند. اکنون اگر به جای ψ_0^+ و ψ_0^- از توابع تقریبی ψ^+ و ψ^- استفاده شود، معادلات (۳-۸) و (۴-۸) ارضا نشده و باقی مانده‌هایی به شرح زیر وجود خواهد داشت:

$$\Omega \cdot \nabla \psi^-(\mathbf{r}, \Omega) + \mathbb{C} \psi^+(\mathbf{r}, \Omega) - \mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \Omega) = R_1 \quad (5-8)$$

$$\Omega \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \Omega) + \mathbb{G}^{-1} \psi^-(\mathbf{r}, \Omega) - \mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \Omega) = R_2 \quad (6-8)$$

در آنچه پیش رو است تصور می‌کنیم که تابع‌های آزمون ψ^+ و ψ^- به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که شرایط مرزی بازتابنده کامل را ارضا کرده و علاوه بر آن چنانچه حجم V خود متشکل از چندین حجم با خصوصیات متفاوت باشند در فصول مشترک این محیط‌ها (جز برای $\Omega \cdot \mathbf{n} = 0$) تابع آزمون پیوستگی مکانی و زاویه‌ای داشته و مشتق اول آنها در حجم V

پیوسته است. با توجه به مطالب بیان شده در خصوص اصل کمینه مربعات تعمیم یافته یکی از بهترین روش‌های یافتن کمینه خطا در حجم V ، وزن کردن خطاها توسط عملگرهای خود الحاق و مثبت قطعی است، چرا که تنها در این صورت است که کمینه شدن تابعی به معنای کمینه بودن خطا در تمام حجم است. بدین منظور می‌توان دو تابعی به صورت زیر معرفی نمود:

$$X[\psi^+, \psi^-] \equiv \int_V \langle R_1 \mathbb{C}^{-1} R_1 \rangle dV \quad (7-8)$$

$$Y[\psi^+, \psi^-] \equiv \int_V \langle R_2 \mathbb{G} R_2 \rangle dV \quad (8-8)$$

علاوه بر آن لازم است خطای ایجاد شده در اثر این جایگذاری روی مرزهای محیط نیز کمینه شود. با توجه به شرایط مرزی مرتبط با هر مرز می‌توان سه تابعی دیگر نیز به صورت زیر معرفی نمود:

- برای سطح برهنه (آزاد):

$$A_b[\psi^+, \psi^-] \equiv \int_{S_b} dS \left\{ \int_{\Omega \cdot \mathbf{n} < 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| \{ \psi^+(\mathbf{r}_b, \Omega) + \psi^-(\mathbf{r}_b, \Omega) \}^2 d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Omega \cdot \mathbf{n} > 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| \{ \psi^+(\mathbf{r}_b, \Omega) - \psi^-(\mathbf{r}_b, \Omega) \}^2 d\Omega \right\} \quad (9-8)$$

• برای سطح با چشمه مرزی:

$$A_s[\psi^+, \psi^-] \equiv \int_{S_s} dS \left\{ \int_{\Omega \cdot \mathbf{n} < 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| \{ \psi^+(\mathbf{r}_s, \Omega) + \psi^-(\mathbf{r}_s, \Omega) - T(\mathbf{r}_s, \Omega) \}^2 d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Omega \cdot \mathbf{n} > 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| \{ \psi^+(\mathbf{r}_s, \Omega) - \psi^-(\mathbf{r}_s, \Omega) - T(\mathbf{r}_s, -\Omega) \}^2 d\Omega \right\} \quad (10-8)$$

• برای سطح آبدو:

$$A_a[\psi^+, \psi^-] \equiv \frac{1}{1 - \rho^2} \int_{S_a} dS \left\{ \int_{\Omega \cdot \mathbf{n} < 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| \{ (1 - \rho)\psi^+(\mathbf{r}_a, \Omega) + (1 + \rho)\psi^-(\mathbf{r}_a, \Omega) \}^2 d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Omega \cdot \mathbf{n} > 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| \{ (1 - \rho)\psi^+(\mathbf{r}_a, \Omega) - (1 + \rho)\psi^-(\mathbf{r}_a, \Omega) \}^2 d\Omega \right\} \quad (11-8)$$

مشاهده می‌شود که چنانچه $\rho \rightarrow 0$ باشد، شرط مرزی آلبدو به شرط مرزی خلا تبدیل شده و اگر $\rho \rightarrow 1$ لازم است تا $\psi^- \rightarrow 0$ که در تطابق با فیزیک مسئله است (به دلیل تقارن شار). بنابراین چنانچه تابعی جامع:

$$U[\psi^+, \psi^-] \equiv X[\psi^+, \psi^-] + Y[\psi^+, \psi^-] + A_b[\psi^+, \psi^-] + A_s[\psi^+, \psi^-] + A_a[\psi^+, \psi^-] \quad (12-8)$$

که خود یک تابعی تعمیم یافته کمینه مربعات است، برابر صفر شود ψ^+ و ψ^- پاسخ معادلات (8-4) و (8-5) خواهند بود. قبلاً اشاره شده بود که تابع‌های آزمون ψ^+ و ψ^- شرایط مرزی بازتابنده کامل را بطور پیش فرض رعایت می‌کنند (در این خصوص بعدها توضیحات بیشتری داده خواهد شد). بر این اساس تابعی مرتبط با مرز بازتابنده کامل معرفی نگردید.

اکنون چنانچه تابعی‌های تعریف شده بر روی حجم و سطح V را بسط دهیم و جمع همه تابعی‌های فوق را به گونه‌ای مرتب کنیم که نظم خاصی در چینش عبارتهای وابسته به ψ^+ و ψ^- و جملات مستقل رعایت شود به عبارت زیر

می‌رسیم:

(۸-۱۳)

$$\begin{aligned}
U[\psi^+, \psi^-] = & \int_V dV \{ 2\langle \mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle + 2\langle \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{G} \mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \\
& - \langle \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{G} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle - \langle \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{C} \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \} \\
& - \int_{S_s \cup S_b} dS \left\{ \int_{4\pi} |\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}| \psi^{+2}(\mathbf{r}_{s,b}, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega \right\} - \int_{S_a} dS \left\{ \int_{4\pi} |\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}| \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right) \psi^{+2}(\mathbf{r}_a, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega \right\} \\
& + 4 \int_{S_s} dS \left\{ \int_{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} < 0} |\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}| \psi^+(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) T(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega \right\} \\
& + \int_V dV \{ \langle \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{C}^{-1} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle - 2\langle \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{C}^{-1} \mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \\
& - 2\langle \mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle + \langle \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{G}^{-1} \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \} \\
& + \int_{S_s \cup S_b} dS \left\{ \int_{4\pi} |\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}| \psi^{-2}(\mathbf{r}_{s,b}, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega \right\} + \int_{S_a} dS \left\{ \int_{4\pi} |\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}| \left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \right) \psi^{-2}(\mathbf{r}_a, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 4 \int_{S_s} dS \left\{ \int_{\Omega.n < 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| \psi^-(\mathbf{r}_s, \Omega) T(\mathbf{r}_s, \Omega) d\Omega \right\} \\
& + 2 \int_V dV \{ \langle \psi^+(\mathbf{r}, \Omega) \Omega \cdot \nabla \psi^-(\mathbf{r}, \Omega) \rangle + \langle \psi^-(\mathbf{r}, \Omega) \Omega \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \Omega) \rangle \} \\
& - 2 \int_{S_s \cup S_b \cup S_a} dS \left\{ \int_{4\pi} (\Omega \cdot \mathbf{n}) \psi^+(\mathbf{r}_{s,b,a}, \Omega) \psi^-(\mathbf{r}_{s,b,a}, \Omega) d\Omega \right\} \\
& + \int_V dV \{ \langle \mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \Omega) \mathbb{G} \mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \Omega) \rangle + \langle \mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \Omega) \mathbb{C}^{-1} \mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \Omega) \rangle \} \\
& + 2 \int_{S_s} dS \left\{ \int_{\Omega.n < 0} |\Omega \cdot \mathbf{n}| T^2(\mathbf{r}_s, \Omega) d\Omega \right\}
\end{aligned}$$

با این چینش مشخص می‌شود که چهار سطر اول کاملاً بستگی به ψ^+ داشته، چهار سطر دوم تنها وابسته به ψ^- است، دو سطر پس از آن نیز به ضرب هر دو وابسته بوده و نهایتاً دو سطر پایانی از جملاتی ثابت و مستقل از ψ تشکیل شده

است. برای پیشبرد منظور خود مناسب است دو تابعی دیگر که هر کدام صرفاً وابسته به ψ^+ یا ψ^- هستند به شرح زیر معرفی گردند:

$$\begin{aligned}
 K^+[\psi^+] \equiv & \int_V dV \{ 2 \langle S^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle + 2 \langle \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{G} S^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \\
 & - \langle \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{G} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle - \langle \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{C} \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \} \\
 & - \int_{S_s \cup S_b} dS \left\{ \int_{4\pi} |\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}| \psi^{+2}(\mathbf{r}_{s,b}, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega \right\} \\
 & - \int_{S_a} dS \left\{ \int_{4\pi} |\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}| \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right) \psi^{+2}(\mathbf{r}_a, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega \right\} \\
 & + 4 \int_{S_s} dS \left\{ \int_{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} < 0} |\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}| \psi^+(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) T(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega \right\}
 \end{aligned} \tag{۱۴-۸}$$

که صرفاً تابع ψ^+ است. همچنین:

$$\begin{aligned}
K^-[\psi^-] \equiv & \int_V dV \{ 2 \langle \mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle + 2 \langle \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{C}^{-1} \mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \\
& - \langle \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{C}^{-1} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle - \langle \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{G}^{-1} \psi^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \} \\
& - \int_{S_s \cup S_b} dS \left\{ \int_{4\pi} |\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}| \psi^{-2}(\mathbf{r}_{s,b}, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega \right\} \\
& - \int_{S_a} dS \left\{ \int_{4\pi} |\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}| \left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \right) \psi^{-2}(\mathbf{r}_a, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega \right\} \\
& + 4 \int_{S_s} dS \left\{ \int_{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} < 0} |\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}| \psi^-(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) T(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega \right\}.
\end{aligned} \tag{۱۵-۸}$$

که یک تابعی صرفاً وابسته به ψ^- است. با تعاریف فوق می توان عبارت (۱۳-۸) را به شکل رابطه (۱۶-۸) بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
 & K^+[\psi^+] + K^-[\psi^-] + U[\psi^+, \psi^-] \\
 &= \int_V dV \{ \langle \mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) | \mathbb{G} \mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle + \langle \mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) | \mathbb{C}^{-1} \mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \} \\
 &+ 2 \int_{\mathcal{S}_s} dS \left\{ \int_{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} < 0} |\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}| T^2(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \right\}
 \end{aligned} \tag{۱۶-۸}$$

همان گونه که ذکر گردید سمت راست عبارت فوق کاملاً مستقل از ψ^+ یا ψ^- بوده و یک جمله ثابت است که با رجوع به ویژگی مثبت قطعی عملگرهای \mathbb{G} و \mathbb{C}^{-1} مثبت بودن این ثابت احراز می‌شود. لذا با توجه به نامنفی بودن تابعی U ، این ثابت را می‌توان به منزله یک کران بالا برای جمع تابعی‌های K^+ و K^- در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}
 K^+[\psi^+] + K^-[\psi^-] &\leq 2\alpha \\
 &\equiv \int_V dV \{ \langle \mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{G} \mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle + \langle \mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{C}^{-1} \mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \} \\
 &\quad + 2 \int_{\mathcal{S}_s} dS \left\{ \int_{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} < 0} |\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}| T^2(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \right\}
 \end{aligned} \tag{۱۷-۸}$$

یک مزیت این نمایش آن است که تابعی U که به ψ^+ و ψ^- بستگی دارد، در این نامعادله حذف می‌شود. حذف این وابستگی نتیجه انتخاب صحیح عملگرهای وزنی یعنی \mathbb{C}^{-1} و \mathbb{G} است که باعث به وجود آمدن یک سری انتگرال‌های سطحی روی ψ^+ و ψ^- شده و متعاقباً با انتگرال‌های سطحی ناشی از تابعی‌های خطا روی سطح حذف می‌شوند. با توجه به (۱۷-۸) می‌توان نتایج زیر را استنتاج نمود:

$$K^+[\psi^+] \leq 2\alpha - K^-[\psi_0^-] \tag{۱۸-۸}$$

$$K^-[\psi^-] \leq 2\alpha - K^+[\psi_0^+] \tag{۱۹-۸}$$

که کران بالای هر یک از تابعی‌های K^+ و K^- را برحسب یکدیگر مشخص می‌کند. بنابراین با فرض آن که مقدار دقیق ψ_0^- موجود است می‌توان چنین استنتاج نمود که با نزدیک شدن تابع آزمون ψ^+ به ψ_0^+ مقدار $K^+[\psi^+]$ به بیشینه نظری خود یعنی $K^+[\psi_0^+]$ نزدیک شده و برعکس با بیشینه‌سازی تابعی $K^+[\psi^+]$ تابع نامعلوم ψ^+ به تابع دقیق ψ_0^+ نزدیک می‌شود. چگونگی بیشینه‌سازی این اصول موضوعی است که در فصول آتی به آن پرداخته می‌شود.

۸-۳- امتیازات اصول وردشی

اگر بخواهیم کل فرایند طی شده را در یک جمله خلاصه کنیم باید گفت که مطابق اصول K^+ و K^- چنانچه میزان خطای حاصل از بکارگیری تابع آزمون ψ^+ به جای ψ_0^+ در تمام حجم و روی سطوح محصور کننده آن به حداقل ممکن برسد آنگاه اصول یاد شده حداکثر مقادیر خود را که عددی معلوم است، داشته و به عبارتی ψ^+ به ψ_0^+ میل می‌کند. همان‌گونه که قبلاً ذکر گردید خطای استفاده از تقریب در اصول وردشی از مرتبه خطای تابع تقریب بوده و لذا نتایج حاصل از آن از

حد بالای اطمینان برخوردار است. اساساً آنگونه که اکروید [۱۱-ص ۱۵] بیان می‌دارد: «یک اصل وردشی اکسترممی از این ویژگی برخوردار است که بهترین جواب ممکن را از میان یک مجموعه تابع آزمون برمی‌گزیند. به این معنی که حل مربوطه یک خطای مثبت را در کل حجم مورد مطالعه [و سطوح آن] کمینه می‌کند.» نیز در بیان دیگر مزیت‌های این روش چنین می‌نگارد: «روش‌های وردشی را می‌توان برای تطبیق و دقت‌سنجی نتایج حاصل از یک کد در مقابل کد دیگر بکار برد. مثلاً از کدی که قابلیت‌های آن در حل مسائل با پراکندگی همسانگرد اثبات شده، می‌توان برای آزمایش نتایج یک مسئله با پراکندگی ناهمسانگرد بهره برد.» [۱۱-ص ۱۷]. توضیح آن که اکروید و ویلیامز^{۵۶} در مقاله‌ای [۶۱] اثبات کرده‌اند که اگر سطح مقطع پراکندگی برای حالت ناهمسانگرد به صورت یک ترکیب احتمالاتی از پراکندگی‌های همسانگرد، جلو و عقب‌گرد در نظر گرفته شود:

⁵⁶ M. M. R. Williams

$$\sigma_s(\Omega, \Omega') = \bar{\sigma}_s \left\{ \frac{1 - \alpha - \beta}{4\pi} + \frac{\alpha}{2\pi} \delta(\Omega, \Omega' - 1) + \frac{\beta}{2\pi} \delta(\Omega, \Omega' + 1) \right\} \quad (۲۰-۸)$$

که در آن $\alpha \geq 0$ ، $\beta \leq 1$ و $\alpha + \beta \leq 1$ و $\bar{\sigma}_s$ متوسط سطح مقطع پراکندگی بوده و ضرایب $\bar{\sigma}_s$ به ترتیب نشانگر احتمال پراکندگی همسانگرد، رو به جلو و رو به عقب باشند، آنگاه یک مسئله با شرط مرزی خلأ و پراکندگی ناهمسانگرد را می توان به مسئله ای با شرط مرزی آلبدو و پراکندگی همسانگرد تبدیل نمود که در آن:

$$\rho = -\frac{B}{A} \quad (۲۱-۸)$$

و A و B نیز عبارتند از:

$$A \equiv \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{[\sigma_t - \bar{\sigma}_s(\alpha + \beta)]^2}{[\sigma_t - \bar{\sigma}_s(\alpha - \beta)]^2} \right\} \quad ; \quad B \equiv \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{[\sigma_t - \bar{\sigma}_s(\alpha + \beta)]^2}{[\sigma_t - \bar{\sigma}_s(\alpha - \beta)]^2} \right\} \quad (۲۲-۸)$$

بنابراین با توجه به اینکه اصول وردشی قابلیت تحلیل سطوح مرزی آلبدو را نیز دارند، برای بررسی مسائل ی با پراکندگی ناهمسانگرد نیز می توانند مناسب باشند.

به علاوه ذکر گردید که از K^+ و K^- می توان برخی ویژگی های کلی یک رآکتور را تحدید نمود. به عنوان نمونه نانه در پایان نامه خود [۴۷-ص ۹۶]، این بحث جالب را مطرح کرده که با توجه به تعریف عامل عدم مزیت در یاخته های سوخت ناهمگن:

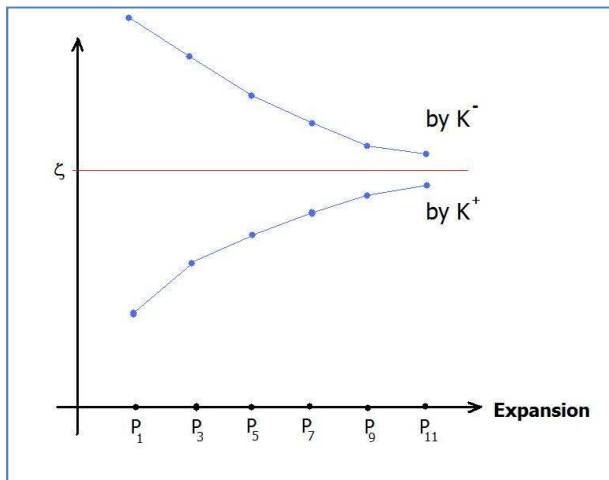
$$\zeta \equiv \frac{\text{متوسط شار در کند کننده}}{\text{متوسط شار در سوخت}} = \frac{\frac{1}{4\pi V_m} \int_{V_m} \int_{4\pi} \psi_0^+(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega dV}{\frac{1}{4\pi V_f} \int_{V_f} \int_{4\pi} \psi_0^+(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega dV} = \frac{V_f \int_{V_m} \int_{4\pi} \psi_0^+(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega dV}{V_m \int_{V_f} \int_{4\pi} \psi_0^+(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega dV} \quad (۲۳-۸)$$

چنانچه بخواهیم $\psi_0^+(\mathbf{r}, \Omega)$ را یکبار از طریق $K^+[\psi^+]$ و بار دیگر توسط $K^-[\psi^-]$ و به کمک معادله (۴-۸) یعنی:

$$\psi^+(\mathbf{r}, \Omega) = \mathbb{C}^{-1}[\mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \Omega) - \Omega \cdot \nabla \psi^-(\mathbf{r}, \Omega)]$$

بیابیم، آنگاه رفتار ζ با افزایش دقت تابع آزمون (از طریق افزایش جملات بسط) در هر دو مورد متفاوت خواهد بود. ζ بدست آمده از اصل K^- و (۴-۸) دارای کران بالا خواهد بود، حال آنکه ζ حاصله از محاسبه ψ^+ از طریق اصل K^+ یک

کران پایین خواهد داشت. با افزایش بسط‌های موجود در تابع آزمون نتایج بدست آمده توأمأً به یک مقدار واحد میل می‌کنند که پاسخ مسئله مورد بررسی است. (شکل ۳). مثال‌هایی از این دست در پایان همین گزارش مطرح خواهد شد. دیگر آنکه قبلاً یاد آور شده بودیم که حل اصول وردشی کلاسیکی معادل حل معادله اوپلر- لاگرانژ آن است و در حقیقت این معادله از صفر شدن وردش نخست انتگرال‌ده در تابعی تشکیل شده از اصول وردشی حاصل می‌شود. نیز ذکر گردید که اگر تابعی سیستم حاوی مشتقاتی از مرتبه m باشد، معادله اوپلر- لاگرانژ حاصل از مرتبه $2m$ خواهد بود. با مراجعه به اصول بیشینه K^+ و K^- مشخص می‌شود که این اصول حاوی مشتقات اول شار زاویه‌ای بوده و بنابراین وردش تابعی مذکور نسبت به وردش شار زاویه‌ای منجر به ایجاد یک معادله درجه دوم خواهد شد. با بررسی می‌توان اثبات نمود که وردش شار زاویه‌ای در اصول یاد شده به معادلات درجه دوم ترابرد نوترون یعنی (۳۷-۷) و (۳۸-۷) و شرایط مرزی مربوطه خواهد انجامید.



شکل ۳: نمودار کیفی تعیین کران بالا و پایین عامل عدم مزیت یاخته‌های ناهمگن توسط اصول وردشی. برای مشاهده نتایج دقیق خواننده می‌تواند به مراجع ۴۷، ۸ و ۹ مراجعه نماید.

۸-۴- محدودیت‌ها

با این حال ذکر این نکته ضروری است که علی‌رغم همه مزایای یاد شده، اصول بیشینه K^+ و K^- از یک ضعف مهم رنج می‌برند و آن این است که توابع آزمون بکار رفته در این اصول باید روی فصل مشترک اجزای محدود در ناحیه مش زده شده، پیوسته بوده و مش بکار رفته نیز باید شامل عناصر انطباق‌پذیر^{۵۷} باشد. به علاوه تابع آزمون ψ^+ در همه نواحی مورد بررسی باید از بسط هم مرتبه توابع پایه (مثل هماهنگ‌های کروی) برخوردار باشد که این امر حل مسئله را در نواحی‌ای که نیاز به بسط‌های مرتبه بالا نیست، وقت‌گیرتر کرده و حافظه بیشتری را طلب می‌کند [۴-ص ۶۳]. برای رفع این نقیصه

⁵⁷ Conforming elements

با استفاده از اصل مربع کمینه تعمیم یافته و نیز روش گالرکین^{۵۸} دو تابعی جدید به صورت $K_{\lambda}^{-0}[\psi^{-}]$ و $K_{\lambda}^{+0}[\psi^{+}]$ معرفی می‌شوند که تکامل یافته اصول $K^{-}[\psi^{-}]$ و $K^{+}[\psi^{+}]$ هستند.

ویژگی این دو اصل آن است که تابع آزمون ψ^{+} نیاز به ارضای هیچ‌گونه شرط مرزی از جمله بازتابنده کامل نداشته و حتی نیاز به پیوستگی شار در فصل مشترک عناصر محدود بکار رفته در مش نیز نمی‌باشد. به علاوه امکان استفاده از عناصر انطباق‌ناپذیر^{۵۹} نیز در این روش میسر است. لکن گستردگی مطلب فرصت پرداختن به موضوع را در این گزارش سلب کرده و لذا خواننده به منابع موجود در این زمینه ارجاع داده می‌شود. [۱۱، ۴، ۴۶ و ۵۵]

⁵⁸ Galerkin Method

⁵⁹ non-conforming elements

۹- تحلیل وابستگی زاویه‌ای

در این فصل قصد داریم تا وابستگی اصل $K^+[\psi^+]$ به زاویه و انرژی را در حالت کلی تحلیل کرده و آن را از وابستگی به مکان مستقل نماییم. اما پیش از آن مجدداً یادآور می‌شود که شار نرده‌ای نوترون در نقطه \mathbf{r} در رآکتور از رابطه (۸-۱) یعنی:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \psi(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega = \int_{4\pi} \psi^+(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega \quad (۸-۱)$$

بدست آمده که نتیجه فرد بودن تابع ψ^- نسبت به بردار Ω است. همچنین برای بردار جریان نوترون در نقطه \mathbf{r} نیز داشتیم:

$$J(\mathbf{r}) = \int \Omega \psi(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega = \int \Omega \psi^-(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega = \int \Omega \mathbb{G}[\mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \Omega) - \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \Omega)] d\Omega \quad (۸-۳)$$

که رابطه اخیر با استفاده از رابطه (۸-۵) بر حسب ψ^+ نگاشته شده است. بنابراین ψ^+ در سراسر محیط راکتور برای داشتن بسیاری از ویژگی‌های کلی آن کفایت کرده و نیازی به استخراج مستقیم ψ^- از طریق اصل $K^-[\psi^-]$ نمی‌باشد. لذا طبیعی است که از این پس تلاش خود را معطوف یافتن ψ^+ با استفاده از اصل $K^+[\psi^+]$ نماییم.

۹-۱- هماهنگ‌های کروی

یک روش مناسب برای حل مسئله بیشینه‌سازی تابعی $K^+[\psi^+]$ آن است که تابع دقیق و نامعلوم ψ_0^+ به توابعی روی مکان و زاویه تجزیه گردد. در این میان یکی از بهترین (اگر نگوییم دقیقاً بهترین) بسط‌های ممکن برای تقریب بخش زاویه‌ای، استفاده از هماهنگ‌های کروی است چرا که به اعتقاد هنری [۳۴- ص ۳۵۵-۳۵۶] به دلیل وابستگی زاویه‌ای ضعیف $\psi(\mathbf{r}, \Omega)$ ، تنها تعداد کمی از بسط‌های هماهنگ‌های کروی برای نمایش نسبتاً دقیق $\psi(\mathbf{r}, \Omega)$ کفایت می‌کند. ضمناً یک ویژگی جالب توجه هماهنگ‌های کروی، ناوردا بودن آنان نسبت به جهت‌گیری محورهای مختصات است که

اغلب روش‌های جهت‌های گسسته (S_n) از آن بی‌بهره‌اند. بنابراین، با آن‌که انتخاب جهت محور به سادگی حل مسئله کمک شایانی می‌کند، لکن پاسخ عددی جواب را تغییر نمی‌دهد، که این خود یک مزیت بزرگ است. به علاوه یک خصوصیت برجسته این روش آن است که در یک بعد، هماهنگ‌های کروی به چند جمله‌ای‌های لژاندر^{۶۰} [پیوست پ] کاهش یافته و بهترین بسط ممکن برای تقریب زدن یک تابع $F(\mu = \Omega \cdot \Omega')$ پدید می‌آید. چرا که چنانچه $F(\mu)$ به صورت زیر تا مرتبه N تقریب زده شوند:

$$F(\mu) \approx F_N(\mu) = \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{4\pi} f_n P_n(\mu) \quad (1-9)$$

این تقریب کمترین مقدار ممکن را برای انتگرال کمینه مربعی زیر نسبت به هر تقریب دیگری از همان مرتبه فراهم می‌آورد:

⁶⁰ Legendre Polynomials

$$\int_{-1}^1 [F(\mu) - F_N(\mu)]^2 d\mu \quad (2-9)$$

بنابراین، آن گونه که هنری می‌پندارد [همان - ص ۳۵۶] به لحاظ کمینه مربعات، چند جمله‌ای‌های لژاندر «بهترین» بسط ممکن برای تقریب زدن تابع $F(\mu)$ است. این که چنین امری برای حالت‌های دو بعدی و سه بعدی بسط توسط هماهنگ‌های کروی صادق است یا خیر، برای نویسنده اثبات نشده، لکن قدر مسلم آن است که هماهنگ‌های کروی اگر بهترین بسط ممکن را فراهم نیاورند، قطعاً به دلیل آشنایی و سهولت کار با آنان از محبوب‌ترین نوع بسط خواهند بود. با دانستن اینکه:

$$Y_{lm}(\Omega) = Y_{lm}(\mu, \omega) \quad (3-9)$$

در این گزارش برای پیشبرد منظور خود از یک مجموعه متعامد از هماهنگ‌های کروی در فضای حقیقی به شرح زیر استفاده می‌کنیم: [پیوست ث]

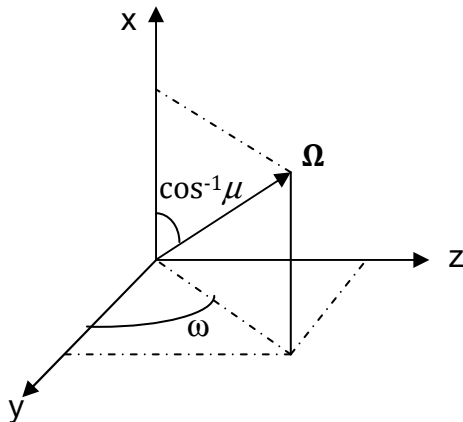
$$Y_{lm}(\Omega) \equiv \left[\frac{2l+1}{4\pi} (2 - \delta_{m0}) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\mu) \begin{cases} \cos m\omega \\ \sin m\omega \end{cases} ; \quad \begin{matrix} l = 0, 1, 2, \dots \\ |m| = 0, 1, \dots, l \end{matrix} \quad (4-9)$$

در اینجا $P_l^m(\mu)$ چندجمله‌ای‌های لژاندر وابسته^{۶۱} [پیوست ت] بوده و مطابق قرارداد هرگاه $m \geq 0$ جمله کسینوسی مورد استفاده قرار گرفته و در غیر این صورت منظور جمله سینوسی است. این مجموعه از هماهنگ‌های کروی رابطه تعامد زیر را ارضا می‌کنند:

$$\int_{4\pi} Y_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (5-9)$$

⁶¹ Associated Legendre Polynomials

همچنین از این مجموعه می توان به نحو احسن برای تحلیل زاویه ای $\psi(\mathbf{r}, \Omega)$ و سطح مقاطع وابسته به زاویه بهره برد.



شکل ۴: موقعیت بردار یکه زاویه در فضای کارترین

همانطور که در رابطه (۹-۲۶) مشاهده می‌شود، $K^+[\psi^+]$ شامل جملاتی وابسته به \mathbb{C} و \mathbb{G} است. بنابراین، لازم است تا یک عبارت مطلوب برای این عملگرها بیابیم.

مجدداً اشاره می‌شود که می‌توان سطح مقطع پراکندگی وابسته به مکان از زاویه Ω به Ω' را ترکیب دو بخش زوج و فرد دانست:

$$\sigma_s(\mathbf{r}, \Omega, \Omega') = \sigma_s^+(\mathbf{r}, \Omega, \Omega') + \sigma_s^-(\mathbf{r}, \Omega, \Omega') \quad (۹-۶)$$

اینک با استفاده از چند جمله‌ای‌های لژاندر می‌توان هر یک از سطوح مقاطع زوج و فرد را به صورت زیر بسط داد:

$$\sigma_s^\pm(\mathbf{r}, \Omega, \Omega') = \sum_{l_\pm} \frac{2l+1}{2} \sigma_{sl}^\pm(\mathbf{r}, \omega \rightarrow \omega') P_l(\Omega, \Omega') \quad ; \quad \begin{array}{l} l_+ = 0, 2, 4, 6 \dots \\ l_- = 1, 3, 5, 7 \dots \end{array} \quad (۹-۷)$$

چون $\sigma_{sl}^\pm(\mathbf{r}, \omega \rightarrow \omega')$ نسبت به جهت سمتی پراکندگی (ω') همسانگرد است، لذا:

$$\sigma_{sl}^{\pm}(\mathbf{r}, \omega \rightarrow \omega') = \frac{1}{2\pi} \sigma_{sl}^{\pm}(\mathbf{r}) \quad (8-9)$$

بنابراین برای (8-9) داریم:

$$\sigma_s^{\pm}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') = \sum_{l_{\pm}} \frac{2l+1}{4\pi} \sigma_{sl}^{\pm}(\mathbf{r}) P_l(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') \quad ; \quad \begin{array}{l} l_+ = 0, 2, 4, 6 \dots \\ l_- = 1, 3, 5, 7 \dots \end{array} \quad (9-9)$$

$\sigma_{sl}^{\pm}(\mathbf{r})$ در رابطه فوق تکانه‌های^{۶۲} بسط می‌باشند. یکی از کاربردهای مهم هماهنگ‌های کروی نقش آنان در قضیه جمع^{۶۳} [پیوست ث] است. [۵۵]

$$P_l(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') = \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\boldsymbol{\Omega}) Y_{lm}(\boldsymbol{\Omega}') \quad (10-9)$$

بنابراین می‌توان رابطه (9-9) را به صورت رابطه (9-11) نگاشت:

⁶² moments

⁶³ Addition theorem

$$\sigma_s^\pm(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') = \sum_{l\pm} \sum_{m=-l}^l \sigma_{sl}^\pm(\mathbf{r}) Y_{lm}(\boldsymbol{\Omega}) Y_{lm}(\boldsymbol{\Omega}') \quad (11-9)$$

یک نمایش بهتر برای رابطه (۹-۹) نمایش ماتریسی آن است:

$$\sigma_s^\pm(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') = \mathbb{Y}_\pm^T(\boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Sigma}_\pm(\mathbf{r}) \mathbb{Y}_\pm(\boldsymbol{\Omega}') \quad (12-9)$$

که عناصر رابطه بالا عبارتند از:

$$\mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega}) \equiv [Y_{00} \quad Y_{2-2} \quad Y_{2-1} \quad Y_{20} \quad Y_{21} \quad Y_{22} \quad Y_{4-4} \quad \dots \quad Y_{44} \quad \dots] \quad (13-9)$$

$$\mathbb{Y}_-^T(\boldsymbol{\Omega}) \equiv [Y_{1-1} \quad Y_{10} \quad Y_{11} \quad Y_{3-3} \quad Y_{3-2} \quad Y_{3-1} \quad Y_{33} \quad Y_{5-5} \quad \dots \quad] \quad (14-9)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_+(\mathbf{r}) \equiv \text{diag}[\sigma_{s0}(\mathbf{r}) \quad \sigma_{s2}(\mathbf{r}) \quad \sigma_{s2}(\mathbf{r}) \quad \sigma_{s2}(\mathbf{r}) \quad \sigma_{s2}(\mathbf{r}) \quad \sigma_{s2}(\mathbf{r}) \quad \sigma_{s4}(\mathbf{r}) \quad \dots] \quad (15-9)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_-(\mathbf{r}) \equiv \text{diag}[\sigma_{s1}(\mathbf{r}) \quad \sigma_{s1}(\mathbf{r}) \quad \sigma_{s1}(\mathbf{r}) \quad \sigma_{s3}(\mathbf{r}) \quad \dots \quad \sigma_{s3}(\mathbf{r}) \quad \sigma_{s5}(\mathbf{r}) \quad \dots \quad] \quad (16-9)$$

توجه می‌کنیم که \mathbb{Y}_{\pm} یک ماتریس عمودی (بردار) بوده و \mathbb{Y}_{\pm}^T ماتریس ترانپو^{۶۴} آن است. ضمناً Σ_{\pm} ماتریس قطری وابسته به مکان بوده و به غیر از عناصر یادشده در قطر، سایر درایه‌های آن صفر است. اکنون با یادآوری تعاریف عملگرهای \mathbb{C} و \mathbb{G}^{-1} :

$$\mathbb{C}f(\mathbf{r}, \Omega) \equiv \sigma_t(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, \Omega) - \int_{4\pi} \sigma_s^+(\mathbf{r}, \Omega, \Omega') f(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' \quad (۳۳-۸)$$

$$\mathbb{G}^{-1}f(\mathbf{r}, \Omega) \equiv \sigma_t(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, \Omega) - \int_{4\pi} \sigma_s^-(\mathbf{r}, \Omega, \Omega') f(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' \quad (۳۴-۸)$$

چنانچه از رابطه (۹-۱۲) در عبارت‌های فوق استفاده شود، خواهیم داشت:

$$\mathbb{C}f(\mathbf{r}, \Omega) \equiv \sigma_t(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, \Omega) - \mathbb{Y}_+^T(\Omega) \Sigma_+(\mathbf{r}) \int_{4\pi} \mathbb{Y}_+(\Omega') f(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' \quad (۱۷-۹)$$

⁶⁴ Transpose

$$\mathbb{G}^{-1}f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \equiv \sigma_t(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) - \mathbb{Y}_-^T(\boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Sigma}_-(\mathbf{r}) \int_{4\pi} \mathbb{Y}_-(\boldsymbol{\Omega}') f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') d\Omega' \quad (18-9)$$

از سوی دیگر یادآوری می‌شود اگر f^+ تابعی زوج روی $\boldsymbol{\Omega}$ و f^- تابعی فرد روی آن باشد، آنگاه می‌توان با استفاده از بسط هماهنگ‌های کروی قسمت‌های زاویه‌ای و مکانی آن را از یکدیگر تفکیک نمود:

$$f^\pm(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \sum_{l_\pm} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} f_{lm}^\pm(\mathbf{r}) Y_{lm}(\boldsymbol{\Omega}); \quad \begin{array}{l} l_+ = 0, 2, 4, 6 \dots \\ l_- = 1, 3, 5, 7 \dots \end{array} \quad (19-9)$$

که در آن $f_{lm}^\pm(\mathbf{r})$ ضرایب بسط است. رابطه (۱۹-۹) را می‌توان به صورت ماتریسی زیر هم به نگارش درآورد:

$$f^\pm(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \mathbb{Y}_\pm^T(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{f}^\pm(\mathbf{r}) \quad (20-9)$$

که ماتریس ستونی $\mathbf{f}^\pm(\mathbf{r})$ (بردار) عبارت است از:

$$f^\pm(\mathbf{r}) \equiv \int_{4\pi} \mathbb{Y}_+(\boldsymbol{\Omega}') f^\pm(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') d\Omega' = \left[\dots \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} f_{lm}^\pm(\mathbf{r}) \dots \right]^T \quad (21-9)$$

حال با توجه به رابطه (۹-۲۰)، در خصوص رابطه (۹-۱۷) هنگامی که f روی $\boldsymbol{\Omega}$ تابعی زوج باشد، خواهیم داشت:

$$\mathbb{C}f^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \equiv \sigma_t(\mathbf{r}) \mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega}) f^+(\mathbf{r}) - \mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Sigma}_+(\mathbf{r}) \int_{4\pi} \mathbb{Y}_+(\boldsymbol{\Omega}') f^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') d\Omega' \quad (22-9)$$

اکنون با استفاده از تعریف (۹-۲۱) و نیز معرفی ماتریس واحد (II)، بازنویسی رابطه (۹-۲۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}f^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) &\equiv \sigma_t(\mathbf{r}) \mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega}) f^+(\mathbf{r}) - \mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Sigma}_+(\mathbf{r}) f^+(\mathbf{r}) = \mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega}) [\sigma_t(\mathbf{r}) \mathbb{I} - \boldsymbol{\Sigma}_+(\mathbf{r})] f^+(\mathbf{r}) \\ &= \mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega}) \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_+(\mathbf{r}) f^+(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (23-9)$$

مشاهده می‌شود که در رابطه بالا از تعریف جدید یک ماتریس قطری استفاده شده که عبارت است از:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_+(\mathbf{r}) &\equiv [\sigma_t(\mathbf{r}) \mathbb{I} - \boldsymbol{\Sigma}_+(\mathbf{r})] \\ &= \text{diag}[\sigma_t(\mathbf{r}) - \sigma_{s0}(\mathbf{r}) \quad \sigma_t(\mathbf{r}) - \sigma_{s2}(\mathbf{r}) \quad \dots \quad \sigma_t(\mathbf{r}) - \sigma_{s2}(\mathbf{r}) \quad \sigma_t(\mathbf{r}) - \sigma_{s4}(\mathbf{r}) \quad \dots] \end{aligned} \quad (24-9)$$

برای گسترش این ایده می توان چنین تصوّر نمود که اگر اثر عملگر \mathbb{C} روی تابع f^+ به صورت زیر باشد،

$$\mathbb{C}f^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \mathbb{C} \mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega})f^+(\mathbf{r}) = \mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega})\tilde{\Sigma}_+(\mathbf{r})f^+(\mathbf{r}) \quad (25-9)$$

می توان یک عملگر دیگر به نام \mathbb{C}^{-1} به صورت زیر تعریف نمود:

$$\mathbb{C}^{-1}f^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \mathbb{C}^{-1} \mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega})f^+(\mathbf{r}) = \mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega})\tilde{\Sigma}_+^{-1}(\mathbf{r})f^+(\mathbf{r}) \quad (26-9)$$

حال برای آنکه \mathbb{C}^{-1} معکوس عملگر \mathbb{C} باشد باید $\mathbb{C}^{-1}\mathbb{C} = \mathbb{I}$ و لذا:

$$\tilde{\Sigma}_+^{-1}(\mathbf{r})\tilde{\Sigma}_+(\mathbf{r}) = \mathbb{I} \quad (27-9)$$

که با توجه به رابطه (24-9) خواهیم داشت:

$$\tilde{\Sigma}_+^{-1}(\mathbf{r}) = \text{diag} \left[\frac{1}{\sigma_t(\mathbf{r}) - \sigma_{s0}(\mathbf{r})} \quad \frac{1}{\sigma_t(\mathbf{r}) - \sigma_{s2}(\mathbf{r})} \quad \dots \quad \frac{1}{\sigma_t(\mathbf{r}) - \sigma_{s2}(\mathbf{r})} \quad \frac{1}{\sigma_t(\mathbf{r}) - \sigma_{s4}(\mathbf{r})} \quad \dots \right] \quad (28-9)$$

مشابهاً برای تابع فرد f^- با توجه به روابط (۲۰-۹) و (۲۱-۹) در خصوص (۱۷-۹) می توان نوشت:

$$\mathbb{G}^{-1}f^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \mathbb{Y}_-^T(\boldsymbol{\Omega})\tilde{\Sigma}_-(\mathbf{r})f^-(\mathbf{r}) \quad (29-9)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_-(\mathbf{r}) &\equiv [\sigma_t(\mathbf{r})\mathbb{I} - \Sigma_-(\mathbf{r})] \\ &= \text{diag}[\sigma_t(\mathbf{r}) - \sigma_{s1}(\mathbf{r}) \quad \sigma_t(\mathbf{r}) - \sigma_{s1}(\mathbf{r}) \quad \sigma_t(\mathbf{r}) - \sigma_{s1}(\mathbf{r}) \quad \sigma_t(\mathbf{r}) - \sigma_{s3}(\mathbf{r}) \quad \dots] \end{aligned} \quad (30-9)$$

نیز مشابه مباحث مطروحه پیرامون روابط (۲۵-۹) تا (۲۸-۹) می توان عملگر \mathbb{G} را نیز هنگام عمل روی تابع فرد f^- به شکل زیر تعریف نمود:

$$\mathbb{G}f^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \equiv \mathbb{Y}_-^T(\boldsymbol{\Omega})\tilde{\Sigma}_-^{-1}(\mathbf{r})f^-(\mathbf{r}) \quad (31-9)$$

که در آن:

$$\bar{\Sigma}^{-1}(\mathbf{r}) \equiv \text{diag} \left[\frac{1}{\sigma_t(\mathbf{r}) - \sigma_{s1}(\mathbf{r})} \quad \frac{1}{\sigma_t(\mathbf{r}) - \sigma_{s1}(\mathbf{r})} \quad \frac{1}{\sigma_t(\mathbf{r}) - \sigma_{s1}(\mathbf{r})} \quad \frac{1}{\sigma_t(\mathbf{r}) - \sigma_{s3}(\mathbf{r})} \quad \dots \right] \quad (۳۲-۹)$$

با توجه به ناممکن بودن احتمالی حل تحلیلی $K^+[\psi^+]$ برای یک شکل دلخواه، لازم است تا از روش‌های محاسبات عددی برای حل آن بهره گرفته شود. برای این منظور ابتدا باید بخش زاویه‌ای و فضایی موجود در $K^+[\psi^+]$ را از یکدیگر تفکیک نمود. همانطور که قید گردید، یکی از این روش‌ها بسط شار زاویه‌ای براساس هماهنگ‌های کروی است که در حالت یک بعدی به P_N معروف بوده و حالت ساده شده آن نیز به SP_N مشهور است. دیگر روش پرکاربرد گسسته‌سازی جهت‌های زاویه‌ای است که در آن با اتخاذ جهت‌های مجزای $\Omega_N - \Omega_1$ ، به هریک از این جهت‌ها در انتگرال $\psi(\mathbf{r}, \Omega)$ یک وزن اختصاص یافته و انتگرال براساس آن تقریب زده می‌شود، این روش SN نامیده شده و حالت ساده شده آن نیز به SSN معروف است. در این گزارش تنها بسط بر اساس هماهنگ‌های کروی را مطرح کرده و خواننده را برای تکمیل اطلاعات پیرامون روش‌های دیگر به مراجع معتبر ارجاع می‌دهیم. [۳۹، ۲۵ و ۱۹]

۹-۲- بسط چگالی شار زاویه‌ای بر اساس هماهنگ‌های کروی

دانستیم که مشابه رابطه (۹-۱۹)، می‌توان هر تابع دلخواه روی \mathbf{r} و Ω را برحسب هماهنگ‌های کروی بسط داد. بر این اساس بسط شار زاویه‌ای برحسب هماهنگ‌های کروی به صورت زیر خواهد بود:

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \varphi_{lm}(\mathbf{r}) Y_{lm}(\Omega) \quad (۹-۳۳)$$

و چنانچه تنها بخش زوج آن مدنظر باشد:

$$\psi^+(\mathbf{r}, \Omega) = \sum_{l_+=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \varphi_{lm}(\mathbf{r}) Y_{lm}(\Omega) \quad ; \quad l_+ = 0, 2, 4, 6 \dots \quad (۹-۳۴)$$

با استفاده از رابطه تعامد هماهنگ‌های کروی (۹-۵) و نیز (۹-۳۴) می‌توان یک عبارت جالب برای شار نرده‌ای نوترون

بیان نمود [۲۳-ص ۲۷۳]:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega = \varphi_{00}(\mathbf{r}) \quad (۳۵-۹)$$

مشابه (۴-۲۰) می توان $\psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ را حاصل ضرب دو بردار به صورت زیر دانست:

$$\psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega}) \Psi^+(\mathbf{r}) = \Psi^{+T}(\mathbf{r}) \mathbb{Y}_+(\boldsymbol{\Omega}) \quad (۳۶-۹)$$

که در آن $\Psi^+(\mathbf{r})$ یک بردار ستونی به شرح زیر است:

$$\Psi^+(\mathbf{r}) \equiv \int_{4\pi} \mathbb{Y}_+(\boldsymbol{\Omega}) \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\Omega \quad (۳۷-۹)$$

$$= \left[\sqrt{\frac{1}{4\pi}} \varphi_{00}(\mathbf{r}) \quad \dots \quad \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \varphi_{lm}(\mathbf{r}) \quad \dots \right]^T ; \begin{matrix} l = 0, 2, 4, 6 \dots \\ m = -l, \dots, +l \end{matrix}$$

یادآور می‌شود که علامت + در نماد $\Psi^+(\mathbf{r})$ هرگز به معنای زوج بودن آن نسبت به متغیر \mathbf{r} نبوده و صرفاً نشانگر وابستگی آن به ψ^+ است (که تابعی زوج روی Ω است). ضمناً اتحاد زیر نیز برای بردارهای \mathbb{Y}_{\pm} ثابت است:

$$\int_{4\pi} \mathbb{Y}_{\pm}(\Omega) \mathbb{Y}_{\pm}^T(\Omega) d\Omega = \mathbb{I} \quad (38-9)$$

$$\int_{4\pi} \mathbb{Y}_{\mp}(\Omega) \mathbb{Y}_{\pm}^T(\Omega) d\Omega = \mathbb{O} \quad (39-9)$$

اینک با استفاده از تعاریف فوق قصد داریم تا انتگرال‌های زاویه‌ای موجود در $K^+[\psi^+]$ را به یک سری انتگرال‌های معلوم و قابل حل به روش‌های تحلیلی تبدیل نموده و با این کار وابستگی $K^+[\psi^+]$ را از بخش زاویه‌ای بزدا کنیم. قبل از هر اقدامی بار دیگر تعریف $K^+[\psi^+]$ را مرور می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
K^+[\psi^+] = & \int_V dV \{ 2\langle \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathcal{S}^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle + 2\langle \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{G} \mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle - \langle \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{C} \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \\
& - \langle \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \mathbb{G} \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \} - \int_{S_s \cup S_b} dS \langle \psi^+(\mathbf{r}_{s,b}, \boldsymbol{\Omega}) | \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} | \psi^+(\mathbf{r}_{s,b}, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \\
& - \left(\frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right) \int_{S_a} dS \langle \psi^+(\mathbf{r}_a, \boldsymbol{\Omega}) | \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} | \psi^+(\mathbf{r}_a, \boldsymbol{\Omega}) \rangle \\
& + 4 \int_{S_s} dS \left\{ \int_{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n} < 0} |\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}| \psi^+(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) T(\mathbf{r}_s, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \right\}
\end{aligned}$$

در این گزارش برآنیم تا سه نوع مختصات مطرح در حالت یک بعدی یعنی تخت، کروی و استوانه‌ای را به ترتیب مورد تحلیل قرار دهیم. وجه تمایز اصلی هر یک از مختصات مذکور، در شکل جمله نشت یعنی $\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ و نوع انتگرال‌های مکانی نهفته است که در فصول آتی به طور مبسوط به بحث گذاشته شده و عبارتهای کاملی برای آنان

استخراج خواهد شد. لکن به منظور توسعه نظریه مورد بررسی و اجتناب از فرو رفتن زود هنگام در پیچیدگی‌های مختصات غیر تخت مناسب‌تر آن است که ابتدا تک‌تک جملات $K^+[\psi^+]$ را در حالت سه بعدی کلی در مختصات کارتزین (ساده‌ترین دستگاه مختصات) تحلیل کرده و پس از اعمال روش اجزای محدود بر بخش مکانی آن و فهم پایه‌های نظری شکل آن را برای سایر چارچوب‌های یک بعدی به دست آوریم.

با توجه به این نکته که در مختصات تخت برای شیب شار رابطه $\nabla\psi^+ = \sum_k \partial_k \psi^+ \mathbf{k}$ صادق بوده که در آن \mathbf{k} بردار یکه نوعی در جهت‌های x و y و z است، با استفاده از بسط هماهنگ‌های کروی می‌توان $K^+[\psi^+]$ را به شکلی مستقل از زاویه تبدیل نمود:

$$\begin{aligned}
K^+[\Psi^+] = & \int_V dV \left\{ 2\Psi^{+T}(\mathbf{r})\mathbf{s}^+(\mathbf{r}) + 2 \sum_k \partial_k \Psi^{+T}(\mathbf{r}) \mathbb{U}_k^T \tilde{\Sigma}_-^{-1}(\mathbf{r})\mathbf{s}^-(\mathbf{r}) - \Psi^{+T}(\mathbf{r})\tilde{\Sigma}_+(\mathbf{r})\Psi^+(\mathbf{r}) \right. \\
& - \left. \sum_k \sum_{k'} \partial_k \Psi^{+T}(\mathbf{r}) \mathbb{U}_k^T \tilde{\Sigma}_-^{-1}(\mathbf{r}) \mathbb{U}_{k'} \partial_{k'} \Psi^+(\mathbf{r}) \right\} \quad (40-9) \\
& - \int_{S_s \cup S_b} dS \Psi^{+T}(\mathbf{r}_{s,b}) \mathbb{A}_n \Psi^+(\mathbf{r}_{s,b}) - \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right) \int_{S_a} dS \Psi^{+T}(\mathbf{r}_a) \mathbb{A}_n \Psi^+(\mathbf{r}_a) \\
& + 2 \int_{S_s} dS \Psi^{+T}(\mathbf{r}_s) \mathbb{A}_n \mathbf{t}^+(\mathbf{r}_s)
\end{aligned}$$

در رابطه فوق بخش زاویه به انتگرال‌هایی روی هماهنگ‌های کروی خلاصه شده که حاصل آن ماتریس‌های مستقل از مسئله \mathbb{U}_k با تعریف زیر است:

$$\mathbb{U}_k^T \equiv \langle (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{k}) \mathbb{Y}_+(\boldsymbol{\Omega}) \mathbb{Y}_-^T(\boldsymbol{\Omega}) \rangle \quad (41-9)$$

همچنین در جمله مرزی نیز یک ماتریس از انتگرال‌های زاویه‌ای با رابطه (42-9) ظاهر می‌شود:

$$A_n \equiv \langle Y_+(\Omega) | \Omega \cdot n | Y_+^T(\Omega) \rangle \quad (42-9)$$

به علاوه در روابط فوق از تعاریف زیر نیز استفاده شده است:

$$s^\pm(\mathbf{r}) \equiv \int_{4\pi} Y_\pm(\Omega) S^\pm(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega \quad (43-9)$$

$$t^+(\mathbf{r}_s) \equiv 2 \int_{\Omega \cdot n < 0} Y_+(\Omega) T(\mathbf{r}_s, \Omega) d\Omega. \quad (44-9)$$

دقت شود که مزیت معرفی ماتریس‌های U_k و A_n آن است که می‌توان مقادیر آن‌ها را به صورت تحلیلی و یا نیمه تحلیلی با دقت کافی محاسبه نمود و چون مستقل از نوع مسئله هستند، یک بار محاسبه آنان برای همیشه کفایت می‌کند. خوشبختانه انتگرال زاویه‌ای U_k در یک تا سه بعد دارای حل تحلیلی بوده و A_n نیز تا دو بعد حل تحلیلی دارد که این ویژگی دقت محاسبات را بسیار بالا می‌برد. توجه شود که وابستگی زاویه‌ای اصل $K^+[\psi^+]$ به هر شیوه دیگری که

مورد تحلیل قرار گیرد (مثلاً به روش S_N) رابطه‌ای به دست می‌آید که به لحاظ ساختاری مشابه (۹-۴۰) بوده ولی در ترکیب جملات تفاوت خواهد داشت، چرا که این رابطه کاملاً مستقل از زاویه است. [۵۲- فصل دوم]

۱۰- تحلیل وابستگی مکانی

۱۰-۱- مقدمه‌ای بر روش اجزای محدود

با گسترش علم و فناوری نیاز به توسعه روش‌های محاسباتی نیز افزایش می‌یابد. یکی از روش‌های مؤثر در حل بسیاری از مسائل مهندسی روش اجزای محدود است. این روش در اواخر دهه ۵۰ میلادی ابداع گردید و به تدریج جایگزین روش‌های قدیمی‌تر همچون اختلاف محدود گردیده است. گسترش این روش در حل مسائل مهندسی در چندین دهه اخیر چنان فزاینده بوده که زینکیویچ^{۶۵} - که خود از پیشبرندگان این روش محاسباتی است- در یک بیان جالب چنین می‌نویسد: «افزایش تحقیقات در حوزه کاربرد اجزای محدود باعث گردید که حجم کتاب منتشره در سال ۱۹۶۷ [توسط خود وی] از ۲۷۲ صفحه به ۱۴۵۵ صفحه در سال ۱۹۹۱ افزایش یابد! [۶۶- مقدمه]»

⁶⁵ Zienkiewicz

علت موفقیت این روش، عدم محدودیت بر روی شکل‌های هندسی پیچیده و پایه‌های محکم تئوری آن بوده و امروزه کاربرد آن تقریباً به همه حوزه‌های مهندسی و عملیاتی از جمله انتقال حرارت، مکانیک سیالات و جامدات، مهندسی عمران، سازه، مهندسی هسته‌ای و... سرایت کرده است [۱]. با این حال این نظریه نیز همانند هر نظریه دیگر از ضعف‌هایی رنج می‌برد که یکی از مهم‌ترین آن محدودیت اعمال روی یک محیط پیش‌آرایش‌یافته (مش) است که خود یک قید مصنوعی برای ایجاد انطباق بین توابع میان‌بایی مورد استفاده در هر عنصر است.

البته، مش‌بندی دامنه لزوماً تعارضی با شرایط فیزیکی حاکم بر یک مسئله واقعی با کمیّت پیوسته ندارد. اما در شرایطی که نوع مش‌بندی با واقعیات فیزیکی همخوانی نداشته باشد (مثلاً هنگامی که تقارن‌های هندسی در مش‌بندی رعایت نشود)، «بازمش‌بندی»^{۶۶} اجتناب‌ناپذیر است که این نه فقط یک فرایند وقت‌گیر بوده، بلکه ممکن است به کاهش دقت

⁶⁶ remeshing

محاسبات عددی منجر شده و خطای آن مسئله را آلوده و نتایج را لکه‌دار کند [۴۱]. به همین دلیل در تلاش برای برون‌رفت از این مشکل، در دهه ۹۰ روش‌هایی همچون روش اجزای محدود تطبیق پذیر^{۶۷} و نیز روش‌های نقطه‌محور^{۶۸} و بی‌مش^{۶۹} ابداع گردیده، که کاربرد آن روز به روز گسترش می‌یابد. این روش‌ها اگر چه در این گزارش مورد بحث قرار نمی‌گیرند، لکن ذکر آن در این جا به این دلیل است که خواننده در صورت علاقه‌مندی به تحقیق و گسترش کاربرد آن‌ها در حوزه مهندسی هسته‌ای ایده‌ای داشته و برای آشنایی مقدماتی و یا پیچیده‌تر می‌تواند به برخی مراجع معتبر در این زمینه رجوع نماید. [۴۱ و ۶۶، ۵۵].

⁶⁷ Adaptive Finite Element Method

⁶⁸ Point Based

⁶⁹ Mesh-free (Mesh less)

۱۰-۲- روش اجزای محدود در نوترونیک

تقریباً دو دهه پس از معرفی روش اجزای محدود به عنوان ابزاری قدرتمند برای حل معادلات مکانیک روی هر محیط دلخواه، در دهه هفتاد میلادی علاقه شدیدی به استفاده از روش اجزای محدود در آزمایشگاه لوس آلاموس^{۷۰} ابراز گردید و این روش به طور گسترده‌ای هم برای معادله پخش نوترون و هم ترابرد آن مورد استفاده قرار گرفت. پس از آن، سایرین کاربرد اجزای محدود را به معادلات جنبشی نوترون و نیز معادلات چندگروهی توسعه دادند. همچنین ذکر یک نکته ضروری است و آن این است که با توجه به تعریف عملگر \mathbb{T} (پیوست ب از گزارش تفصیلی)

$$\mathbb{T}f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{\sigma_t(\mathbf{r})} f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + \int_{4\pi} \theta(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') d\Omega'$$

⁷⁰ Los Alamos

باید دقت نمود که وجود $\sigma_t(\mathbf{r})$ در مخرج هشدار دهنده این واقعیت است که تحلیل خلاً مطلق در ناحیه مورد بحث توسط اصل K^+ ممکن نبوده و برای رفع این مشکل لازم است تا عدد کوچکی (مثلاً از مرتبه 10^{-5} یا 10^{-6}) هنگام برخورد با خلاً در جایگاه $\sigma_t(\mathbf{r})$ قرار گیرد. نتیجتاً باید مراقب بود تا کوچکی این عدد سبب ناپایداری الگوریتم‌های حل مسئله نشده و باعث واگرایی پاسخ ارایه شده توسط رایانه نگردد. [۳۹-۳۶۰]

۱۰-۳- بسط تابعیت مکانی

اگر حجم مورد بررسی در ترابرد نوترون به اجزای کوچکی شکسته شود، آنگاه حجم کل، جمع حجم همه عناصر خواهد بود:

$$V = \sum_e V_e \quad (1-10)$$

که نماد e بیانگر شمارش روی همه عناصر حجمی است. با یادآوری رابطه (۳۷-۹):

$$\Psi^{+T}(\mathbf{r}) = \left[\sqrt{\frac{1}{4\pi}} \varphi_{00}(\mathbf{r}) \quad \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \varphi_{2-2}(\mathbf{r}) \quad \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \varphi_{2-1}(\mathbf{r}) \quad \dots \quad \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \varphi_{22}(\mathbf{r}) \quad \dots \quad \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \varphi_{lm}(\mathbf{r}) \quad \dots \right] \quad (37-9)$$

$$l = 0, 2, 4, 6 \dots \quad ; \quad m = -l, \dots, +l$$

می‌توان هر یک از درایه‌های بردار $\Psi^+(\mathbf{r})$ در محدوده عنصر فضایی e را به صورت زیر تقریب زد:

$$\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \varphi_{lm}^e(\mathbf{r}) \approx \mathbb{m}_e^T(\mathbf{r}) \xi_{lm}^e \quad ; \quad \mathbf{r} \in V_e \quad (2-10)$$

که عناصر بردار $\mathbb{m}_e(\mathbf{r})$ چند جمله‌ای‌های شکل (پایه) عنصر بوده و درایه‌های بردار ξ_{lm}^e ضرایب نامعلومی هستند که در صورت پیدایش، مقادیر تابع آزمون $\varphi_{lm}^e(\mathbf{r})$ در گره‌های عنصر فضایی (e) را مشخص می‌کنند.

با بکارگیری ویژگی‌های ضرب تانسوری می‌توان بردار تکانه‌های بسط شار زاویه‌ای زوج را به صورت زیر نوشت:

$$\Psi_e^+(\mathbf{r}) = \mathbb{I} \otimes \mathbf{m}_e^T(\mathbf{r}) \xi_e \quad ; \quad \mathbf{r} \in V_e \quad (3-10)$$

که ماتریس ستونی ξ_e ترکیب همه ξ_{lm}^e هاست که پشت سر هم قرار گرفته‌اند:

$$\xi_e^T \equiv \left[\underbrace{\xi_{00,1}^e \cdots \xi_{00,P}^e}_{\xi_{00}^e} \quad \underbrace{\xi_{2-2,1}^e \cdots \xi_{2-2,P}^e}_{\xi_{2-2}^e} \quad \underbrace{\xi_{2-1,1}^e \cdots \xi_{2-1,P}^e}_{\xi_{2-1}^e} \cdots \underbrace{\xi_{lm,1}^e \cdots \xi_{lm,P}^e}_{\xi_{lm}^e} \cdots \right] \quad (4-10)$$

$$l = 0, 2, 4, 6 \cdots \quad ; \quad m = -l, \dots, +l$$

در بالا P تعداد گره‌های عنصر فضایی e است بدین ترتیب اصل $K^+[\psi^+]$ به شکل جمع سرهم‌بندی شده روی تمامی عناصر حجمی خواهد بود که به طور نمادین چنین نشان می‌دهیم:

$$K^+[\psi^+] = \sum_e K^+[\psi_e^+] \quad (5-10)$$

با استفاده از تبدیلات (۲-۱۰) و (۳-۱۰) مسئله یافتن بخش فضایی $\psi^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ به یافتن مقادیر تقریبی هر یک از درایه‌های بردار ξ_{lm}^e تغییر پیدا می‌کند. بنابراین قدم بعدی آن است که $\Psi^+(\mathbf{r})$ موجود در $K^+[\psi^+]$ را از رابطه (۳-۱۰) جایگزین کنیم. بر این اساس شکل نهایی $K^+[\psi^+]$ (به کمک ویژگی‌های ضرب تانسوری) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
K^+[\xi_e] = & \int_{V_e} dV \left\{ 2\xi_e^T [s_e^+(\mathbf{r}) \otimes m_e(\mathbf{r})] + 2\xi_e^T \sum_k [U_k^T \tilde{\Sigma}_{-e}^{-1}(\mathbf{r}) s_e^-(\mathbf{r})] \otimes \partial_k m_e(\mathbf{r}) \right. \\
& - \xi_e^T [\tilde{\Sigma}_{+e}(\mathbf{r}) \otimes [m_e(\mathbf{r}) m_e^T(\mathbf{r})]] \xi_e \\
& - \xi_e^T \left[\sum_k \sum_{k'} [U_k^T \tilde{\Sigma}_{-e}^{-1}(\mathbf{r}) U_{k'}] \otimes [\partial_k m_e(\mathbf{r}) \partial_{k'} m_e^T(\mathbf{r})] \right] \xi_e \left. \right\} \\
& - \xi_e^T \int_{S_{s,e} \cup S_{b,e}} A_n \otimes [m_e(\mathbf{r}_{s,b}) m_e^T(\mathbf{r}_{s,b})] dS \xi_e \\
& - \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right) \xi_e^T \int_{S_{a,e}} A_n \otimes [m_e(\mathbf{r}_a) m_e^T(\mathbf{r}_a)] dS \xi_e \\
& + 2\xi_e^T \int_{S_{s,e}} [A_n t_e^+(\mathbf{r}_s)] \otimes m_e(\mathbf{r}_s) dS
\end{aligned} \tag{۶-۱۰}$$

لازم به ذکر است که انتگرال‌های سطحی تنها در شرایطی ظاهر می‌شوند که عنصر e یک عنصر مرزی باشد، و عموماً این عنصر مرزی تنها روی یکی از مرزهای مورد بحث (بازتابنده کامل، آلبدو، مرز با چشمه سطحی یا مرز آزاد (خلأ)) قرار

می‌گیرد و همان طور که دیده می‌شود، هیچ قیدی بر روی مرز بازتابنده کامل وضع نشده که دلیل آن پیش فرض ما مبنی بر ارضای قید این مرز توسط تابع آزمون است. (در این خصوص در ادامه توضیحاتی ارائه می‌شود). معادله (۶-۱۰) را می‌توان به صورت ماتریسی زیر بازنویسی نمود:

$$K^+[\xi_e] = 2\xi_e^T S_e - \xi_e^T M_e \xi_e \quad (7-10)$$

که تعریف ماتریس ستونی S_e و ماتریس مربعی M_e به شرح زیر است:

$$S_e \equiv \int_{V_e} dV \left\{ s_e^+(\mathbf{r}) \otimes m_e(\mathbf{r}) + \sum_k [U_k^T \tilde{\Sigma}_{-e}^{-1}(\mathbf{r}) s_e^-(\mathbf{r})] \otimes \partial_k m_e(\mathbf{r}) \right\} \\ + \int_{S_{s,e}} [A_n t_e^+(\mathbf{r}_s)] \otimes m_e(\mathbf{r}_s) dS \quad (8-10)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_e \equiv & \int_{V_e} dV \left\{ \tilde{\Sigma}_{+e}(\mathbf{r}) \otimes [m_e(\mathbf{r}) m_e^T(\mathbf{r})] + \sum_k \sum_{k'} [U_k^T \tilde{\Sigma}_{-e}^{-1}(\mathbf{r}) U_{k'}] \otimes [\partial_k m_e(\mathbf{r}) \partial_{k'} m_e^T(\mathbf{r})] \right\} \\ & + \int_{S_{s,e} \cup S_{b,e}} \mathbb{A}_n \otimes [m_e(\mathbf{r}_{s,b}) m_e^T(\mathbf{r}_{s,b})] dS + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right) \int_{S_{a,e}} \mathbb{A}_n \otimes [m_e(\mathbf{r}_a) m_e^T(\mathbf{r}_a)] dS \end{aligned} \quad (9-10)$$

و نهایتاً روی تمام حجم V و سطوح مرزی در برگیرنده آن از چهار نوع یاد شده، اصل $K^+[\psi^+]$ ، در حالت تقریب به شکل جمع (سرهم‌بندی شده و نه جمع جبری ساده) روی تمامی عناصر خواهد بود:

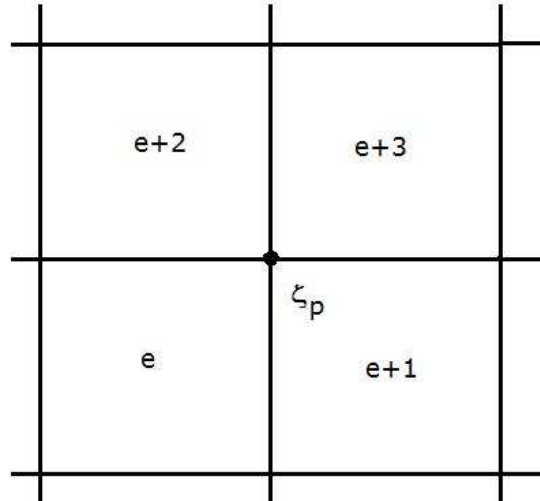
$$K^+[\psi^+] = \sum_e K^+[\xi_e] = 2 \sum_e \xi_e^T \mathbb{S}_e - \sum_e \xi_e^T \mathbb{M}_e \xi_e \quad (10-10)$$

یادآور می‌شویم که اساساً اصل $K^+[\psi^+]$ برای توابعی معتبر است که روی فصول مشترک عناصر حجمی پیوسته باشند. بنابراین مؤلفه‌های ξ_e مرتبط با یک گوشه از عنصر e که با عنصر $e+1$ هم مرز است، باید با مقادیر ξ_{e+1} از همان گوشه

یکسان باشند. برای مثال در شکل ۵ مقادیر ξ_p مرتبط با عناصر $e, e+1, e+2, e+3$ باید مشابه و یکسان بوده تا مقدار شار در نقطه P از پیوستگی مطلوب برخوردار شود.

بر این اساس چنانچه همه M_e ها در یک ماتریس کلی M سرهم‌بندی شده و S_e و ξ_e ها نیز به شکل کلی S و ξ مرتب گردند. آنگاه برای (۱۰-۱۰) خواهیم داشت:

$$K^+[\psi^+] = \sum_e [K^+[\xi_e]] = 2\xi^T S - \xi^T M \xi \quad (11-10)$$



شکل ۵: در روش اجزای محدود پیوستگی شار در گره‌ها باید رعایت شود.

که منظور از نماد $X = \sum_e [X_e]$ سرهم‌بندی عناصر X_e در قالب کلی X است. فرض کنیم یک مسئله فیزیکی را بتوان در نهایت به یک معادله در فضای حقیقی هیلبرت به صورت $A\phi = f$ خلاصه نمود که در آن ϕ مجهول و عنصری از یک فضای تابعی^{۷۱} بوده، A یک عملگر مسئله مقدار مرزی با حوزه عمل فضای هیلبرت و f مقادیر معلوم باشند. آنگاه به شرطی که عملگر A ، متقارن و مثبت قطعی باشد، این مسئله فیزیکی را می‌توان به حل یک مسئله وردشی آنگونه که در قضیه زیر آمده کاهش داد.

- قضیه: فرض می‌کنیم A عملگری متقارن و مثبت قطعی باشد. اگر معادله $A\phi = f$ دارای جواب باشد، در آن صورت این حل، کمترین مقدار ممکن برای تابعی زیر است:

$$J[\phi] = \langle A\phi, \phi \rangle - 2\langle \phi, f \rangle \quad (10-12)$$

⁷¹ functional space

و یا معادلاً بیشینه مقدار برای تابعی زیر است:

$$J'[\phi] \equiv -J[\phi] \quad (13-10)$$

و برعکس، چنانچه یک عنصر مثل ϕ کمینه مقدار تابعی J را تحقق بخشد، در آن صورت پاسخ معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$A\phi = f. \quad (14-10)$$

روش حل مسائل مقدار مرزی که در آن یافتن کمینه تابعی (10-12) جایگزین حل معادله اصلی $A\phi = f$ می‌گردد، در نوشتجات به «روش انرژی^{۷۲}» معروف بوده و تابعی (10-12) نیز تابعی روش انرژی خوانده می‌شود [14-ص ۶۹ و ۴۵].

⁷² Energy Method

با توجه به قضیه مذکور و اینکه هماهنگ‌های کروی و درایه‌های ماتریس M در فضای حقیقی هیلبرت تعریف شده و با عنایت به متقارن و مثبت قطعی بودن عملگرهای C و G ، ماتریس M یک ماتریس متقارن و مثبت قطعی است. لذا صفر شدن وردش نخست $K^+[\psi^+]$ نسبت به تغییرات ξ_0 حکم می‌کند که:

$$M\xi_0 = S \quad (15-10)$$

اثبات این مطلب سر راست است: اگر ξ_0 بردار جامع ضرایب هماهنگ‌های کروی یعنی $\varphi_{lm}^e(\mathbf{r})$ باشد که حول آن رابطه (11-10) پایدار بماند (بیشینه شود)، باید وردش نخست K^+ حول تغییر $\xi_0 + \delta\xi \rightarrow \xi_0$ صفر شود: (16-10)

$$\begin{aligned} K^+[\xi_0 + \delta\xi] &= 2(\xi_0 + \delta\xi)^T S - (\xi_0 + \delta\xi)^T M(\xi_0 + \delta\xi) \\ &= 2\xi_0^T S + 2\delta\xi^T S - \xi_0^T M\xi_0 - \delta\xi^T M\xi_0 - \xi_0^T M\delta\xi - \delta\xi^T M\delta\xi \\ &= 2\xi_0^T S - \xi_0^T M\xi_0 + 2\delta\xi^T [S - M\xi_0] - \delta\xi^T M\delta\xi \\ &= K^+[\xi_0] + 2\delta\xi^T [S - M\xi_0] - \delta\xi^T M\delta\xi \end{aligned} \quad (16-10)$$

در رابطه فوق از خاصیت متقارن بودن M_I استفاده شده است. این رابطه به خوبی نشان می‌دهد که وردش نخست K^+ در صورتی برابر صفر است که رابطه (۱۰-۱۵) برقرار باشد. ثانیاً با عنایت به مثبت قطعی بودن M_I وردش مرتبه دوم K^+ منفی است که این امر بیشینه بودن تابعی مذکور در صورت برقراری (۱۰-۱۵) را نشان می‌دهد. ضمناً «این حقیقت که هرگاه یک اصل وردشی برای مسئله مورد بررسی موجود باشد، ماتریس‌های متقارنی از آن حاصل می‌آید، یکی از ویژگی‌های برجسته و ممتاز رهیافت وردشی در گسسته‌سازی تابعی مذکور است» [۶۶]. به لحاظ خطوط کلی حل مسئله رابطه (۱۰-۱۵) پایانی بر مسائل نظری مورد توجه ماست که حل آن ویژگی‌های مطلوب در بررسی نوترونیک محیط مورد مطالعه را بدست می‌دهد.

با تشکیل M_e و S_e از روابط (۱۰-۸) و (۱۰-۹) و نهایتاً سرهم‌بندی آنان به شکل (۱۰-۱۵) فرمول‌بندی نهایی در حل مسئله به روش وردشی پدید آمده است. آنچه باقی می‌ماند، روش حل معادله (۱۰-۱۵) است که چنانچه ابعاد ماتریس M_I

کوچک باشد روش‌های مستقیم از جمله حذف گاوسی^{۷۳} و چولسکی^{۷۴} مناسب بوده و در صورت بزرگ بودن ابعاد M حل آنان از طریق فرایندهای مبتنی بر تکرار^{۷۵} به پاسخ دقیق‌تری می‌انجامد. شرح این روش‌ها در کتب استاندارد تحلیل عددی به تفصیل آمده است.

۱۱- تحلیل وابستگی به انرژی

۱-۱۱- تمایزات مسائل چند گروهی

شیوه رایج در تحلیل وابستگی به انرژی چندگروهی‌سازی بازه انرژی است. در این صورت کل بازه انرژی به تعداد محدودی گروه انرژی شکسته شده و کمیت‌هایی چون سطوح مقاطع، شار و چشمه‌ها (که به انرژی وابستگی دارند) روی

⁷³ Gaussian Elimination

⁷⁴ Cholesky

⁷⁵ Iteration

آن بازه متوسط‌گیری می‌شوند. شرح نحوه محاسبه کمیت‌های گروهی از حوصله این گزارش خارج بوده و تنها منظور آن است که در حالت چند گروهی اصل $K^+[\psi^+]$ وابسته به گروه انرژی مربوطه می‌شود ($K^+[\psi_g^+]$). در این شرایط دو تفاوت عمده ایجاد می‌شود که یکی جابجایی سطوح مقاطع چند گروهی به جای سطوح مقاطع تک گروهی است (که باید از جداول یا پایگاه‌های داده استخراج نمود) و دیگری وجود چشمه گروهی است که تحلیل آن با پیچیدگی‌هایی همراه است که به آن اشاره می‌شود. با بازگشت به معادله انتگرو-دیفرانسیلی ترابرد نوترون (۸-۲۲) می‌توان حالت چند گروهی آن را به صورت زیر نوشت:

$$\Omega \cdot \nabla \psi_g(\mathbf{r}, \Omega) + \sigma_t(\mathbf{r})\psi_g(\mathbf{r}, \Omega) = \int_{4\pi} \sigma_{s,gg}(\mathbf{r}, \Omega, \Omega')\psi_g(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + \mathcal{S}_g(\mathbf{r}, \Omega) \quad (1-11)$$

نحوه بدست آوردن معادله چند گروهی در بسیاری از منابع درسی (همچون [۳۹-فصل ۲]) مورد بحث قرار گرفته است. در رابطه (۱-۱۱) چشمه گروهی متشکل است از:

$$S_g(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \equiv \sum_{g'=1}^G \left\{ (1 - \delta_{gg'}) \int_{4\pi} \sigma_{s,gg'}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') \psi_{g'}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') d\Omega' \right. \\ \left. + \frac{1}{K_{eff}} \frac{\chi_g}{4\pi} \sum_i v^i \sigma_{f,g'}^i(\mathbf{r}) \int_{4\pi} \psi_{g'}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') d\Omega' \right\} + q_g(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \quad (2-11)$$

که جمله اول پراکندگی از سایر گروه‌های انرژی به گروه g را نشان داده، جمله دوم سهم چشمه شکافت از سوخت‌های مختلف و نهایتاً جمله آخر بیانگر چشمه خارجی مرتبط با گروه می‌باشد. نیز χ_g ثابت گروهی طیف انرژی نوترون‌های شکافت است. با یادآوری آن که چشمه‌های شکافت همسانگرد بوده و بنابراین زوج می‌باشند، چشمه‌های زوج و فرد را می‌توان به صورت زیر از یکدیگر تفکیک نمود:

$$S_g^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \sum_{g'=1}^G \left\{ (1 - \delta_{gg'}) \int_{4\pi} \sigma_{s,gg'}^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') \psi_{g'}^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') d\Omega' \right. \\ \left. + \frac{1}{K_{eff}} \frac{\chi_g}{4\pi} \sum_i \nu \sigma_{f,g'}^i(\mathbf{r}) \int_{4\pi} \psi_{g'}^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') d\Omega' \right\} + q_g^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \quad (3-11)$$

$$S_g^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \sum_{g'=1}^G \left\{ (1 - \delta_{gg'}) \int_{4\pi} \sigma_{s,gg'}^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}') \psi_{g'}^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}') d\Omega' \right\} + q_g^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \quad (3-11)$$

۱۱-۲- بسط زاویه‌ای چشمه‌های زوج و فرد

با توجه به روابط (۹-۱۲)، (۹-۲۰) و (۹-۳۵) می‌توان بسط زاویه‌ای دو عبارت فوق را به صورت ماتریسی زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned}
 S_g^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) &= \mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega}) s_g^+(\mathbf{r}) \\
 &= \sum_{g'=1}^G \left\{ (1 - \delta_{gg'}) \mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Sigma}_{+gg'}(\mathbf{r}) \int_{4\pi} \mathbb{Y}_+(\boldsymbol{\Omega}') \mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega}') d\Omega' \Psi_{g'}^+(\mathbf{r}) \right. \\
 &\quad \left. + \left[\sqrt{4\pi} \mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega}) [\delta_{l1}] \right] \frac{1}{K_{eff}} \frac{\chi_g}{4\pi} \sum_i \nu \sigma_{f,g'}^i(\mathbf{r}) \varphi_{00,g'}(\mathbf{r}) \right\} + \mathbb{Y}_+^T(\boldsymbol{\Omega}) \mathbb{q}_g^+(\mathbf{r})
 \end{aligned} \tag{5-11}$$

$$\begin{aligned}
 S_g^-(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) &= \mathbb{Y}_-^T(\boldsymbol{\Omega}) s_g^-(\mathbf{r}) \\
 &= \sum_{g'=1}^G \left\{ (1 - \delta_{gg'}) \mathbb{Y}_-^T(\boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Sigma}_{-gg'}(\mathbf{r}) \int_{4\pi} \mathbb{Y}_-(\boldsymbol{\Omega}') \mathbb{Y}_-^T(\boldsymbol{\Omega}') d\Omega' \Psi_{g'}^-(\mathbf{r}) \right\} \\
 &\quad + \mathbb{Y}_-^T(\boldsymbol{\Omega}) \mathbb{q}_g^-(\mathbf{r})
 \end{aligned} \tag{6-11}$$

توجه شود که در جمله دوم سمت راست عبارت (5-11) آنچه درون $[\dots]$ است، در حقیقت همان عدد یک است چرا که $[\delta_{l1}]$ یک بردار ستونی است که فقط درایه نخست آن برابر واحد است و مابقی متحد صفر هستند:

$$\sqrt{4\pi}\mathbb{Y}_{\pm}^T(\boldsymbol{\Omega}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = 1 \quad (7-11)$$

فلسفه افزودن [...] هنگامی مشخص می‌شود که از سمت چپ عبارت‌های (5-11) و (6-11) ماتریس‌های \mathbb{Y}_{\pm}^T را بزدا کنیم. بدین ترتیب بردار تکانه‌های فضایی چشمه گروهی، $s_g^{\pm}(\mathbf{r})$ ، به شرح زیر بدست می‌آید. با یادآوری دو اتحاد (9-38) و (9-39) درباره تعامد هماهنگ‌های گروهی خواهیم داشت:

$$s_g^+(\mathbf{r}) = \sum_{g'=1}^G \left\{ (1 - \delta_{gg'}) \boldsymbol{\Sigma}_{+gg'}(\mathbf{r}) \Psi_{g'}^+(\mathbf{r}) + \sqrt{4\pi} [\delta_{l1}] \frac{1}{K_{eff}} \frac{\chi_g}{4\pi} \sum_i v \sigma_{f,g'}^i(\mathbf{r}) \varphi_{00,g'}(\mathbf{r}) \right\} + \mathbb{q}_g^+(\mathbf{r}) \quad (8-11)$$

$$s_g^-(\mathbf{r}) = \sum_{g'=1}^G \left\{ (1 - \delta_{gg'}) \boldsymbol{\Sigma}_{-gg'}(\mathbf{r}) \Psi_{g'}^-(\mathbf{r}) \right\} + \mathbb{q}_g^-(\mathbf{r}) \quad (9-11)$$

شاید قضیه تمام شده به نظر برسد. لکن این طور نیست و یک مشکل بزرگ همچنان وجود دارد. مشاهده می‌شود که در رابطه (۹-۶) تکانه‌های فضایی وابسته به بسط $\psi^-(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ یعنی $\Psi_g^-(\mathbf{r})$ حضور داشته و این امر اصل $K^+[\psi^+]$ را به $\psi^-(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$ وابسته می‌کند. برای رفع این مشکل باید چاره‌ای اندیشید. قبلاً در (۷-۳۶) اشاره شد که:

$$\psi^-(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \mathbb{G}[\mathcal{S}^-(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) - \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})]$$

با استفاده از روابط ماتریسی می‌توان نوشت:

$$\mathbb{Y}_-^T(\mathbf{\Omega})\Psi_g^-(\mathbf{r}) = \mathbb{G}[\mathbb{Y}_-^T(\mathbf{\Omega})\mathbf{s}_g^-(\mathbf{r}) - \mathbb{Y}_-^T(\mathbf{\Omega})\sum_k \mathbb{U}_k \partial_k \Psi_g^+(\mathbf{r})] \quad (10-11)$$

و با عنایت به رابطه (۹-۳۱) در خصوص عملکرد عملگر \mathbb{G} :

$$\mathbb{Y}_-^T(\mathbf{\Omega})\Psi_g^-(\mathbf{r}) = \mathbb{Y}_-^T(\mathbf{\Omega})\tilde{\Sigma}_{-gg}^{-1}(\mathbf{r})\mathbf{s}_g^-(\mathbf{r}) - \mathbb{Y}_-^T(\mathbf{\Omega})\tilde{\Sigma}_{-gg}^{-1}(\mathbf{r})\sum_k \mathbb{U}_k \partial_k \Psi_g^+(\mathbf{r}) \quad (11-11)$$

حال با زدودن $\Psi_-(\Omega)$ از طرفین رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\Psi_g^-(\mathbf{r}) = \tilde{\Sigma}_{-gg}^{-1}(\mathbf{r}) \left[s_g^-(\mathbf{r}) - \sum_k U_k \partial_k \Psi_g^+(\mathbf{r}) \right] \quad (12-11)$$

بدین ترتیب $\Psi_g^-(\mathbf{r})$ به $\Psi_g^+(\mathbf{r})$ وابسته می‌شود. استفاده از رابطه (12-11) در رابطه (9-11) پایان مشکل ما است.

$$s_g^-(\mathbf{r}) = \sum_{g'=1}^G \left\{ (1 - \delta_{gg'}) \Sigma_{-gg'}(\mathbf{r}) \tilde{\Sigma}_{-g'g'}^{-1}(\mathbf{r}) \left[s_{g'}^-(\mathbf{r}) - \sum_k U_k \partial_k \Psi_{g'}^+(\mathbf{r}) \right] \right\} + \mathbb{Q}_g^-(\mathbf{r}) \quad (13-11)$$

رابطه (8-11) را نیز می‌توان به صورت مرتب‌تر زیر به نگارش درآورد:

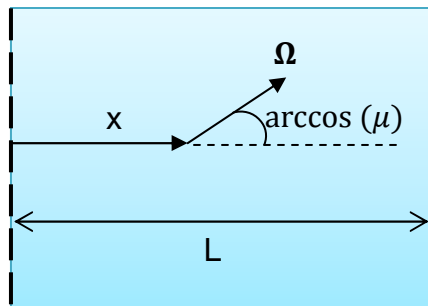
$$s_g^+(\mathbf{r}) = \sum_{g'=1}^G \left\{ (1 - \delta_{gg'}) \Sigma_{+gg'}(\mathbf{r}) + [\delta_{l1} \delta_{l'1}] \frac{\chi_g}{K_{eff}} \sum_i \nu \sigma_{f,g'}^i(\mathbf{r}) \right\} \Psi_{g'}^+(\mathbf{r}) + \mathbb{Q}_g^+(\mathbf{r}) \quad (14-11)$$

که $[\delta_{l_1} \delta_{l'_1}]$ یک ماتریس مربعی و هم‌مرتبه $\Sigma_{+gg'}(\mathbf{r})$ است که درایه اول آن مساوی واحد و سایرین برابر صفر می‌باشند.

۱۲- بررسی معادلات در مختصات یک بعدی

با مشخص شدن فرایند اعمال بسط هماهنگ‌های گروهی بر روی متغیر زاویه و نیز چگونگی پیاده‌سازی روش اجزای محدود بر قسمت مکانی اصل $K^+[\psi^+]$ راه برای بررسی عمیق‌تر آن در سایر مختصات هموارتر می‌شود. با عنایت به هدف این گزارش برای تحلیل یک بعدی اصل $K^+[\psi^+]$ اینک مناسب آن است تا شکل نهایی معادلات در هر یک از مختصات‌های تخت، گروهی و استوانه بررسی شود.

۱۲-۱- مختصات تخت



شکل ۶: وضعیت بردارهای Ω و x نسبت به یکدیگر در فضای تخت یک بعدی

در محیط یک بعدی تخت، بسط توابع توسط هماهنگ‌های کروی با قرار دادن $m=0$ به چند جمله‌ای‌های لژاندر کاهش می‌یابند، چرا که تنها زاویه مطرح در این حالت زاویه بردار Ω با محور x است (شکل ۶). در این شرایط می‌توان گفت:

$$\Omega \cdot \nabla = \mu \frac{\partial}{\partial x} \quad (1-12)$$

$$2\pi\psi_e^+(x, \Omega) = \psi_e^+(x, \mu) \approx \psi_e^+(x, \mu) = \sum_{l+}^{N-1} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \varphi_{l,e}(x) = \mathbb{P}_+^T(\mu) \Psi_e^+(x) \quad (2-12)$$

$$= \Psi_e^{+T}(x) \mathbb{P}_+(\mu)$$

که N عددی فرد در تقریب P_N بوده و بردارهای ستونی \mathbb{P} (کاهش یافته \mathbb{Y} برای $m=0$) و Ψ_e^+ عبارتند از:

$$\mathbb{P}_+^T(\mu) \equiv \left[\sqrt{\frac{1}{2}} P_0(\mu) \quad \sqrt{\frac{5}{2}} P_2(\mu) \quad \sqrt{\frac{9}{2}} P_4(\mu) \quad \dots \quad \sqrt{\frac{2(N-1)+1}{2}} P_{N-1}(\mu) \right] \quad (3-12)$$

$$\Psi_e^{+T}(x) \equiv \left[\sqrt{\frac{1}{2}} \varphi_0(x) \quad \sqrt{\frac{5}{2}} \varphi_2(x) \quad \sqrt{\frac{9}{2}} \varphi_4(x) \quad \dots \quad \sqrt{\frac{2(N-1)+1}{2}} \varphi_{N-1}(x) \right] \quad (4-12)$$

$$= \left(\int_{-1}^1 \mathbb{P}_+(\mu) \psi^+(x, \mu) d\mu \right)^T$$

این روابط، در حقیقت خلاصه شده $\Psi_+^T(\Omega)$ و Ψ^{+T} برای حالت یک بعدی هستند. مشابهاً می توان ماتریس ستونی $\mathbb{P}_-(\mu)$ را نیز به صورت زیر تعریف نمود:

$$\mathbb{P}_-^T(\mu) \equiv \left[\sqrt{\frac{3}{2}} P_1(\mu) \quad \sqrt{\frac{7}{2}} P_3(\mu) \quad \sqrt{\frac{11}{2}} P_5(\mu) \quad \dots \quad \sqrt{\frac{2N+1}{2}} P_N(\mu) \right] \quad (5-12)$$

نیز هر یک از درایه های بردار $\Psi^+(x)$ را می توان در محدوده عنصر فضایی e به صورت ماتریسی زیر تقریب زد:

$$\sqrt{\frac{2l+1}{2}} \varphi_l(x) \approx m_e^T(x) \xi_l^e \quad ; \quad x \in x_e \quad (6-12)$$

که مشابه (۳-۶) درایه های بردار $m_e(x)$ توابع شکل عنصر e بوده و درایه های ξ_l^e نیز مقادیر نامعلوم $\sqrt{\frac{2l+1}{2}} \varphi_l(x)$ در هر گره از عنصر e می باشند. بدین ترتیب، اگر کل محیط مورد بررسی از E عنصر فضایی تشکیل شده باشد:

$$\psi^+(x, \mu) = \sum_e^E \mathbb{P}_+^T(\mu) \Psi_e^+(x) = \sum_e^E \mathbb{P}_+^T(\mu) \otimes \mathbb{m}_e^T(x) \xi_e \quad (7-12)$$

در (7-12) از رابطه (3-11) در حالت یک بعدی استفاده شده و ξ_e یک بردار ستونی $1 \times MP$ است که در آن M تعداد تکانه‌های استفاده شده در بسط (2-12) (یعنی $M = \frac{N+1}{2}$) بوده و P نیز شمار گره‌های عناصر فضایی بکار رفته در تقریب است:

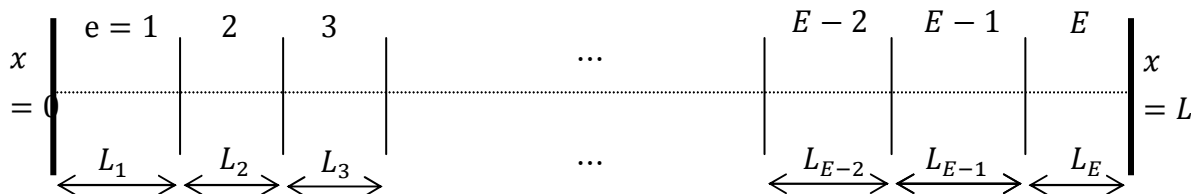
$$\xi_e^T \equiv \left[\underbrace{\xi_{0,1}^e \quad \dots \quad \xi_{0,P}^e}_{\xi_0^e} \quad \underbrace{\xi_{2,1}^e \quad \dots \quad \xi_{2,P}^e}_{\xi_2^e} \quad \dots \quad \underbrace{\xi_{l,1}^e \quad \dots \quad \xi_{l,P}^e}_{\xi_l^e} \quad \dots \quad \underbrace{\xi_{N-1,1}^e \quad \dots \quad \xi_{N-1,P}^e}_{\xi_{N-1}^e} \right] \quad (8-12)$$

$$l = 0, 2, \dots, N-1$$

لازم به ذکر است در این حالت نماد $\langle \dots \rangle$ به معنای انتگرال‌گیری روی محدوده $-1 \leq \mu \leq 1$ فرض می‌شود. مشابه (9-9) (38) و (39-9) می‌توان نوشت:

$$\langle \mathbb{P}_{\pm}(\mu) \mathbb{P}_{\pm}^T(\mu) \rangle = \mathbb{I} \quad (9-12)$$

$$\langle \mathbb{P}_{\mp}(\mu) \mathbb{P}_{\pm}^T(\mu) \rangle = \mathbb{O} \quad (10-12)$$



شکل ۷: المان بندی یک تخته یک بعدی

با جمع بندی نتایج و استفاده از نمادهای این فصل در اصل $K^+[\psi^+]$ مشاهده می شود که پیش از حل یک مسئله یک بعدی تعدادی انتگرال زاویه ای و مکانی باید محاسبه شوند. این انتگرال ها در جدول های ۱ و ۲ خلاصه شده اند.

جدول شماره ۱: ماتریس‌ها و انتگرال‌های زاویه‌ای برای حالت یک بعدی تخت

ماتریس‌های زاویه‌ای	انتگرال‌های زاویه‌ای
A_x	$\langle \mu \mathbb{P}_+(\mu) \mathbb{P}_+^T(\mu) \rangle$
U_x	$\langle \mu \mathbb{P}_-(\mu) \mathbb{P}_+^T(\mu) \rangle$
$t_g^+(x_s) \quad x_s = 0 \text{ یا } L$	$2 \int_{-1}^0 \mathbb{P}_+(\mu) T_g(x_s, \mu) d\mu$

جدول شماره ۲: ماتریس‌ها و انتگرال‌های مکانی در حالت یک بعدی تخت

ماتریس‌های مکانی	انتگرال‌های مکانی
\mathbb{X}_1^e	$\int_{x_e} m_e(x) m_e^T(x) dx$
\mathbb{X}_2^e	$\int_{x_e} \partial_x m_e(x) \partial_x m_e^T(x) dx$
\mathbb{X}_3^e	$\int_{x_e} m_e(x) \partial_x m_e^T(x) dx$
\mathbb{X}_4^e	$\int_{x_e} m_e(x) dx$
\mathbb{B}_{RB}	$m_1(0) m_1^T(0)$
\mathbb{B}_{LB}	$m_E(L) m_E^T(L)$
RB: Right Boundary ; LB: Left Boundary	

حل تحلیلی انتگرال‌های معرفی شده در جداول ۱ و ۲ (برای عناصر مکانی خطی) در پیوست ح (از گزارش تفصیلی) به بحث گذاشته شده است. بر اساس نمادگذاری جداول اخیر می‌توان \mathbb{M}_e و \mathbb{S}_e را با فرض همسانگردی چشمه‌های خارجی در حالت چند گروهی نهایتاً به شکل نمادین زیر صورت‌بندی نمود:

$$\mathbb{M}_g = \sum_{e=1}^E [\mathbb{M}_g^e] = \sum_{e=1}^E \left[\tilde{\Sigma}_{+,gg} \otimes \mathbb{X}_1^e + [\mathbf{U}_x^T \tilde{\Sigma}_{-,gg}^{-1,e} \mathbf{U}_x] \otimes \mathbb{X}_2^e \right] \quad (11-12)$$

$$+ \left[\mathbb{A}_x \otimes \left[\left(\frac{1 - \rho_g}{1 + \rho_g} \right)_{LB} \mathbb{B}_{LB} + \left(\frac{1 - \rho_g}{1 + \rho_g} \right)_{RB} \mathbb{B}_{RB} \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
S_g = \sum_{e=1}^E [S_g^e] &= \frac{\chi_g}{K_{eff}} \sum_{g'=1}^G \left(\sum_{e=1}^E \left[\left([\delta_{l1} \delta_{l'1}] \sum_i v \sigma_{f,g'}^{i,e} \right) \otimes X_1^e \right] \right) \cdot \xi_{g'} \\
&+ \sum_{g'=1}^G (1 \\
&- \delta_{gg'}) \left\{ \left(\sum_{e=1}^E [\Sigma_{+,gg'}^e \otimes X_1^e - (U_x^T \Theta_{-,gg'}^e U_x) \otimes (X_3^{eT} X_1^{e-1} X_3^e)] \right) \cdot \xi_{g'} \right. \\
&+ \left. \left(\sum_{e=1}^E [(U_x^T \Theta_{-,gg'}^e) \otimes X_3^{eT}] \right) \cdot \epsilon_{g'}^- \right\} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{e=1}^E [Q_g^{\ominus e} [\delta_{l1}] \otimes X_4^e] \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} \{ T_g(0) [(A_x [\delta_{l1}]) \otimes m_1(0)] + T_g(L) [(A_x [\delta_{l1}]) \otimes m_E(L)] \}
\end{aligned} \tag{۱۲-۱۲}$$

در روابط بالا داریم $\Theta_{-,gg'}^e \equiv \tilde{\Sigma}_{-gg'}^{-1,e} \Sigma_{-gg'}^e \tilde{\Sigma}_{-g'g'}^{-1,e}$ و $[\delta_{l1}]$ نیز یک ماتریس ستونی با ابعاد $M \times 1$ است که تنها درایه

نخست آن برابر واحد بوده و مابقی درایه‌های آن متحد صفر است. در این جا $M=(N+1)/2$ تعداد تکانها در بسط P_N

(در حالت یک بعدی) است. بر همین روال $[\delta_{l1}\delta_{l'1}]$ نیز ماتریسی مربعی به ابعاد $M \times M$ است. همچنین رابطه کمکی نیز

که به کمک آن $\bar{\epsilon}_g$ ها در (۱۲-۱۲) محاسبه می‌شوند، با نمادگذاری‌های اخیر به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\bar{\epsilon}_g = \sum_{e=1}^E [\bar{\epsilon}_g^{-e}] = \sum_{g'=1}^G (1 - \delta_{gg'}) \left\{ \left(\sum_{e=1}^E [(\Sigma_{-gg'}^e, \tilde{\Sigma}_{-g'g'}^{-1,e}) \otimes \mathbb{I}] \right) \cdot \bar{\epsilon}_{g'} - \left(\sum_{e=1}^E [(\Sigma_{-gg'}^e, \tilde{\Sigma}_{-g'g'}^{-1,e}, U_x) \otimes (\mathbb{X}_1^{e-1} \mathbb{X}_3^e)] \right) \cdot \xi_{g'} \right\} \quad (13-12)$$

در حالت تک گروهی روابط فوق تا حد زیادی ساده شده و به شکل زیر خلاصه می‌شوند:

$$\mathbb{M} = \sum_{e=1}^E [\mathbb{M}^e] = \sum_{e=1}^E \left[\tilde{\Sigma}_{+e} \otimes \mathbb{X}_1^e + [U_x^T \tilde{\Sigma}_{-e}^{-1}, U_x] \otimes \mathbb{X}_2^e \right. \\ \left. + \left[A_x \otimes \left[\left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right)_{LB} \mathbb{B}_{LB} + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right)_{RB} \mathbb{B}_{RB} \right] \right] \right] \quad (14-12)$$

$$S = \sum_{e=1}^E [S^e] = \frac{1}{K_{eff}} \left(\sum_{e=1}^E \left[\left([\delta_{l1} \delta_{l'1}] \sum_i v \sigma_f^{i,e} \right) \otimes X_1^e \right] \right) \cdot \xi + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{e=1}^E [Q_g^{\otimes e} [\delta_{l1}] \otimes X_4^e] \quad (15-12)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \{ T(0) [(A_x [\delta_{l1}]) \otimes m_1(0)] + T(L) [(A_x [\delta_{l1}]) \otimes m_E(L)] \}$$

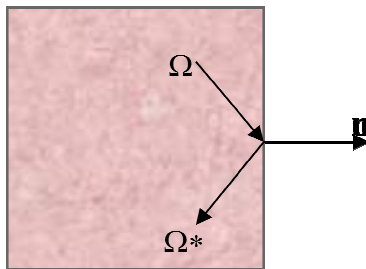
۱۲-۲- بازتابنده کامل در فضای تخت یک بعدی

قبلاً ذکر شده بود که فرض ما بر این است که تابع آزمون $\psi^+(x, \mu)$ شرط بازتابنده کامل را ارضا نموده و بر این اساس هیچ قیدی بر این نوع مرز وضع نگردد. در حالت یک بعدی با توجه به شکل ۸ باید $\psi^+(x_{pr}, \Omega) = \psi^+(x_{pr}, \Omega^*)$ که چون $\mu^* = -\mu$ لذا شرط لازم آن است که:

$$\psi^+(x_{pr}, \mu) = \psi^+(x_{pr}, -\mu) \quad (۱۶-۱۲)$$

اما از طرفی چون $\psi^+(x, \mu)$ بر اساس رابطه (۱۲-۲) تنها با چند جمله‌ای‌های لژاندر زوج یعنی $P_{2k}(\mu)$ بسط داده شده، جای هیچ‌گونه نگرانی در خصوص ارضای شرط مرزی بازتابنده کامل وجود ندارد، چراکه همواره شرط $P_{2k}(\mu) = P_{2k}(-\mu)$ برقرار است. بنابراین چنانچه هیچ‌گونه شرط مرزی بر مرزهای چپ یا راست وضع نگردد، (جمله مرزی لحاظ نشود) خود به خود به منزله مرز بازتابنده کامل بوده که البته در حالت یک بعدی معادل آلبدوی کامل ($\rho = 1$) نیز

محسوب می‌شود. ارضای شرط مرزی بازتابنده کامل در حالت دو بعدی و سه بعدی با پیچیدگی‌های فزاینده‌ای همراه است. بنابراین چنانچه هر یک از مرزهای چپ یا راست بازتابنده کامل باشد کافی است جمله مرزی آن مرز لحاظ نشده و یا معادلاً ضریب آلدوی آن مرز یک ($\rho = 1$) باشد.

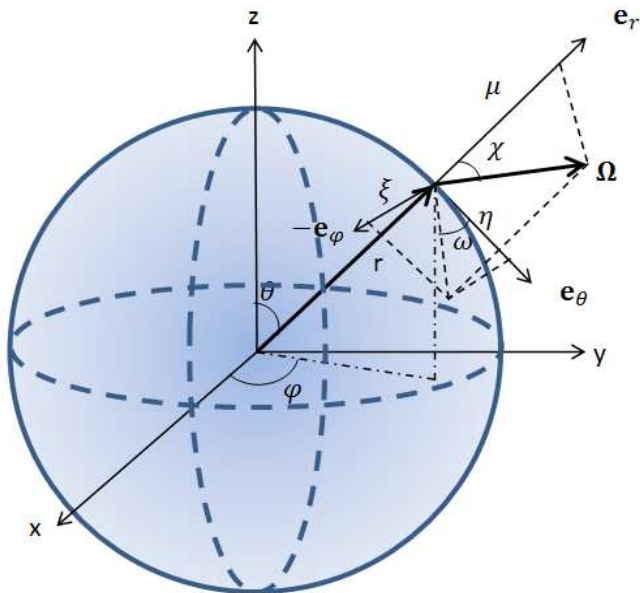


شکل ۸: مرز بازتابنده کامل

۱۲-۳- مختصات کروی همسانگرد

با توجه به شکل ۹ و مشاهده درجات آزادی در مختصات کروی می‌توان رابطه کلی زیر را برای جمله نشت در معادله ترابرد نوترون [۳۹ - ص ۳۲] در نظر گرفت:

$$\Omega \cdot \nabla \psi = \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \psi) + \frac{\eta}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \psi) + \frac{\eta}{\xi \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) \psi] + \frac{\cot \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \omega} (\xi \psi) \quad (12-17)$$



شکل ۹: وضعیت بردارهای \mathbf{r} و $\mathbf{\Omega}$ در مختصات کروی

که در رابطه (۱۲-۱۷):

$$\eta = (1 - \mu^2)^{1/2} \cos \omega \quad ; \quad \xi = (1 - \mu^2)^{1/2} \sin \omega \quad (12-18)$$

حال چنانچه ویژگی مواد تنها تابعی از r بوده و هیچ‌گونه تغییری در راستای سمتی و قطبی نداشته باشند، شار زاویه‌ای و نرده‌ای نوترون نیز تنها تابع متغیر r خواهد بود. در این حالت شکل ساده شده رابطه (۱۲-۱۷) عبارت است از:

$$\Omega \cdot \nabla \psi = \mu \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) \psi] \quad (12-19)$$

بنابراین با توجه به اینکه در حالت کروی متقارن نیز مشابه مختصات تخت یک بعدی تنها یک زاویه ($\theta = \arccos \mu$) برای مشخص نمودن وابستگی زاویه‌ای چگالی شار زاویه‌ای، $\psi(\mathbf{r}, \Omega)$ ، کفایت می‌کند، همچنان چند جمله‌ای‌های لژاندر

یک بسط مناسب را برای تحلیل وابستگی زاویه‌ای $\psi(\mathbf{r}, \Omega)$ فراهم می‌آورند. پس اکنون با یادآوری اصل $K^+[\psi^+]$ مذکور در رابطه (۸-۱۴) برای حالت کروی متقارن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 K^+[\psi^+] = & \int_V dV \{ 2\langle \psi^+(r, \mu) S^+(r, \mu) \rangle + 2\langle \Omega \cdot \nabla \psi^+(r, \mu) \mathbb{G} S^-(r, \mu) \rangle - \langle \psi^+(r, \mu) \mathbb{C} \psi^+(r, \mu) \rangle \\
 & - \langle \Omega \cdot \nabla \psi^+(r, \mu) \mathbb{G} \Omega \cdot \nabla \psi^+(r, \mu) \rangle \} - \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right) \int_{S_a} dS \langle \psi^+(R, \mu) | \mu | \psi^+(R, \mu) \rangle \quad (20-12) \\
 & + 4 \int_{S_s} dS \left\{ \int_{\mu < 0} |\mu| \psi^+(R, \mu) T(R, \mu) d\mu \right\}
 \end{aligned}$$

در بالا R شعاع کره است. با استفاده از بسط چند جمله‌ای لژاندر و اعمال روش اجزای محدود، مشابه روند منتهی به روابط (۱۲-۱۱) الی (۱۲-۱۲)، به محاسبه انتگرال‌های زاویه‌ای و مکانی به شرح زیر محتاج خواهیم بود:

جدول شماره ۳: ماتریس‌ها و انتگرال‌های زاویه‌ای برای حالت کروی متقارن

ماتریس‌های زاویه‌ای	انتگرال‌های زاویه‌ای
A_r	$\langle \mu \mathbb{P}_+(\mu) \mathbb{P}_+^T(\mu) \rangle$
U_r	$\langle \mu \mathbb{P}_-(\mu) \mathbb{P}_+^T(\mu) \rangle$
W_r	$\langle (1 - \mu^2) \mathbb{P}_-(\mu) \partial_\mu \mathbb{P}_+^T(\mu) \rangle$
$t_g^+(R)$	$2 \int_{-1}^0 \mathbb{P}_+(\mu) T_g(R, \mu) d\mu$

جدول شماره ۴: ماتریس‌ها و انتگرال‌های مکانی برای حالت کروی متقارن

ماتریس‌های مکانی	انتگرال‌های مکانی
\mathbb{R}_1^e	$4\pi \int_{r_e} r^2 m_e(r) m_e^T(r) dr$
\mathbb{R}_2^e	$4\pi \int_{r_e} r^2 \partial_r m_e(r) \partial_r m_e^T(r) dr$
\mathbb{R}_3^e	$4\pi \int_{r_e} r \partial_r m_e(r) m_e^T(r) dr$
\mathbb{R}_4^e	$4\pi \int_{r_e} m_e(r) m_e^T(r) dr$
\mathbb{R}_5^e	$4\pi \int_{r_e} r^2 m_e(r) \partial_r m_e^T(r) dr$
\mathbb{R}_6^e	$4\pi \int_{r_e} r m_e(r) m_e^T(r) dr$
\mathbb{R}_7^e	$4\pi \int_{r_e} r^2 m_e(r) dr$
\mathbb{B}_1^E	$4\pi R^2 m_E(R) m_E^T(R)$
\mathbb{B}_2^E	$4\pi R^2 m_E(R)$

حل تحلیلی این انتگرال‌ها نیز در پیوست ح از گزارش تفصیلی آمده است. با توجه به نمادگذاری‌های جداول ۳ و ۴ در حالت چندگروهی و با فرض همسانگردی چشمه‌های خارجی می‌توان ماتریس‌های سراسری \mathbb{M}_g را به شکل زیر خلاصه نویسی نمود:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_g = \sum_{e=1}^E [\mathbb{M}_g^e] = \sum_{e=1}^E & \left[\tilde{\Sigma}_{+,gg}^e \otimes \mathbb{R}_1^e + [\mathbf{U}_r^T \tilde{\Sigma}_{-,gg}^{-1,e} \mathbf{U}_r] \otimes \mathbb{R}_2^e + [\mathbf{U}_r^T \tilde{\Sigma}_{-,gg}^{-1,e} \mathbf{W}_r] \otimes \mathbb{R}_3^e \right. \\ & \left. + [\mathbf{W}_r^T \tilde{\Sigma}_{-,gg}^{-1,e} \mathbf{U}_r] \otimes \mathbb{R}_3^{Te} + [\mathbf{W}_r^T \tilde{\Sigma}_{-,gg}^{-1,e} \mathbf{W}_r] \otimes \mathbb{R}_4^e \right] + \left(\frac{1 - \rho_g}{1 + \rho_g} \right) [\mathbf{A}_r \otimes \mathbb{B}_1^E] \end{aligned} \quad (21-12)$$

به همین ترتیب مجموعاً برای \mathbb{S} خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
S_g = \sum_{e=1}^E [S_g^e] &= \frac{\chi_g}{K_{eff}} \sum_{g'=1}^G \left(\sum_{e=1}^E \left[\left([\delta_{l1} \delta_{l'1}] \sum_i v \sigma_{f,g'}^{i,e} \right) \otimes \mathbb{R}_1^e \right] \right) \cdot \xi_{g'} \\
&+ \sum_{g'=1}^G (1 - \delta_{gg'}) \\
&\times \left\{ \left(\sum_{e=1}^E \left[\Sigma_{+,gg'}^e \otimes \mathbb{R}_1^e - \left(U_r^T \Theta_{-,gg'}^e U_r \right) \otimes \left(\mathbb{R}_5^{Te} \mathbb{R}_1^{e-1} \mathbb{R}_5^e \right) \right. \right. \right. \\
&- \left. \left. \left(U_r^T \Theta_{-,gg'}^e W_r \right) \otimes \left(\mathbb{R}_5^{Te} \mathbb{R}_1^{e-1} \mathbb{R}_6^e \right) - \left(W_r^T \Theta_{-,gg'}^e U_r \right) \otimes \left(\mathbb{R}_6^{Te} \mathbb{R}_1^{e-1} \mathbb{R}_5^e \right) \right. \right. \\
&\left. \left. - \left(W_r^T \Theta_{-,gg'}^e W_r \right) \otimes \left(\mathbb{R}_6^{Te} \mathbb{R}_1^{e-1} \mathbb{R}_6^e \right) \right] \right) \cdot \xi_{g'} \\
&+ \left(\sum_{e=1}^E \left[\left(U_r^T \Theta_{-,gg'}^e \right) \otimes \mathbb{R}_5^{Te} + \left(W_r^T \Theta_{-,gg'}^e \right) \otimes \mathbb{R}_6^{Te} \right] \cdot \varepsilon_{g'}^- \right\} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{e=1}^E \left[Q_g^e [\delta_{l1}] \otimes \mathbb{R}_7^e \right] + \frac{T_g^\oplus(R)}{\sqrt{2}} \left[(A_r [\delta_{l1}]) \otimes \mathbb{B}_2^E \right]
\end{aligned} \tag{۲۲-۱۲}$$

و جمله کمکی نیز که در محاسبه S_g استفاده می شود به صورت زیر تغییر شکل می دهد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_g^- = \sum_{e=1}^E [\varepsilon_g^{-e}] = \sum_{g'=1}^G (1 - \delta_{gg'}) \left\{ \left(\sum_{e=1}^E [(\Sigma_{-gg'}^e, \tilde{\Sigma}_{-g'g'}^{-1,e}) \otimes \mathbb{I}] \right) \cdot \varepsilon_{g'}^- \right. \\ \left. - \left(\sum_{e=1}^E [(\Sigma_{-gg'}^e, \tilde{\Sigma}_{-g'g'}^{-1,e}, U_r) \otimes (\mathbb{R}_1^{e-1} \mathbb{R}_5^e) \right. \right. \\ \left. \left. + (\Sigma_{-gg'}^e, \tilde{\Sigma}_{-g'g'}^{-1,e}, W_r) \otimes (\mathbb{R}_1^{e-1} \mathbb{R}_6^e) \right] \right) \cdot \xi_{g'} \left. \right\} \end{aligned} \quad (23-12)$$

در محاسبات تک گروهی به شرط همسانگردی چشمه های خارجی حجمی، چشمه های فرد نخواهیم داشت و ماتریس های فوق به شکل زیر ساده می شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \sum_{e=1}^E \mathbf{M}_e = \sum_{e=1}^E & \left[\tilde{\Sigma}_{+e} \otimes \mathbb{R}_1^e + [\mathbf{U}_r^T \tilde{\Sigma}_{-e}^{-1} \mathbf{U}_r] \otimes \mathbb{R}_2^e + [\mathbf{U}_r^T \tilde{\Sigma}_{-e}^{-1} \mathbf{W}_r] \otimes \mathbb{R}_3^e + [\mathbf{W}_r^T \tilde{\Sigma}_{-e}^{-1} \mathbf{U}_r] \otimes \mathbb{R}_3^{eT} \right. \\ & \left. + [\mathbf{W}_r^T \tilde{\Sigma}_{-e}^{-1} \mathbf{W}_r] \otimes \mathbb{R}_4^e \right] + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right) [\mathbf{A}_r \otimes \mathbb{B}_1^E] \end{aligned} \quad (۲۴-۱۲)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \sum_{e=1}^E \mathbf{S}_e = \frac{1}{K_{eff}} \sum_{e=1}^E & \left[\left([\delta_{l1} \delta_{l'1}] \sum_i v \sigma_{f,g'}^{i,e} \right) \otimes \mathbb{R}_1^e \right] \cdot \xi + \sum_{e=1}^E \left[\frac{Q^{\oplus,e}}{\sqrt{2}} [\delta_{l1}] \otimes \mathbb{R}_7^e \right] \\ & + \frac{T^{\oplus}(R)}{\sqrt{2}} [(\mathbf{A}_r [\delta_{l1}]) \otimes \mathbb{B}_2^E] \end{aligned} \quad (۲۵-۱۲)$$

$[\delta_{l1}]$ همچنان یک ماتریس ستونی با ابعاد $M \times 1$ است که تنها درایه نخست آن برابر واحد بوده و مابقی درایه‌های آن متحد صفر است. در این جا نیز $M=(N+1)/2$ تعداد ممان‌ها در بسط P_N (در حالت یک بعدی) است. و بالاخره آن که همچون حالت تخته یک بعدی چنانچه $\rho = 1$ منظور شود، مرز بازتابنده کامل خواهیم داشت چرا که مرز آبدوی کامل و بازتابنده کامل در این هندسه معادل یکدیگر هستند.

۱۲-۴- مختصات استوانه‌ای متقارن

این چارچوب مختصات یک فرق اساسی با دو چارچوب پیشین داشته و آن لزوم وجود دو مختصه زاویه‌ای حتی در متقارن‌ترین حالت (یعنی استوانه متقارن بی نهایت) برای تعیین دقیق جهت حرکت نوترون است (شکل ۱۰). جمله نشت نوترون در حالت کلی برای چارچوب مختصات استوانه‌ای به صورت زیر نوشته می‌شود [۳۹- ص ۳۳]:

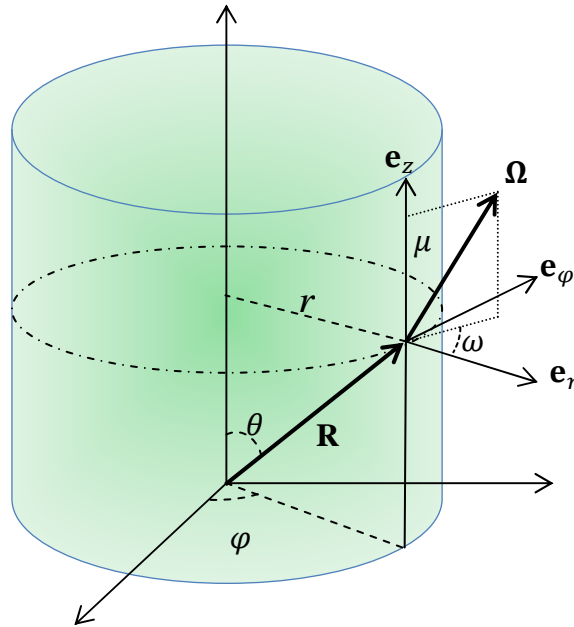
$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) &= \frac{1}{r} \sqrt{1 - \mu^2} \cos \omega \frac{\partial}{\partial r} (r \psi^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})) + \sqrt{1 - \mu^2} \sin \omega \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})}{\partial \varphi} \\ &+ \mu \frac{\partial \psi^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \omega} (\sqrt{1 - \mu^2} \sin \omega \psi^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})) \end{aligned} \quad (12-26)$$

حال چنانچه استوانه تقارن محوری داشته و در راستای محور همگن و بی نهایت باشد، تنها یک مختصه فضایی (r) برای تعیین مکان ذرات هم وضعیت کفایت می‌کند. لذا کاهش رابطه (۱۲-۲۶) برای یک مختصه فضایی عبارت است از:

$$\Omega \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, \Omega) = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \omega \frac{\partial \psi^+(\mathbf{r}, \Omega)}{\partial r} - \sqrt{1 - \mu^2} \sin \omega \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^+(\mathbf{r}, \Omega)}{\partial \omega} \quad (27-12)$$

در این مختصات با توجه به شکل ۱۰ داریم:

$$\Omega = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \omega \mathbf{e}_r + \sqrt{1 - \mu^2} \sin \omega \mathbf{e}_\varphi + \mu \mathbf{e}_z \quad (28-12)$$



شکل ۱۰: وضعیت بردارهای \mathbf{r} و $\mathbf{\Omega}$ در مختصات استوانه‌ای

با توجه به نوع انحنای سطح استوانه تنها دانستن μ برای یکتا کردن جهت حرکت نوترون‌های هم‌وضعیت کافی نبوده و مؤلفه زاویه سمتی (ω) نیز در این امر دخیل است. بنابراین توابع پایه مناسب برای بسط زاویه‌ای چگالی شار زاویه‌ای، $\psi^+(\mathbf{r}, \Omega)$ هماهنگ‌های کروی خواهد بود. به علاوه تقارن شکل استوانه حکم می‌کند که بین جهت‌های $\pm\omega$ تفاوتی وجود نداشته باشد. در نتیجه برای ارضای این تقارن سمتی، تنها آن دسته از مجموعه هماهنگ‌های کروی قابل قبول است که نسبت به ω زوج بوده و یا معادلاً حاوی عبارت $\cos m\omega$ باشند. همچنین تقارن محوری استوانه شرط $\psi(\mathbf{r}, \mu, \omega) = \psi(\mathbf{r}, -\mu, \omega)$ را نیز به مجموعه این الزامات اضافه می‌کند. این شرط سبب می‌شود تا نهایتاً از میان هماهنگ‌های کروی باقی‌مانده آن دسته که حاصل $l - m$ آن عددی زوج باشد، برگزیده شوند، چرا که با توجه به زوجیت توابع لژاندر:

$$P_l^m(-\mu) = (-1)^{l-m} P_l^m(\mu). \quad (۲۹-۱۲)$$

با رعایت این قیود می‌توان دو مجموعه زوج و فرد از هماهنگ‌های کروی برای تحلیل بخش زاویه‌ای چگالی شار زاویه‌ای در استوانه متقارن بی نهایت (برای بسط P_N) به شرح زیر معرفی نمود:

$$\begin{aligned} \text{مجموعه زوج: } \mathbb{Y}_+^T &= \{Y_{00} \quad Y_{20} \quad Y_{22} \quad Y_{40} \quad Y_{42} \quad Y_{44} \quad \cdots \quad Y_{N-1,0} \quad \cdots \quad Y_{N-1,N-1}\}; \\ \text{مجموعه فرد: } \mathbb{Y}_-^T &= \{Y_{11} \quad Y_{31} \quad Y_{33} \quad Y_{51} \quad Y_{53} \quad Y_{55} \quad \cdots \quad Y_{N,1} \quad \cdots \quad Y_{N,N}\}; \end{aligned} \quad (30-12)$$

با ذکر این مقدمات مشابه آنچه برای مختصات‌های تخت و کروی انجام شد، پس از استفاده از بسط هماهنگ‌های کروی و اعمال روش اجزای محدود بر اصل $K^+[\psi^+]$ به انتگرال‌های زاویه‌ای و مکانی قید شده در جداول ۵ و ۶ برمی‌خوریم که پیش از حل معادلات لازم است حل شوند:

جدول شماره ۵: ماتریس‌ها و انتگرال‌های زاویه‌ای برای حالت استوانه‌ای متقارن

ماتریس‌های زاویه‌ای	انتگرال‌های زاویه‌ای
A_c	$\langle \sqrt{1 - \mu^2} \cos \omega Y_+(\Omega) Y_+(\Omega)^T \rangle$
V_{c1}	$\langle \sqrt{1 - \mu^2} \cos \omega Y_-(\Omega) Y_+(\Omega)^T \rangle$
V_{c2}	$\langle \sqrt{1 - \mu^2} \sin \omega Y_-(\Omega) \partial_\omega Y_+(\Omega)^T \rangle$
$t_g^+(\mathcal{R})$	$2 \int_{-1}^0 Y_+(\Omega) T_g(\mathcal{R}, \Omega) d\Omega$
انتگرال‌گیری روی کل محدوده Ω انجام می‌شود.	

جدول شماره ۶: ماتریس‌ها و انتگرال‌های مکانی برای حالت استوانه‌ای متقارن

ماتریس‌های مکانی	انتگرال‌های مکانی
\mathbb{L}_1^e	$2\pi \int_{r_e} r m_e(r) m_e^T(r) dr$
\mathbb{L}_2^e	$2\pi \int_{r_e} r \partial_r m_e(r) \partial_r m_e^T(r) dr$
\mathbb{L}_3^e	$2\pi \int_{r_e} \partial_r m_e(r) m_e^T(r) dr$
\mathbb{L}_4^e	$2\pi \int_{r_e} \frac{1}{r} m_e(r) m_e^T(r) dr$
\mathbb{L}_5^e	$2\pi \int_{r_e} r m_e(r) \partial_r m_e^T(r) dr$
\mathbb{L}_6^e	$2\pi \int_{r_e} m_e(r) m_e^T(r) dr$
\mathbb{L}_7^e	$2\pi \int_{r_e} r m_e(r) dr$
\mathbb{B}_1^E	$2\pi \mathcal{R} m_E(\mathcal{R}) m_E^T(\mathcal{R})$
\mathbb{B}_2^E	$2\pi \mathcal{R} m_E(\mathcal{R})$
محدوده انتگرال‌گیری از ابتدای عنصر مکانی، Γ_i ، تا انتهای آن، Γ_f ، است	

با استفاده از نمادهای بکار رفته در جداول ۵ و ۶ می توان \mathbb{M}_g و \mathbb{S}_g را برای حالت چندگروهی با فرض وجود چشمه ثابت و همسانگرد حجمی و سطحی به شکل زیر خلاصه نویسی نمود:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_g = \sum_{e=1}^E [\mathbb{M}_g^e] = \sum_{e=1}^E & \left[\tilde{\Sigma}_{+,gg}^e \otimes \mathbb{L}_1^e + \left[\mathbb{V}_{c1}^T \tilde{\Sigma}_{-,gg}^{-1,e} \mathbb{V}_{c1} \right] \otimes \mathbb{L}_2^e - \left[\mathbb{V}_{c1}^T \tilde{\Sigma}_{-,gg}^{-1,e} \mathbb{V}_{c2} \right] \otimes \mathbb{L}_3^e \right. \\ & \left. - \left[\mathbb{V}_{c2}^T \tilde{\Sigma}_{-,gg}^{-1,e} \mathbb{V}_{c1} \right] \otimes \mathbb{L}_3^{Te} + \left[\mathbb{V}_{c2}^T \tilde{\Sigma}_{-,gg}^{-1,e} \mathbb{V}_{c2} \right] \otimes \mathbb{L}_4^e \right] + \left(\frac{1 - \rho_g}{1 + \rho_g} \right) [\mathbb{A}_c \otimes \mathbb{B}_1^E] \end{aligned} \quad (31-12)$$

$$\begin{aligned}
S_g = \sum_{e=1}^E [S_g^e] &= \frac{\chi_g}{K_{eff}} \sum_{g'=1}^G \left(\sum_{e=1}^E \left[\left([\delta_{l1} \delta_{l'1}] \sum_i v \sigma_{f,g'}^{i,e} \right) \otimes \mathbb{L}_1^e \right] \right) \cdot \xi_{g'} \\
&+ \sum_{g'=1}^G (1 - \delta_{gg'}) \\
&\times \left\{ \left(\sum_{e=1}^E \left[\left(\Sigma_{+,gg'}^e \otimes \mathbb{L}_1^e \right) - \left(\mathbb{V}_{c1}^T \Theta_{-,gg'}^e \mathbb{V}_{c1} \right) \otimes \left(\mathbb{L}_5^{Te} \mathbb{L}_1^{e-1} \mathbb{L}_5^e \right) \right. \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left(\mathbb{V}_{c1}^T \Theta_{-,gg'}^e \mathbb{V}_{c2} \right) \otimes \left(\mathbb{L}_5^{Te} \mathbb{L}_1^{e-1} \mathbb{L}_6^e \right) + \left(\mathbb{V}_{c2}^T \Theta_{-,gg'}^e \mathbb{V}_{c1} \right) \otimes \left(\mathbb{L}_6^{Te} \mathbb{L}_1^{e-1} \mathbb{L}_5^e \right) \right. \right. \\
&\left. \left. - \left(\mathbb{V}_{c2}^T \Theta_{-,gg'}^e \mathbb{V}_{c2} \right) \otimes \left(\mathbb{L}_6^{Te} \mathbb{L}_1^{e-1} \mathbb{L}_6^e \right) \right] \right) \cdot \xi_{g'} \\
&+ \left. \left(\sum_{e=1}^E \left[\left(\mathbb{V}_{c1}^T \Theta_{-,gg'}^e \right) \otimes \mathbb{R}_5^{Te} + \left(\mathbb{V}_{c2} \Theta_{-,gg'}^e \right) \otimes \mathbb{R}_6^{Te} \right] \right) \cdot \xi_{g'}^- \right\} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{e=1}^E \left[Q_g^{\odot e} [\delta_{l1}] \otimes \mathbb{L}_7^e \right] + \frac{T_g^{\odot}(\mathcal{R})}{\sqrt{4\pi}} \left[(A_c [\delta_{l1}]) \otimes \mathbb{B}_2^E \right]
\end{aligned} \tag{۳۲-۱۲}$$

و از رابطه زیر نیز مطابق دستورالعمل بخش دوازدهم از گزارش تفصیلی در محاسبه ε_g^- که در رابطه بالا آمده کمک گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_g^- = \sum_{e=1}^E [\varepsilon_g^{-e}] = \sum_{g'=1}^G (1 - \delta_{gg'}) \left\{ \left(\sum_{e=1}^E [(\Sigma_{-gg'}^e \tilde{\Sigma}_{-g'g'}^{-1,e}) \otimes \mathbb{I}] \right) \cdot \varepsilon_{g'}^- \right. \\ \left. - \left(\sum_{e=1}^E [(\Sigma_{-gg'}^e \tilde{\Sigma}_{-g'g'}^{-1,e} \mathbb{V}_{c1}) \otimes (\mathbb{L}_1^{e-1} \mathbb{L}_5^e) \right. \right. \\ \left. \left. + (\Sigma_{-gg'}^e \tilde{\Sigma}_{-g'g'}^{-1,e} \mathbb{V}_{c2}) \otimes (\mathbb{L}_1^{e-1} \mathbb{L}_6^e) \right] \right) \cdot \xi_{g'} \left. \right\} \end{aligned} \quad (33-12)$$

همانند دو هندسه قبلی در حالت تک گروهی بسیاری از پیچیدگی‌ها حذف شده و ماتریس‌های یاد شده در حالت سرهم‌بندی شده شکل بسیار ساده‌تری به خود می‌گیرند.

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^E \mathbf{M}_e = \sum_{e=1}^E \left[\tilde{\Sigma}_{+e} \otimes \mathbb{L}_1^e + \left[\mathbf{V}_{c1}^T \tilde{\Sigma}_{-e}^{-1} \mathbf{V}_{c1} \right] \otimes \mathbb{L}_2^e - \left[\mathbf{V}_{c1}^T \tilde{\Sigma}_{-e}^{-1} \mathbf{V}_{c2} \right] \otimes \mathbb{L}_3^e \right. \\ \left. - \left[\mathbf{V}_{c2}^T \tilde{\Sigma}_{-e}^{-1} \mathbf{V}_{c1} \right] \otimes \mathbb{L}_3^{eT} + \left[\mathbf{V}_{c2}^T \tilde{\Sigma}_{-e}^{-1} \mathbf{V}_{c2} \right] \otimes \mathbb{L}_4^e \right] + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right) [\mathbf{A}_r \otimes \mathbb{B}_1^E] \quad (34-12)$$

$$\mathbf{S} = \sum_{e=1}^E \mathbf{S}_e = \frac{1}{K_{eff}} \sum_{e=1}^E \left[\left([\delta_{l1} \delta_{l'1}] \sum_i v \sigma_{f,g'}^{i,e} \right) \otimes \mathbb{L}_1^e \right] \cdot \xi + \sum_{e=1}^E \left[\frac{Q^{\ominus,e}}{\sqrt{4\pi}} [\delta_{l1}] \otimes \mathbb{L}_7^e \right] \\ + \frac{T^{\ominus}(\mathcal{R})}{\sqrt{4\pi}} [(\mathbf{A}_c[\delta_{l1}]) \otimes \mathbb{B}_2^E] \quad (35-12)$$

$[\delta_{l1}]$ همچنان یک ماتریس ستونی با ابعاد $M \times 1$ است که تنها درایه نخست آن برابر واحد بوده و مابقی درایه‌های آن متحد صفر است. در این جا برخلاف دو حالت قبل تعداد تکانه‌ها در بسط P_N (در حالت استوانه نامتناهی یک بعدی با دو متغیر زاویه و با تقارن محوری) برابر است با $M = (N+1)(N+3)/8$. و بالاخره آن که همچون حالت تخته یک بعدی و کره

متقارن برای اعمال مرز بازتابنده کامل کافی است تا $\rho = 1$ منظور شود، چرا که مرز آبدوی کامل و بازتابنده کامل در این هندسه معادل یکدیگر هستند. (در حالت دو بعدی الزاماً چنین نیست).

۱۳- آزمون‌ها و نتایج

۱۳-۱- برنامه محاسباتی ENTRANS

بر پایه محاسبات انجام شده در فصول گذشته، برنامه محاسباتی ENTRANS توسعه داده شده است. این برنامه فعلاً قابلیت حل معادله ترابرد نوترون در محیط‌های یک بعدی (تخت، کروی و استوانه‌ای) و چندگروهی را داشته و علاوه بر آن توانایی محاسبه ضریب تکثیر مؤثر نوترون (K_{eff}) را نیز در محیط‌هایی با مواد شکافت‌پذیر دارد. در این مرحله نوع المان بکار رفته در تحلیل وابستگی فضایی این برنامه خطی (درجه یک) بوده که تعداد عناصر موجود در نواحی مختلف از

کاربر پرسیده می‌شود. حل مسائل درگیر با پراکندگی رو به بالا و یا ناهمسانگرد نیز از دیگر قابلیت‌های ENTRANS است. همچنین در بخش زاویه‌ای نیز، محدودیت مرتبه بسط (P_N) وجود نداشته و به راحتی تا هر مرتبه دلخواه قابل محاسبه می‌باشد.

به لحاظ ساختاری این برنامه متشکل از بخش‌های زیر است:

- بخش داده‌های ورودی^{۷۶}:

در این بخش داده‌های کاربر خوانده شده و متغیرهای مربوطه از جمله ابعاد، تعداد مش، ترکیب نواحی، مرزها، سطوح مقاطع و... مقداردهی می‌شوند.

⁷⁶ Input Data

- تعیین مشخصات سامانه^{۷۷}:

در این بخش با توجه به داده‌های خوانده شده از ورودی یک سری اطلاعات ثانوی مورد نیاز از جمله ابعاد ماتریس‌های محلی و سراسری، تعداد تکانه‌های زوج و فرد بسط، طول (شعاع) کل رآکتور و ... محاسبه می‌شود.

- تشکیل ماتریس‌های زاویه‌ای^{۷۸}:

در این بخش ماتریس‌های زاویه‌ای که در بخش‌های ۹ و ۱۲ معرفی شده‌اند، متناسب با مرتبه بسط اعلام شده توسط کاربر ساخته می‌شوند. از آنجا که ماتریس‌های زاویه‌ای در حقیقت انتگرال‌هایی روی هماهنگ‌های کروی و یا توابع لژاندر

⁷⁷ System Specifications

⁷⁸ Formation of Angular Matrices

و مثلثاتی هستند، امکان حل تحلیلی آن‌ها با استفاده از جداول موجود و یا استفاده از قدرت حل نمادین Mathematica فراهم است. این مزیت دقت محاسبات را تا حد زیادی بالا می‌برد.

- تشکیل ماتریس‌های ناحیه‌ای محلی^{۷۹}:

در این قسمت با توجه به مواد به کار رفته، هندسه و چشمه‌های محلی و سطحی برای هر ناحیه ماتریس‌های مکانی و محلی برای هر گروه انرژی محاسبه شده و آماده سرهم‌بندی به شکل یک ماتریس سراسری می‌شوند.

- سرهم‌بندی^{۸۰}:

⁷⁹ Formation of Regional Local Matrices

⁸⁰ Assembling

این بخش از برنامه عملیات سرهم‌بندی ماتریس‌های محلی به شکل یک ماتریس سراسری برای هر گروه انرژی، آماده‌سازی دستگاه معادلات خطی ($M_g \xi_g = S_g$) را برعهده دارد.

- محاسبات ویژه مقدار^{۸۱}:

از جمله قابلیت‌های برنامه محاسباتی ENTRANS محاسبه ضریب تکثیر نوترون‌ها (K_{eff}) است. چنانچه در پرونده ورودی ماده‌ای شکافت‌پذیر در قالب $\nu \sigma_f^i(\mathbf{r}) > 0$ داده شده باشد، این بخش خود به خود فعال شده و جستجوی K_{eff} آغاز می‌شود. در غیر این صورت (عدم وجود ماده شکافت‌پذیر) برنامه به حل دستگاه چشمه ثابت می‌پردازد. کاربر باید توجه داشته باشد که اگر چه حل همزمان دستگاه با چشمه ثابت و جستجوی مقدار ویژه در برنامه ENTRANS میسر بوده، اما چنانچه علاوه بر وجود عناصر شکافت‌پذیر چشمه‌های ثابت گروهی نیز برای محیط تحت بررسی تعریف شود،

⁸¹ Eigenvalue Calculations

ممکن است دستگاه $M\varphi_g(\mathbf{r}) = \sum_g \frac{\chi_g}{K_{eff}} v \sigma_{fg}^i(\mathbf{r}) \varphi_g(\mathbf{r}) + S$ به یک عدد معنی‌دار برای K_{eff} همگرا نشود و دستگاه مورد نظر ممکن است پاسخ فیزیکی نداشته باشد.

- مرتب‌سازی پاسخ^{۸۲}:

پس از حل دستگاه‌های معادلات گروهی اعداد مربوط به شار نرده‌ای نوترون و سایر تکانه‌های بسط از میان آن جدا شده و برای چاپ نتایج و نمودارها دسته‌بندی می‌شوند.

- صدور نتایج^{۸۳}:

⁸² Solution Arrangement

⁸³ Outcome Export

نهایتاً خروجی برنامه به شکل یک فایل Excel صادر می‌شود که ستون نخست آن نشانگر مکان و ستون‌های پس از آن به ترتیب شار بهنجار شده گروهی (در صورت انجام محاسبات بحرانیّت) را نشان می‌دهد. همچنین در یک فایل دیگر، یک سری از سایر نتایج همچون K_{eff} ، روند همگرایی آن و تعداد تکرارها، میانگین شار ناحیه‌ای و کل و بیشینه خطای مطلق ($\epsilon_g = |M_g \xi_g - S_g|$) نشان داده می‌شوند.

اطلاعات تکمیلی درباره چگونگی تشکیل فایل ورودی و اجرای برنامه در «راهنمای کاربر» به تفصیل مطرح خواهد شد.

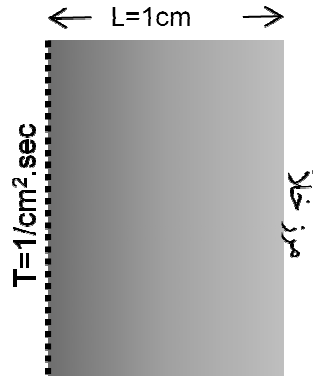
۱۳-۲- اعتبار سنجی

صحت و اعتبار یک کد منوط به تطبیق نتایج حاصل از آن با کدهای معتبر دیگر و نیز نتایج تحلیلی مسائل قابل حل است. به منظور بررسی قابلیت‌های برنامه محاسباتی ENTRANS چندین آزمون در نظر گرفته شده که خروجی ENTRANS با نتایج کدهای دیگر موجود تطبیق داده می‌شوند.

۱۳-۳- بخش اول: چارچوب مختصات تخت

- آزمون نخست: جاذب سیاه یک بعدی

این جاذب از یک محیط یک بعدی به طول 1cm و $\sigma_t = \sigma_a = 1\text{ cm}^{-1}$ تشکیل شده که روی مرز چپ آن چشمه سطحی به قدرت واحد پخش شده است (شکل ۱۱). این مسئله به شکل تحلیلی قابل حل بوده و شار نرده‌ای نوترون در فاصله x از مرز چپ به صورت زیر خواهد بود: [۱۱- ص ۳۶۵]



شکل ۱۱: هندسه جاذب کامل یک بعدی

$$\phi(x) = \frac{1}{2} T_L E_2(\sigma_a x)$$

(۱-۱۳)

که در رابطه فوق T_L شدت چشمه سطحی واقع بر مرز چپ بر حسب نوترون بر سی سی بر ثانیه بوده و E_2 نیز یک نوع تابع انتگرالی با تعریف عمومی زیر است:

$$E_n(x) \equiv \int_1^{\infty} \frac{e^{-x p}}{p^n} dp \quad (2-13)$$

این انتگرال به روش‌های عددی قابل حل بوده و البته در نرم‌افزار Mathematica با استفاده از دستور `ExpIntegralE[n,x]` به راحتی محاسبه می‌شود. اگر چشمه همسانگردی به قدرت واحد بر روی مرز سمت چپ در شرایطی که مرز برهنه باشد واقع شود، شار تحلیلی در مرز به مقدار $0/5$ میل می‌کند. لذا اگر مرز چپ را بازتابنده کامل کنیم مقدار تحلیلی شار دو برابر (یعنی $1/0$) می‌شود. در حل این مسئله با استفاده از برنامه ENTRANS مرز چپ به

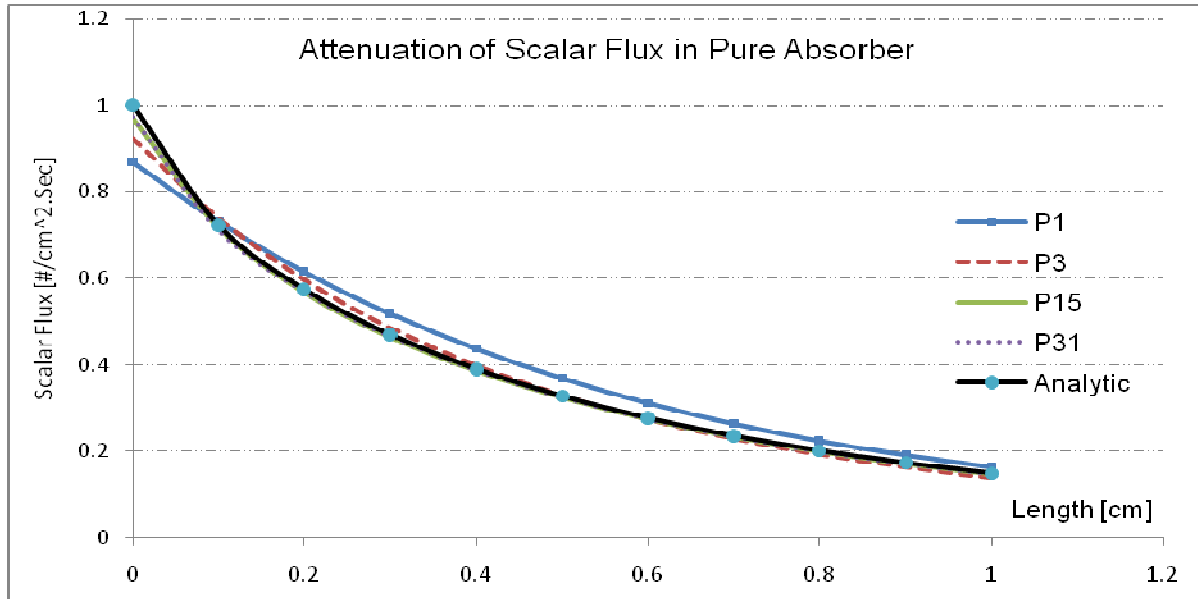
بازتابنده کامل مجهز شده و مرز راست نیز برهنه است. نتایج حل این آزمون توسط ENTRANS برای مراتب مختلف بسط در جدول ۷ و خطای مربوطه نیز در جدول ۸ منعکس شده است.

جدول شماره ۷: نتایج تحلیلی و محاسبات ENTRANS در مراتب مختلف بسط در عمق جاذب سیاه یک بعدی

x [cm]	P ₁	P ₃	P ₅	P ₉	P ₁₅	P ₃₁	Analytic
0.0	0.868858	0.911896	0.943945	0.961623	0.970347	0.973897	1.000000
0.1	0.731203	0.738242	0.735376	0.726743	0.718588	0.712155	0.722545
0.2	0.615593	0.595801	0.583858	0.572316	0.568287	0.569954	0.574201
0.3	0.518545	0.484651	0.471648	0.464245	0.464670	0.466942	0.469115
0.4	0.437131	0.397337	0.386855	0.384340	0.386680	0.387883	0.389368
0.5	0.368897	0.328242	0.321458	0.322611	0.325136	0.325489	0.326644
0.6	0.311785	0.273123	0.269999	0.273349	0.275325	0.275255	0.276184
0.7	0.264074	0.228762	0.228715	0.233116	0.234408	0.234197	0.234947
0.8	0.224325	0.192709	0.194970	0.199713	0.200461	0.200248	0.200852
0.9	0.191340	0.163084	0.166871	0.171628	0.172086	0.171921	0.172404
1.0	0.164123	0.138427	0.143004	0.147728	0.148222	0.148110	0.148496
Average	0.417938	0.3195232	0.390505	0.390493	0.390274	0.390323	0.390308

جدول شماره ۸: درصد نسبی خطای محاسبات ENTRANS در مراتب مختلف بسط برای جاذب سیاه یک بعدی

x[cm]	P ₁	P ₃	P ₅	P ₉	P ₁₅	P ₃₁	Analytic
0.0	-13.114203	-8.810386	-5.605485	-3.837689	-2.965251	-2.610302	0
0.1	1.198200	2.172518	1.775858	0.580954	-0.547669	-1.437918	0
0.2	7.208772	3.761744	1.681939	-0.328216	-1.029941	-0.739525	0
0.3	10.536802	3.311741	0.539828	-1.038099	-0.947558	-0.463318	0
0.4	12.266801	2.046745	-0.645514	-1.291238	-0.690340	-0.381388	0
0.5	12.935493	0.489348	-1.587572	-1.234543	-0.461525	-0.353535	0
0.6	12.890431	-1.108356	-2.239513	-1.026641	-0.310974	-0.336281	0
0.7	12.397282	-2.632459	-2.652607	-0.779411	-0.229614	-0.319232	0
0.8	11.686951	-4.053841	-2.928137	-0.566724	-0.194494	-0.300726	0
0.9	10.983247	-5.406088	-3.209157	-0.450107	-0.184566	-0.280482	0
1.0	10.524060	-6.780540	-3.698395	-0.517142	-0.184096	-0.259881	0



شکل ۱۲: نمودار تضعیف شار در مراتب مختلف بسط برای جاذب سیاه



شکل ۱۳: درصد خطای نسبی بین نتایج تحلیلی و محاسبات ENTRANS در مراتب مختلف بسط برای جاذب سیاه

همانگونه که مشاهده می‌شود تقریب P_1 به هیچ عنوان مناسب نبوده و پس از آن با افزایش مرتبه بسط خطای تقریب نسبت به جواب تحلیلی مسئله کمتر می‌شود. البته مشاهده می‌شود که در حرکت از P_{15} به P_{31} خطای مرز و اطراف آن اندکی افزایش یافته حال آنکه در عمق خطا کمتر می‌شود. براینکه این کاهش و افزایش در جهتی است که متوسط خطا کاهش می‌یابد و این با مشاهده متوسط شار از جدول ۷ اثبات می‌شود. این آزمون یک محک نفس‌گیر برای اغلب کدهای نوترونیک محسوب می‌گردد، چرا که وجود چشمه سطحی و عدم پراکندگی و جذب بالا موجب افت شدید شار شده که خطای محاسبات را بالا می‌برد. نکته آخر آن که چنانچه مرز چپ برهنه در نظر گرفته شود. نیمی از نوترون‌های چشمه وارد محیط نخواهد شد و لذا مقدار شار تحلیلی روی مرز $0/5$ خواهد بود. اما در این مسئله برای آنکه یک چشمه خالص با قدرت واحد به درون محیط تابش کند، مرز چپ بازتابنده قرار داده شده و بدین ترتیب نوترون‌هایی که به بیرون محیط تابش می‌شدند به آن بازتاب داده می‌شوند و قدرت چشمه دو برابر شده است.

- آزمون دوم: محاسبه عامل عدم مزیت یاخته سوخت یک بعدی

یکی از ویژگی‌های تعبیه شده در برنامه محاسباتی ENTRANS امکان محاسبه متوسط شار نرده‌ای موجود در هر یک از نواحی معرفی شده به برنامه است. بدین ترتیب چنانچه نسبت شار نرده‌ای یک ناحیه به ناحیه دیگر مد نظر باشد به راحتی اطلاعات لازم در دسترس خواهد بود. عامل عدم مزیت در یاخته‌های ناهمگن سوخت به صورت خارج قسمت متوسط شار حرارتی در کندکننده به متوسط شار در سوخت تعریف می‌شود. بنابراین به شرط در دسترس بودن میانگین شار دو ناحیه خواهیم داشت:

$$\zeta = \frac{\bar{\phi}_M}{\bar{\phi}_F} \quad (3-13)$$

که در رابطه فوق $\bar{\phi}_M$ میانگین شار نرده‌ای در بخش کند کننده بوده و $\bar{\phi}_F$ نیز مبین همان ویژگی در بخش سوخت است. از سوی دیگر ویلیامز [۶۳] یک عبارت تحلیلی برای شار نرده‌ای در محیط‌های همگن و یک بعدی با گام شبکه به طول $2L$ که در نیمی از آن چشمه به قدرت واحد کار گذاشته شده (شکل ۱۴) به شرح زیر ارائه کرده است:

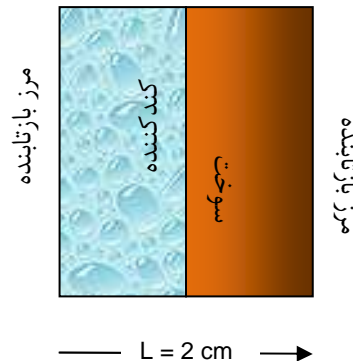
$$\phi(x) = \frac{1}{L\sigma_a} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tan^{-1}(n\pi/L\sigma_t)}{n\pi - L\sigma_s \tan^{-1}(n\pi/L\sigma_t)} \frac{\sin(n\pi/2)}{(n\pi/2)} \cos(n\pi \frac{L-x}{x}) \quad (۴-۱۳)$$

نیز در همان مرجع [۶۳] رابطه زیر برای عامل عدم مزیت یاخته‌های یک بعدی با ویژگی یاد شده، ارائه شده است.

$$\zeta_{slab} = \left(1 + S_0 \frac{2\sigma_a \Gamma^2}{\sigma_t(\Gamma - a)^2}\right) / \left(1 - S_0 \frac{2\sigma_a \Gamma^2}{\sigma_t a(\Gamma - a)}\right) \quad (۵-۱۳)$$

که در رابطه (۵-۱۳) $\Gamma = 2L$ برابر با گام شبکه بوده و a نیز ضخامت ناحیه سوخت فرض می‌شود. تعریف S_0 نیز چنین است:

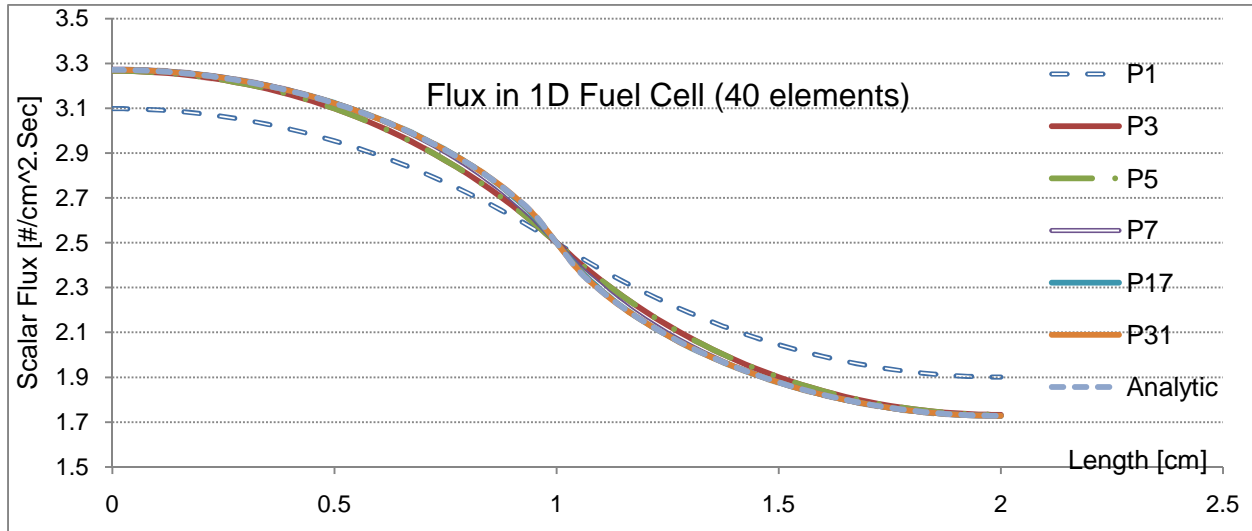
$$S_0 \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi n a / \Gamma)}{\pi^2 n^2} \cdot \frac{\tan^{-1}(2\pi n / \Gamma \sigma_t)}{(2\pi n / \Gamma \sigma_t) - \sigma_s \tan^{-1}(2\pi n / \Gamma \sigma_t)} \quad (۶-۱۳)$$



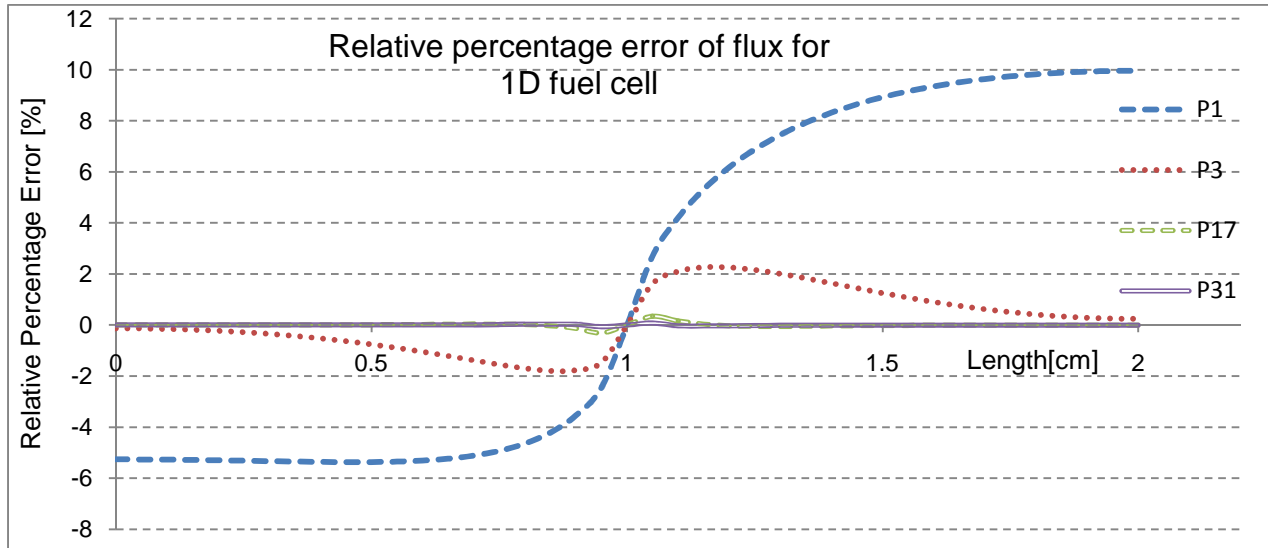
شکل ۱۴: هندسه یاخته یک بعدی سوخت مرتبط با آزمون شماره ۲

با در اختیار داشتن این دو رابطه می‌توان به نحو احسن قابلیت برنامه ENTRANS را در استخراج عامل عدم مزیت یاخته‌های یک بعدی محک زد. بدین منظور فرض می‌شود که محیط دارای چشمه حجمی نقش کندکننده یاخته‌های سوخت را ایفا کرده و محیط دیگر نقش سوخت را برعهده دارد. در مسئله پیش رو فرض می‌کنیم که نیم قطر سوخت ۱ cm و نیم قطر کندکننده نیز ۱ cm بوده و بنابراین مرز چپ این نیم یاخته را به صفحه بازتابنده کامل مسلح می‌کنیم (شکل ۱۴). از آنجا که یک شبکه سوخت از تکرار یاخته‌ها به وجود می‌آید، مرز راست نیز باید به بازتابنده کامل مجهز شود. در این آزمون یک بار تعداد ۲۰ و بار دیگر ۴۰ المان در نظر گرفته شده و نتایج حاصل از ENTRANS با عامل عدم مزیت محاسبه شده از مقدار تحلیلی آن مقایسه شده‌اند.

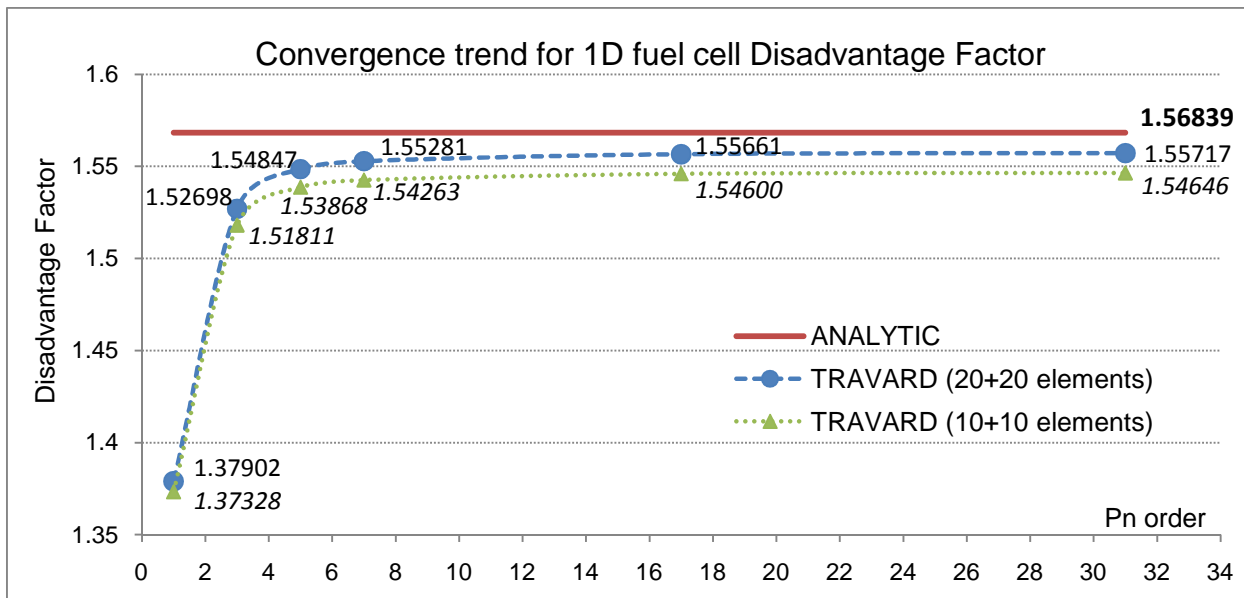
$$\sigma_t = 1.0 [cm^{-1}] \quad ; \quad \sigma_s = 0.8 [cm^{-1}]$$



شکل ۱۵: نمودار مقایسه نتایج تحلیلی و محاسبات ENTRANS در مراتب مختلف بسط برای یاخته سوخت یک بعدی



شکل ۱۶: درصد خطای نسبی بین نتایج تحلیلی و محاسبات ENTRANS در مراتب مختلف بسط برای یاخته سوخت

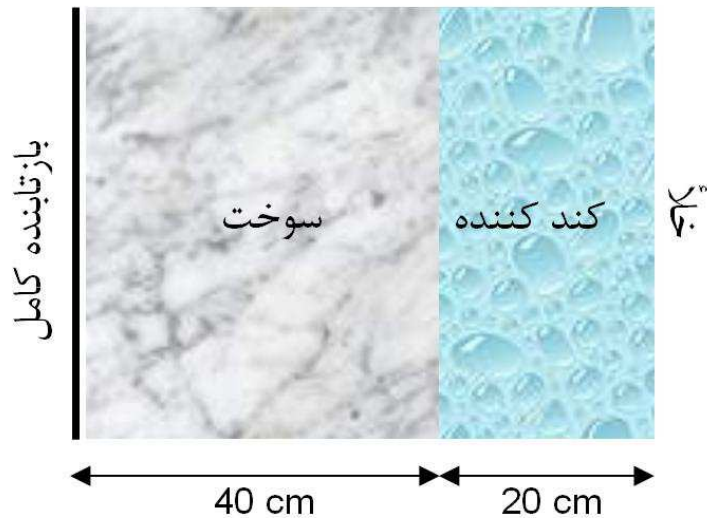


شکل ۱۷: نمودار روند همگرایی عامل عدم مزیت با افزایش مرتبه بسط و تعداد عناصر فضایی در یاخته سوخت یک بعدی

مشاهده می شود که با افزایش تعداد المان ها توأم با افزایش مرتبه بسط، مقدار شار و عامل عدم مزیت این یاخته یک بعدی به مقدار تحلیلی خود نزدیک می شود. ضمناً نمودار خطا نشان می دهد که روی مرز دو ناحیه برای همه مراتب بسط خطا تقریباً صفر است.

- آزمون سوم: قلب دو گروهی با کند کننده پیرامونی

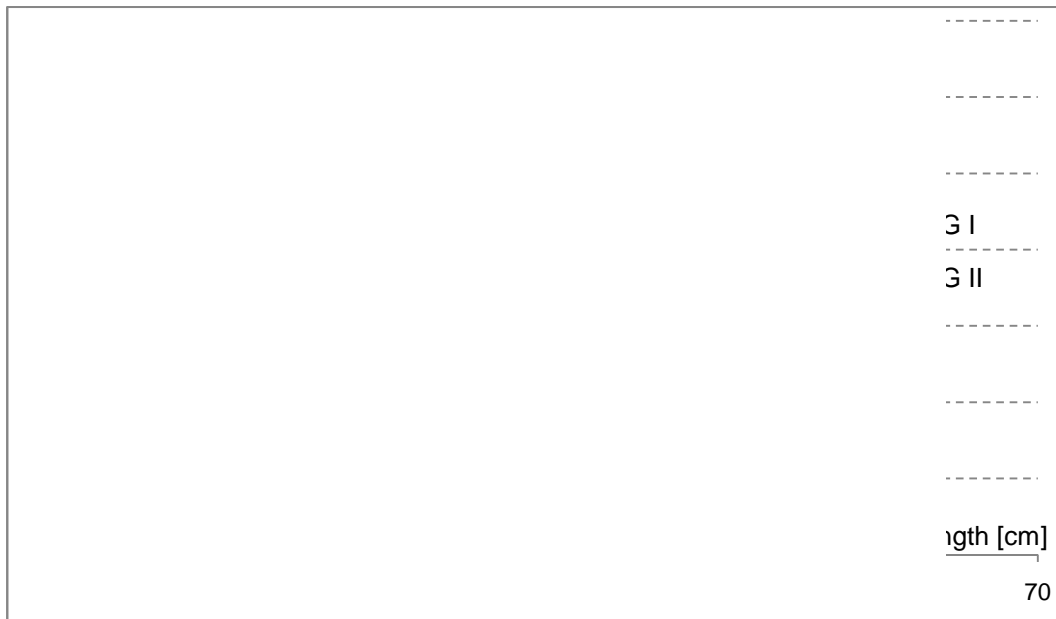
در این مسئله اطراف قلبی به ضخامت ۸۰ سانتی متر بین ماده ای به عنوان کند کننده نوترونی به ضخامت ۲۰ سانتی متر قرار گرفته است که به علت تقارن تنها نیمی از مسئله شبیه سازی می شود. مشخصات هندسی در شکل ۱۸ و سطوح مقاطع دو گروهی نیز در جدول ۹ مذکور است. نتایج حاصل از جستجوی K_{eff} توسط ENTRANS با احتساب ۴۰ المان در سوخت و ۲۰ المان در کند کننده با کد DRAGON مقایسه شده است.



شکل ۱۸: مشخصات هندسی قلب دو گروهی یک بعدی

جدول شماره ۹: سطوح مقاطع مواد بکار رفته در آزمون سوم

$\nu\sigma_{f,g}[cm^{-1}]$	$\sigma_{s,g+1\leftarrow g}[cm^{-1}]$	$\sigma_{s,g\leftarrow g}[cm^{-1}]$	$\sigma_{t,g}[cm^{-1}]$	ماده	گروه
0.00000	0.06000	0.15992	0.22222	سوخت	گروه اول
0.00000	0.10000	0.17678	0.27778	کند کننده	
0.21800	0.00000	0.63333	0.83333	سوخت	گروه دوم
0.00000	0.00000	2.20222	2.22222	کند کننده	



شکل ۱۹: تراز نسبی شار دو گروهی در بسط مرتبه سه

جدول شماره ۱۰: نتایج جستجوی ضریب تکثیر مؤثر نوترون برای آزمون سوم

K_{eff} for Two-Group Reflected Core					
DRAGON (Pij)	ENTRANS				
	P₁	P₃	P₇	P₁₇	P₃₁
1.02136	1.02098	1.02151	1.02153	1.02154	1.02154

• آزمون چهارم: رآکتور ناهمگن بحرانی دو گروهی با پراکندگی رو به بالا

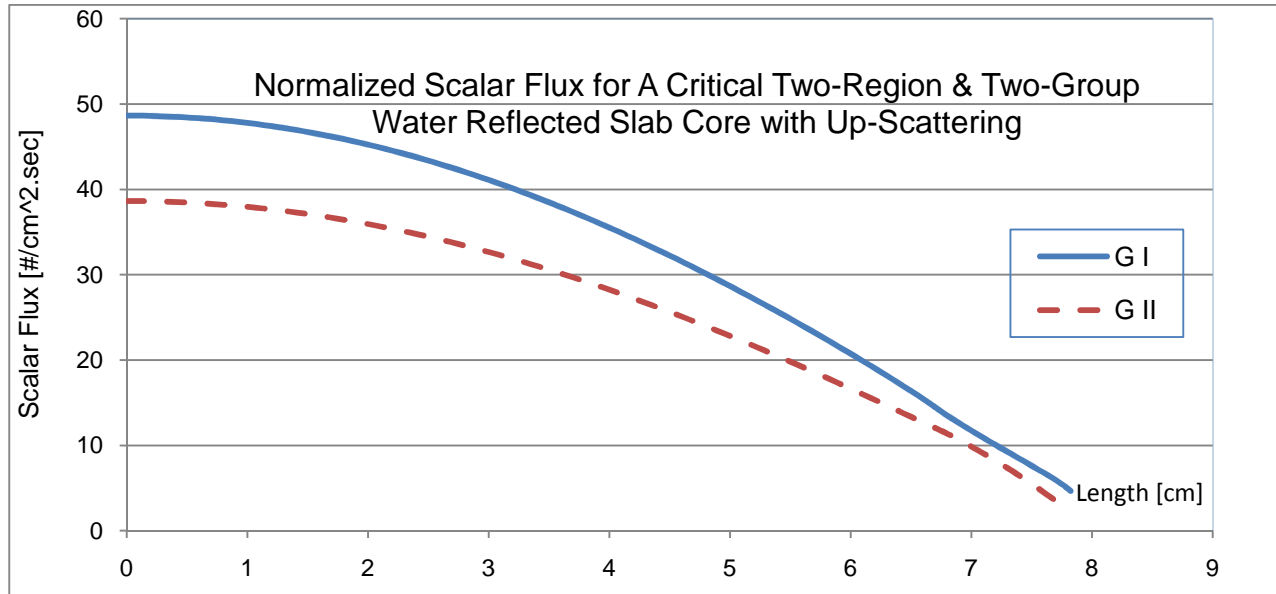
این آزمون در مرجع [۵۷] مطرح شده و در آن مشخصات یک رآکتور بحرانی ($K_{eff}=1.00000$) دو گروهی با پراکندگی رو به بالا و مجهز به بازتابنده پیرامونی داده شده است. طول نیم قلب این رآکتور متقارن $6/69680.2 \text{ cm}$ و ضخامت بازتابنده نیز $1/126152 \text{ cm}$ گزارش شده است. سایر مشخصات نوترونی نیز در جدول ۱۱ آمده است. نتایج محاسبات ENTRANS با احتساب ۱۰۰ المان در سوخت و ۲۰ المان در بازتابنده در جدول ۱۲ با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

جدول شماره ۱۱: سطوح مقاطع مربوط به آزمون چهارم

χ	$\nu\sigma_{f,g}[cm^{-1}]$	$\sigma_{s,g'\leftarrow g}[cm^{-1}]$	$\sigma_{s,g\leftarrow g}[cm^{-1}]$	$\sigma_{t,g}[cm^{-1}]$	ماده	گروه
1.0	2.5(0.000836)	0.04635	0.83892	0.88721	سوخت	گروه اول
	0.00000	0.04749	0.029564	0.88798	کند کننده	
0.0	2.5(0.029564)	0.000767	2.9183	2.9728	سوخت	گروه دوم
	0.00000	0.000363	2.9676	2.9865	کند کننده	

جدول شماره ۱۲: نتایج محاسبات بحرانیت برای رآکتور ناهمگن دوگروهی

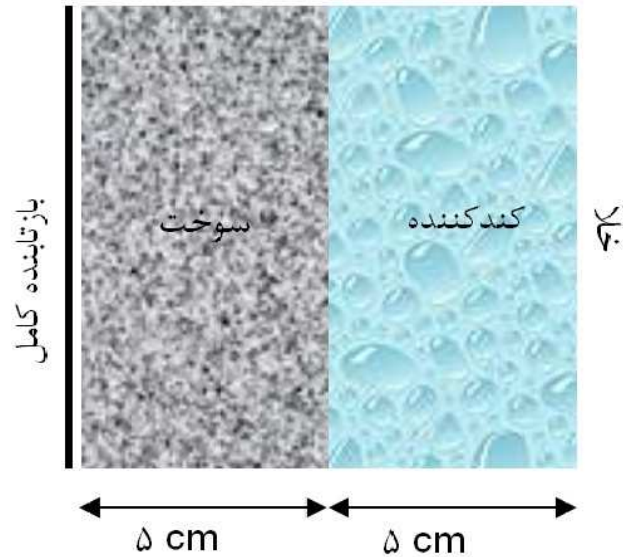
K_{eff} for Two-Group Reflected Core by ENTRANS ($\Delta K=1E-6$)					
Method	P₁	P₃	P₅	P₁₅	P₃₁
K_{eff}	0.996355	0.999803	0.999925	0.999999	1.00001
Error(%)	-0.3645	-0.0197	-0.0075	-0.0001	+0.001



شکل ۲۰: نمودار تراز نسبی شار دوگروهی در بسط مرتبه سه

- آزمون پنجم: رآکتور چهار گروهی دو ناحیه‌ای

هدف در این آزمون سنجش توانایی برنامه ENTRANS در حل مسائل با بیش از دو گروه انرژی است. شکل ۲۱ یک رآکتور دو ناحیه‌ای را نشان می‌دهد که مرز چپ آن بازتابنده کامل بوده و مرز راست آن خلا است. مشخصات نوترونی این دو ناحیه در جدول ۱۳ آمده و نتایج محاسبات بحرانی با احتساب ۴۰۰ المان خطی با نتایج کد DRAGON که بر پایه معادله انتگرالی ترابرد توسعه یافته مقایسه شده است.



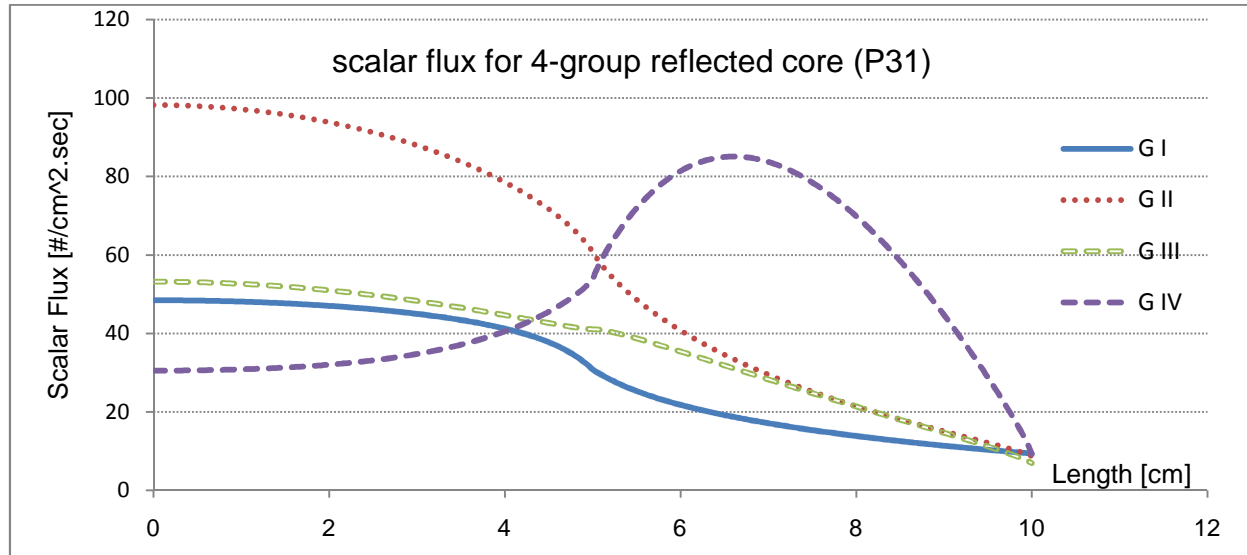
شکل ۲۱: مشخصات هندسی رآکتور چهار گروهی یک بعدی

جدول شماره ۱۳: سطوح مقاطع مربوط به آزمون پنجم

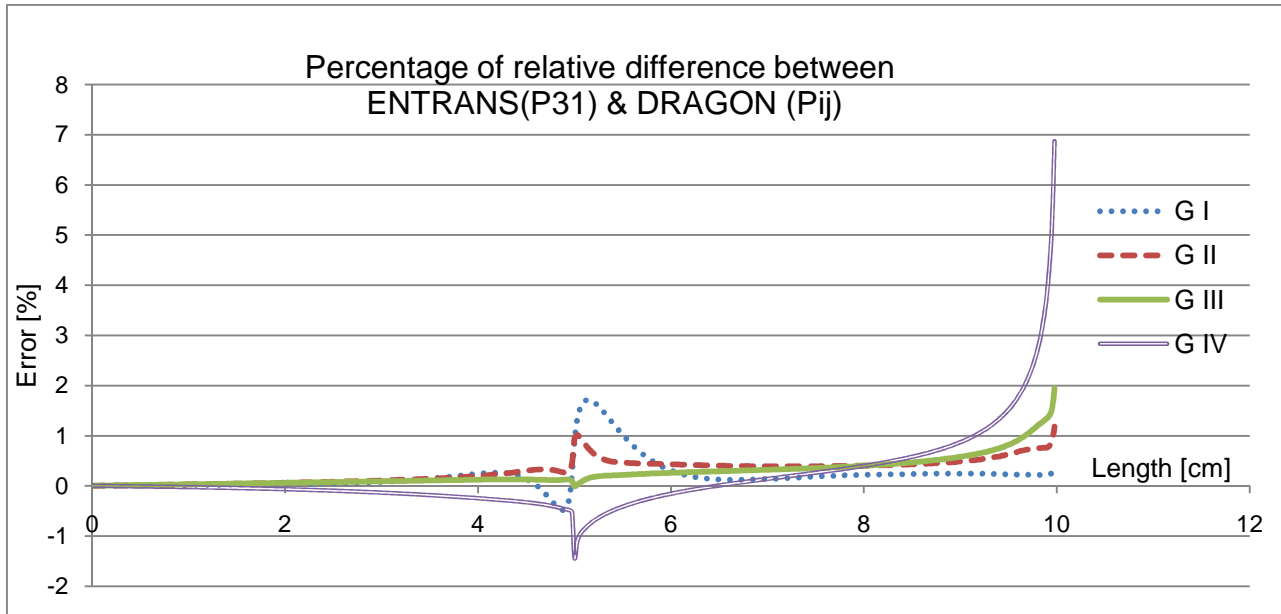
χ	$\nu\sigma_{f,g}[cm^{-1}]$	$\sigma_{s,g+1\leftarrow g}[cm^{-1}]$	$\sigma_{s,g\leftarrow g}[cm^{-1}]$	$\sigma_{t,g}[cm^{-1}]$	ماده	گروه
0.575	0.009572	0.083004	0.066206839	0.154156839	سوخت	گروه اول
	0.0000	0.0941	0.0091	0.1032	کند کننده	
0.425	0.0171448	0.0584	0.245499057	0.306739057	سوخت	گروه دوم
	0.0000	0.1353	0.2171	0.3524	کند کننده	
0.000	0.01768	0.06453	0.43253312	0.52759312	سوخت	گروه سوم
	0.0000	0.1387	0.4146	0.5544	کند کننده	
0.000	0.158140	0.0000	0.819822279	0.940822279	سوخت	گروه چهارم
	0.0000	0.0000	2.279	2.2981	کند کننده	

جدول شماره ۱۴: نتایج محاسبات بحرانیت برای رآکتور ناهمگن چهارگروهی

K_{eff} for Four-Group Reflected Core by ENTRANS ($\Delta K=1E-6$)						
Method	P_1	P_3	P_7	P_{15}	P_{31}	DRAGON (P_{ij})
K_{eff}	0.659508	0.683737	0.685528	0.685432	0.685398	0.685325
Δ (%)	-3.76698	-0.23157	0.029767	0.015759	0.010798	0.000000



شکل ۲۲: شار چهارگروهی برای رآکتور آزمون پنجم



شکل ۲۳: درصد اختلاف نسبی شار گروهی بین ENTRANS و کد DRAGON

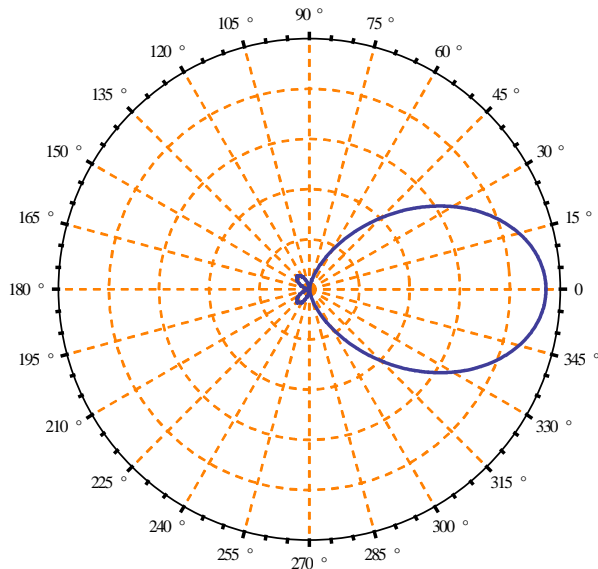
مشاهده می‌شود که به جز در بخش مرز داخلی و خارجی اختلاف سطح شار برای همه گروه‌ها عموماً زیر ۱ درصد بوده که احتمالاً به شیوه متفاوت تحلیل مرز در این دو کد برمی‌گردد. شاید با رجوع به نتایج آزمون دوم (خطای شار در یاخته یک بعدی) بتوان این نتیجه را برداشت نمود که برنامه ENTRANS حداقل در فصل مشترک نواحی داخلی رفتار دقیق‌تری دارد. در خصوص ضریب تکثیر موثر نوترون‌ها اختلاف عدد محاسبه شده توسط برنامه ENTRANS (P_{31}) و کد DRAGON حدود ۰/۰۱ درصد بوده که قابل قبول است.

- آزمون ششم: تیغه همگن با چشمه ثابت دو گروهی و پراکندگی شدیداً ناهمسانگرد

در این آزمون که در مرجع [۱۱] مطرح شده یک تیغه همگن به ضخامت ۲۰ سانتی‌متر در نظر گرفته می‌شود که در دو سانتی‌متر نخست آن یک چشمه دو گروهی به قدرت واحد به طور یکنواخت پخش شده است. مرز چپ این تیغه بازتابنده کامل و مرز راست نیز برهنه است. سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی در این تیغه از رابطه زیر تبعیت می‌کند^{۸۴}:

$$\sigma_s(\Omega, \Omega') = \sigma_s(\mu) = 3 \sigma_{s0} \mu^2 (1 + \mu) / 2 \quad (7-13)$$

^{۸۴} تابع داده شده در مرجع [۱۰] فاقد ضریب ۳ است که به نظر می‌رسد اشتباه باشد.

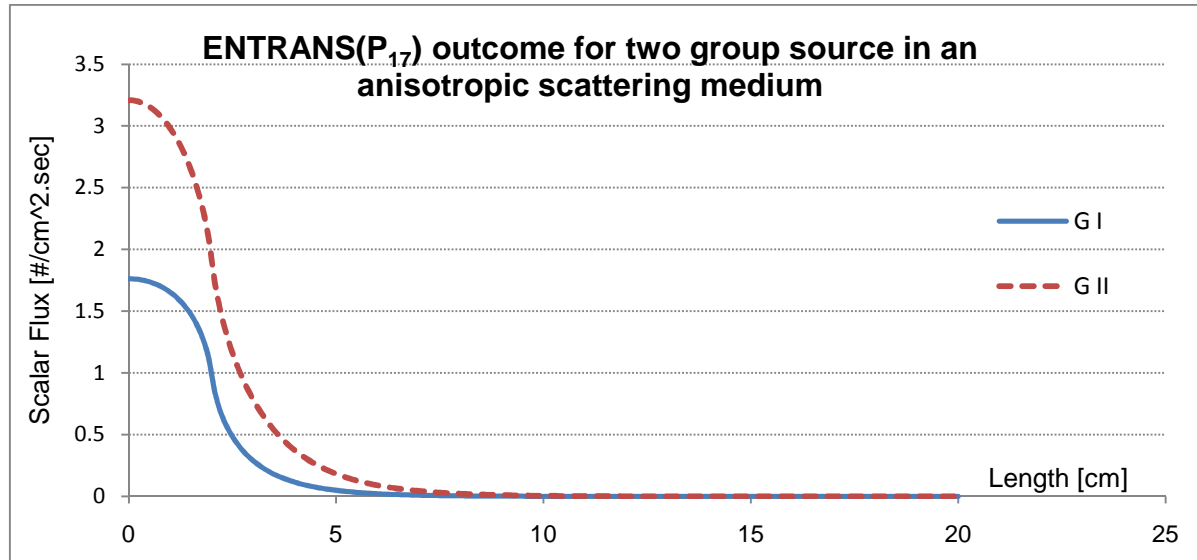


شکل ۲۴: شکل فضایی پراکندگی ناهمسانگرد تابع (۷-۱۳)

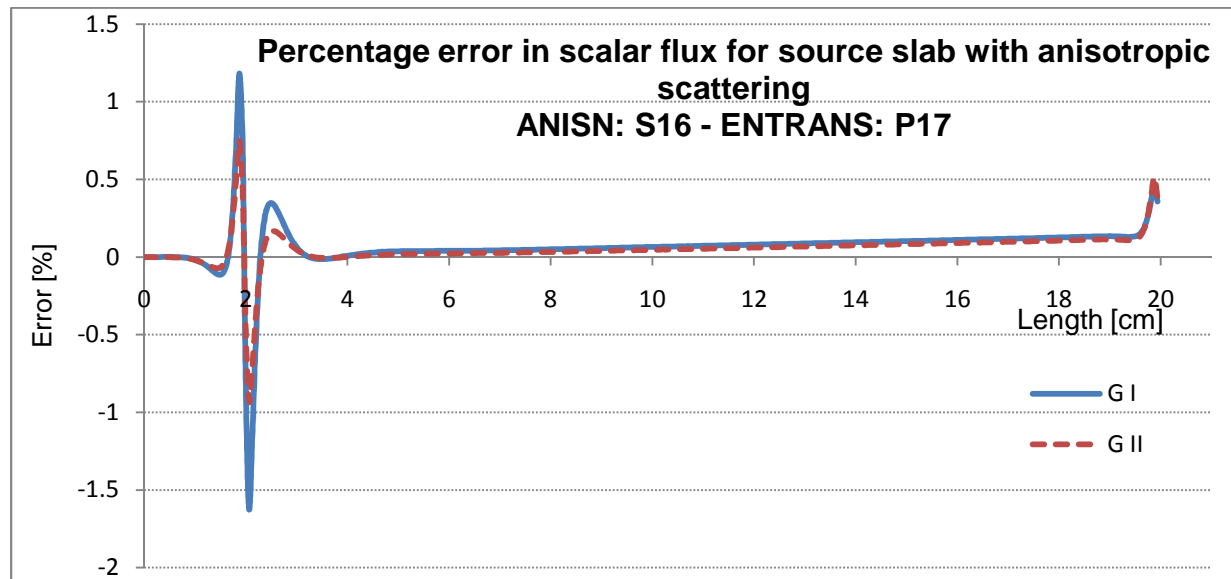
همانطور که از شکل ۲۴ پیدا است، این هسته دارای پراکندگی کاملاً ناهمسانگرد می‌باشد. سطوح مقاطع این مسئله در جدول ۱۵ قید شده و نتایج بین ENTRANS و کد ANISN در حالت S_{16} با احتساب 320 المان در طول تیغه با یکدیگر مقایسه شده‌اند. با توجه به دقت ENTRANS در فصول مشترک داخلی (که در نتایج آزمون دوم مختصات تیغهای دیده می‌شود) شاید بتوان افزایش اختلاف در شکل ۲۶ در $x=2$ cm را به خطای کد ANISN نسبت داد.

جدول شماره ۱۵: سطوح مقاطع مرتبط با آزمون ششم

	Source [cm ⁻³ .s ⁻¹]	Group cross-sections [cm ⁻¹]					Inter-group cross sections (1 → 2) [cm ⁻¹]			
		σ_t	σ_{s0}	σ_{s1}	σ_{s2}	σ_{s3}	σ_{s0}	σ_{s1}	σ_{s2}	σ_{s3}
Group1	1.0	1.0	1/2	3/10	1/5	3/35	1/2	3/10	1/5	3/35
Group2	1.0	1.0	1/2	3/10	1/5	3/35				



شکل ۲۵: نمودار شار دو گروهی در محیط با پراکندگی ناهمسانگرد (آزمون ششم)



شکل ۲۶: نمودار درصد اختلاف نسبی شار در محیط با پراکندگی ناهمسانگرد (آزمون ششم)

۱۳-۴- بخش دوم: چارچوب مختصات کروی

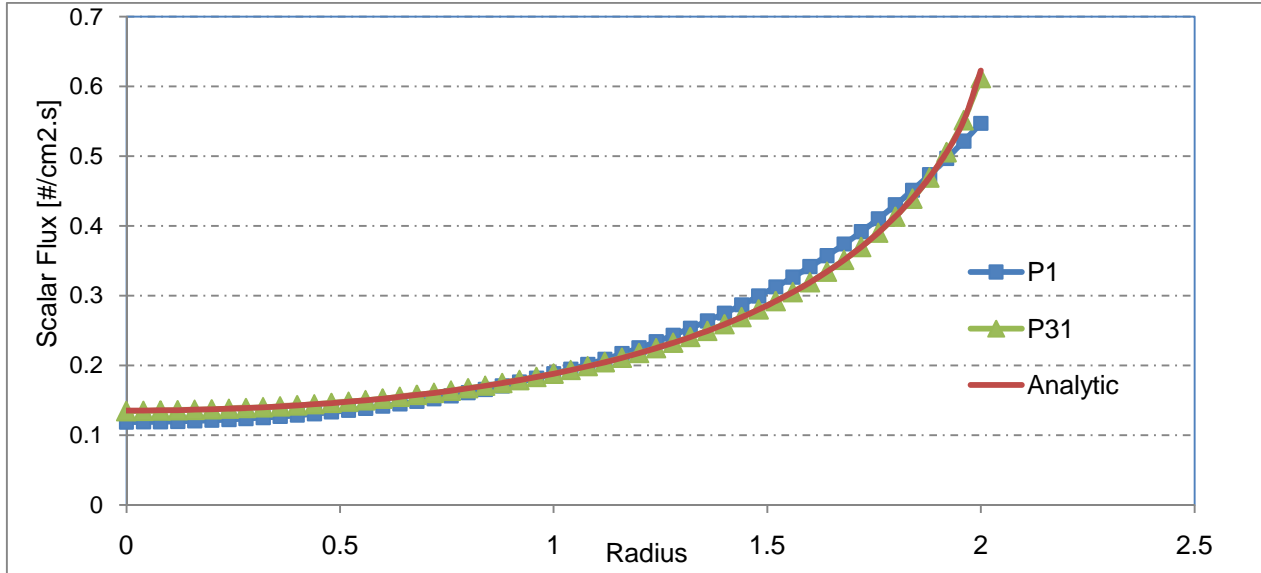
- آزمون نخست: کره سیاه با چشمه سطحی تک گروهی

در نخستین آزمون مورد بررسی در مختصات کروی یک کره جاذب کامل به شعاع ۲ سانتی‌متر را در نظر می‌گیریم که روی سطح آن یک چشمه سطحی به قدرت واحد پخش شده است. همچنین $\sigma_a = 1/cm$ فرض می‌شود. شار در کره از رابطه تحلیلی [۱۱-ص ۳۷۳]^{۸۵} زیر پیروی می‌کند:

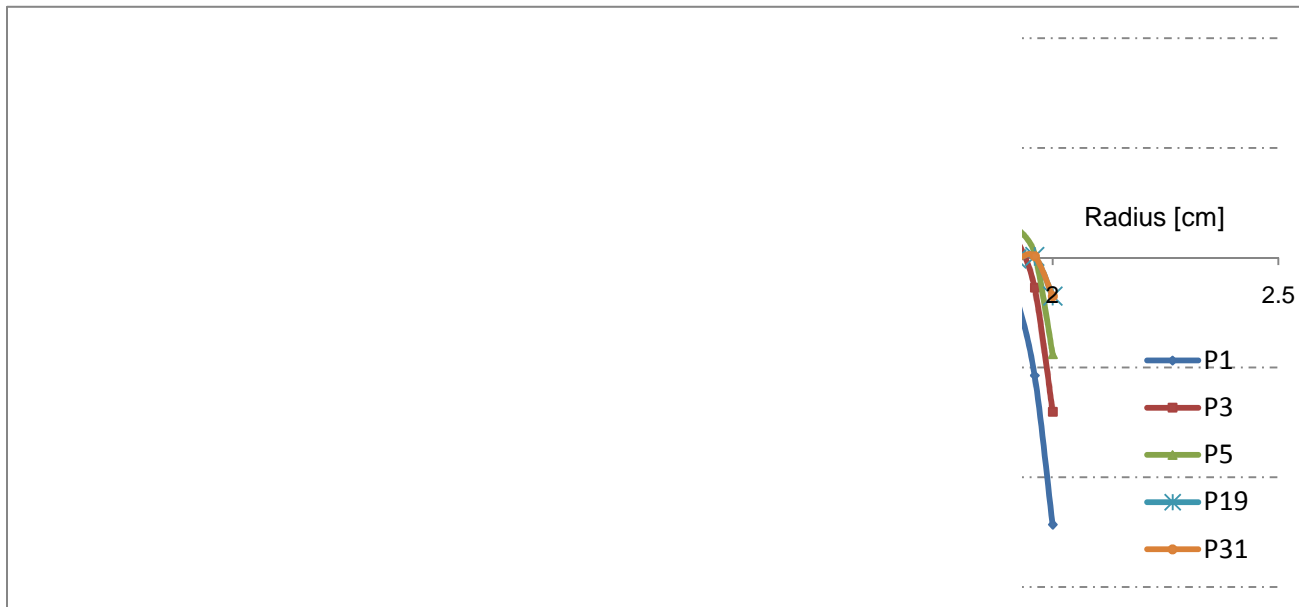
^{۸۵} متاسفانه رابطه داده شده در صفحه ۳۷۳ مرجع [۱۱] ایراد تایپی دارد. رابطه صحیح همین است که در این گزارش ارایه شده است.

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{T}{4r} \left\{ \frac{e^{-\sigma_a R}}{\sigma_a} [e^{\sigma_a r} - e^{-\sigma_a r}] + (R+r) \int_1^\infty \frac{e^{-\sigma_a(R-r)t}}{t^2} dt - (R-r) \int_1^\infty \frac{e^{-\sigma_a(R+r)t}}{t^2} dt \right\} \\ &= \frac{T}{4\sigma_a r} \left\{ 2 e^{-\sigma_a R} \sinh(\sigma_a r) + \sigma_a (r+R) E_2(\sigma_a(R-r)) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_a (r-R) E_2(\sigma_a(r+R)) \right\} \end{aligned} \quad (۸-۱۳)$$

که T شدت چشمه سطحی، r شعاع مورد بررسی، R شعاع کره و E_2 نیز تابع انتگرال نمایی است که در رابطه (۲-۱۳) به آن اشاره گردید. این مسئله برای درجات مختلف بسط حل شده و با نمودار تحلیلی مقایسه شده است.



شکل ۲۷: نمودار مقایسه شار تحلیلی و محاسبه شده توسط ENTRANS برای کره جاذب با چشمه سطحی



شکل ۲۸: نمودار درصد خطای نسبی شار محاسبه شده توسط ENTRANS برای کره جاذب با چشمه سطحی

همانطور که از نمودار ۲۸ پیداست با افزایش مرتبه بسط خطای تطبیق کمتر می‌شود.

جدول شماره ۱۶: مقادیر محاسبه شده شار در کره جاذب توسط ENTRANS برای بسط‌ها و تعداد المان‌های متنوع

Radius [cm]	P ₁		P ₃		P ₇		P ₃₁		Exact Flux [cm ⁻³ .s ⁻¹]
	No. Elements:		No. Elements:		No. Elements:		No. Elements:		
	100	200	100	200	100	200	100	200	
0.0	0.118957	0.119013	0.130921	0.130947	0.130947	0.131001	0.135009	0.135155	0.135335
0.2	0.121381	0.121417	0.137962	0.132666	0.133280	0.133239	0.137112	0.137143	0.137151
0.5	0.134437	0.134470	0.142085	0.142057	0.144975	0.144945	0.147046	0.147041	0.147050
0.1	0.188092	0.188130	0.183097	0.183073	0.189696	0.189724	0.188226	0.188237	0.188234
1.5	0.306062	0.306113	0.289101	0.289119	0.284621	0.284618	0.286105	0.286108	0.286114
2.0	0.548000	0.548266	0.580635	0.581068	0.606279	0.607002	0.617297	0.619878	0.622711

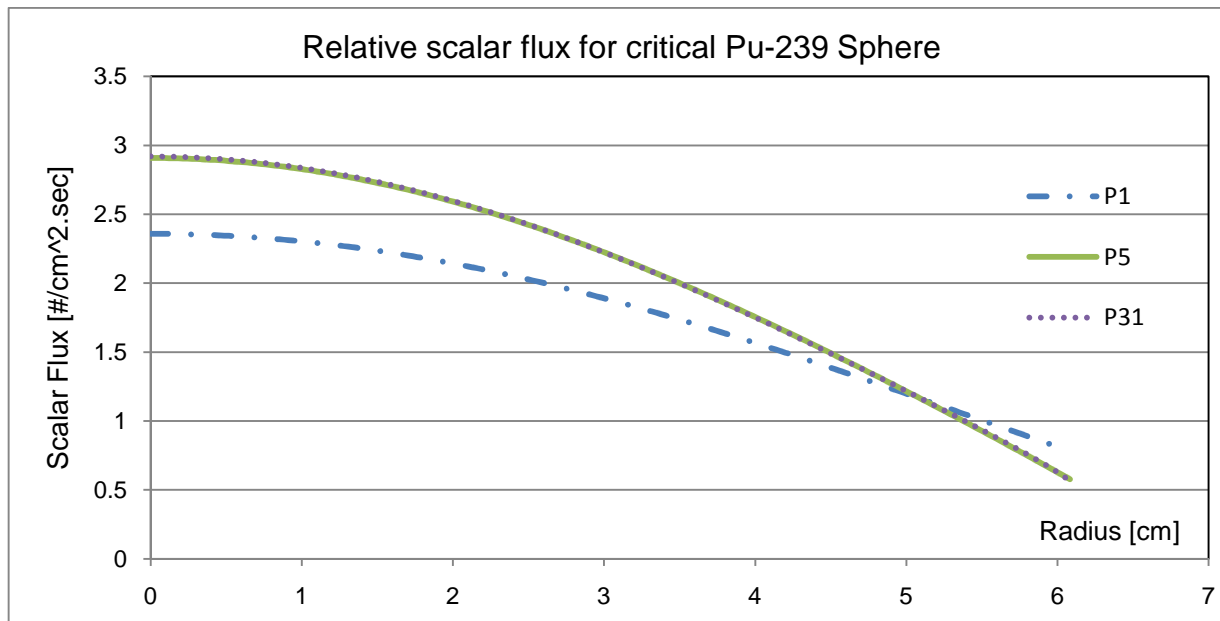
- آزمون دوم: کره Pu-239 بحرانی تک گروهی:

این آزمون در [۵۷] آمده و به طور ساده یک کره بحرانی برهنه از جنس پلوتونیم ۲۳۹ با شعاع ۶/۰۸۲۵۴۷ سانتی متر است. هدف در این آزمون سنجش دقت برنامه ENTRANS در محاسبه ضریب تکثیر موثر نوترون ها است.

$$\sigma_t = 0.32640 \text{ cm}^{-1}; \quad \sigma_s = 0.225216 \text{ cm}^{-1}; \quad v\sigma_f = 2.84 * 0.0816 \text{ cm}^{-1};$$

جدول شماره ۱۷: نتایج محاسبات بحرانیت برای کره پلوتونیومی بحرانی

Calculated K_{eff} for Critical Pure Pu-239 by ENTRANS - K_{eff} [ref.] = 1.000000;							
No. of Elements:	P_1	P_3	P_5	P_7	P_{19}	P_{31}	$\Delta(\% - P_{31})$
10	0.947452	0.995037	0.995352	0.995549	0.995591	0.995592	-0.4408
50	0.944896	0.999001	0.999338	0.999479	0.999550	0.999550	-0.0450
100	0.944961	0.999287	0.999639	0.999787	0.999873	0.999873	-0.0127
200	0.944982	0.999364	0.999720	0.999870	0.999963	0.999965	-0.0035



شکل ۲۹: نمودار شار نسبی محاسبه شده توسط ENTRANS برای کره پلوتونیومی بحرانی

- آزمون سوم: کره بحرانی U-235 تک گروهی با بازتابنده آب سبک

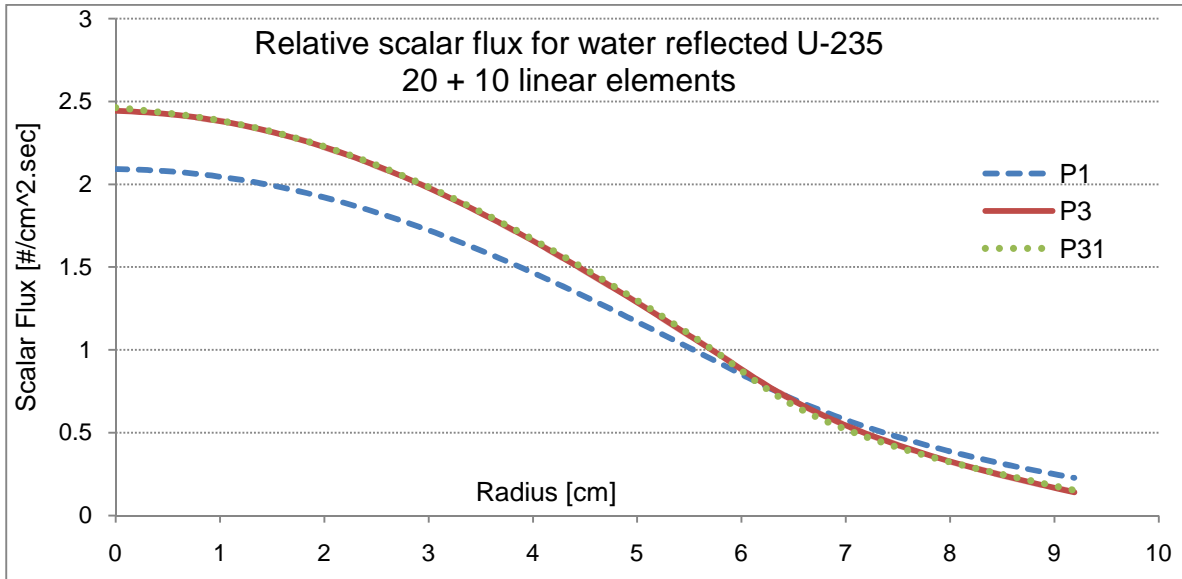
این آزمون نیز در [۵۷] آمده و متشکل از یک کره بحرانی از جنس اورانیوم ۲۳۵ به شعاع ۶/۱۲۷۴۵ سانتی‌متر و بازتابنده آبی به ضخامت ۳/۰۶۳۷۲۵ سانتی‌متر با مرزهای خلا است. سطوح مقاطع تک گروهی این سامانه در جدول ۱۸ قید شده و نتایج نیز در جدول ۱۹ برای مراتب مختلف بسط مقایسه شده اند.

جدول شماره ۱۸: سطوح مقاطع تک گروهی برای کره اورانیومی بحرانی با بازتابنده آب

Material	$\sigma_t [cm^{-1}]$	$\sigma_s [cm^{-1}]$	ν	$\sigma_f [cm^{-1}]$
U-235	0.32640	0.248064	2.797101	0.06528
H ₂ O	0.32640	0.293760	0.0	0.0

جدول شماره ۱۹: نتایج محاسبات بحرانیت برای کره اورانیومی بحرانی با بازتابنده آب

Calculated K_{eff} for Critical Water Reflected U-235 by ENTRANS - $K_{\text{eff}} [\text{ref.}] = 1.000000$							
No. Elements:	P_1	P_3	P_5	P_7	P_{19}	P_{31}	$\Delta(\% - P_{31})$
10 + 5	0.857952	0.997454	1.001467	1.001846	1.002136	1.002135	0.2135
20 + 10	0.896589	0.995447	0.999471	0.999923	1.000383	1.000386	0.0386
40 + 20	0.896254	0.994957	0.998988	0.999464	1.000020	1.000040	0.0040
80 + 40	0.896171	0.994836	0.998869	0.999350	0.999944	0.999978	-0.0022



شکل ۳۰: نمودار شار نسبی محاسبه شده توسط ENTRANS برای کره اورانیومی بحرانی

- آزمون چهارم: محاسبه ضریب تکثیر بی‌نهایت راکتور اورانیومی با پراکندگی ناهمسانگرد

در این آزمون مطرح شده در مرجع [۵۷] راکتوری اورانیومی با سطوح مقاطع دو گروهی و پراکندگی ناهمسانگرد داده شده است. از آنجا که در این آزمون هدف بررسی صحت الگوریتم بکار رفته در کد در یافتن K_{inf} است، ابعاد سامانه، مرتبه بسط و تعداد عناصر فضایی مهم نبوده و تنها لازم است که مرز خارجی بازتابنده کامل باشد. در این صورت شار نرده‌ای نوترون برای هر دو گروه انرژی باید ثابت باشد.

جدول شماره ۲۰: سطوح مقاطع رآکتور اورانیومی با پراکندگی ناهمسانگرد

Group	σ_t [cm ⁻¹]	$\sigma_{s0,g \leftarrow g}$ [cm ⁻¹]	$\sigma_{s0,g+1 \leftarrow g}$ [cm ⁻¹]	$\sigma_{s1,g \leftarrow g}$ [cm ⁻¹]	$\sigma_{s1,g+1 \leftarrow g}$ [cm ⁻¹]	ν	σ_f [cm ⁻¹]	χ
I	0.65696	0.62568	0.029227	0.27459	0.0075737	2.50	0.0010484	1
II	2.52025	2.44383	0.0	0.83318	0.0	2.50	0.050632	0

جدول شماره ۲۱: نتایج محاسبات برای رآکتور اورانیومی با پراکندگی ناهمسانگرد

	K_{inf}	ϕ_1/ϕ_2
Analytic [57]	1.631452	2.614706
ENTRANS	1.6314515	2.6147055
$\Delta(\%)$	0.00000	0.00000

- آزمون پنجم: کره شش گروهی GODIVA

کره GODIVA یک سامانه برهنه و به طور تجربی بحرانی است. این کره از جنس اورانیوم با درصد غنای بالا بوده و شعاع آن $۸/۷۴۱$ سانتی متر اعلام شده است [۳۵]. برای محاسبات بحرانیات این کره سطح مقطعی داده نشده و لذا کاربر خود باید به تولید سطح مقطع پردازد. بدین منظور در محاسبات ما از سطوح مقاطع شش گروهی Hansen-Roach [۱۶] استفاده شده است. نتایج محاسبات ENTRANS برای مقادیر مختلف بسط آورده شده است.

جدول شماره ۲۲: نتایج محاسبات بحرانیت برای کره شش گروهی GODIVA؛

Calculated K_{eff} for 6-Group GODIVA Assembly by ENTRANS - K_{eff} [ref.] = 1.000 ± 0.001							
No. Elements:	P_1	P_3	P_5	P_7	P_{19}	P_{31}	$\Delta(\% -P_{31})$
10	0.948149	1.004510	1.005010	1.005185	1.005210	1.005210	+0.521
50	0.944256	0.997195	0.997546	0.997693	0.997770	0.997770	- 0.223
100	0.944032	0.996970	0.997317	0.997462	0.997552	0.997553	- 0.245
200	0.944001	0.996913	0.997260	0.997405	0.997499	0.997501	- 0.250

با مراجعه به جدول ارزیابی شده در [۳۵] برای مقایسه نتایج سایر کدها می توان مشاهده نمود که نتایج ENTRANS با محاسبات دیگر کدها همخوانی مطلوبی دارد. سایر کدها محدوده ۰/۹۹۴ تا ۰/۹۹۸ را برای K_{eff} این سامانه گزارش کرده اند.

۱۳-۵- بخش سوم: چارچوب مختصات استوانه‌ای

- آزمون نخست: استوانه برهنه بحرانی و تک‌گروهی از جنس Pu-239

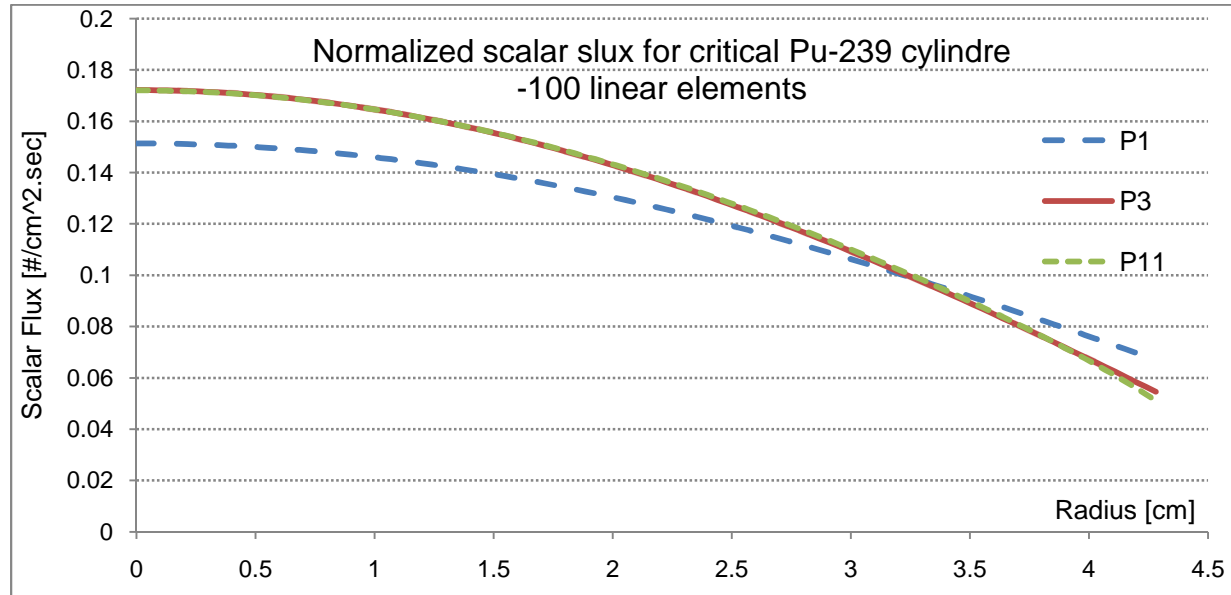
مشخصات این استوانه بحرانی به شعاع $4/279960$ سانتی‌متر در $[57]$ آمده و در جدول ۲۳ عیناً تکرار شده است. مشابه قبل نتایج محاسبات بحرانی برای مراتب مختلف بسط و تعداد عناصر فضایی مختلف با یکدیگر مقایسه شده‌اند. نکته قابل توجه آنکه همانطور که قبلاً اشاره گردید به دلیل آن که در مختصات استوانه‌ای بر خلاف مختصات تخت و کروی دو متغیر زاویه‌ای (μ و ω) دخیل است، حجم محاسبات در بسط‌های مراتب بالا بسیار بیشتر از همان محاسبات در چارچوب‌های تخت و کروی است.

جدول شماره ۲۳: سطوح مقاطع تک گروهی استوانه پلوتونیومی

	$\sigma_t [cm^{-1}]$	$\sigma_s [cm^{-1}]$	ν	$\sigma_f [cm^{-1}]$
Pu-239	0.32640	0.225216	2.84	0.081600

جدول شماره ۲۴: نتایج محاسبات بحرانیت برای استوانه پلوتونیومی تک گروهی

Calculated K_{eff} for Bare Critical Pu-239 by ENTRANS - $K_{eff} [ref.] = 1.000000$						
No. Elements:	P_1	P_3	P_5	P_7	P_{19}	$\Delta(\% - P_{19})$
10	0.936363	0.997884	1.002120	1.002730	1.003020	+0.3020
50	0.934973	0.995168	0.999200	0.999679	1.000080	+0.0080
100	0.944032	0.995084	0.999110	0.999677	0.999995	- 0.0005



شکل ۳۱: نمودار شار بهنجار شده برای استوانه پلوتونیومی بحرانی

همان طور که مشاهده می شود با افزایش مراتب بسط همگرایی جواب ها رعایت شده و اختلاف مقدار ضریب تکثیر مؤثر نوترون ها با عدد داده شده در مرجع کاهش می یابد.

• آزمون دوم: استوانه بحرانی تک گروهی از جنس Pu-239 با بازتابنده آب

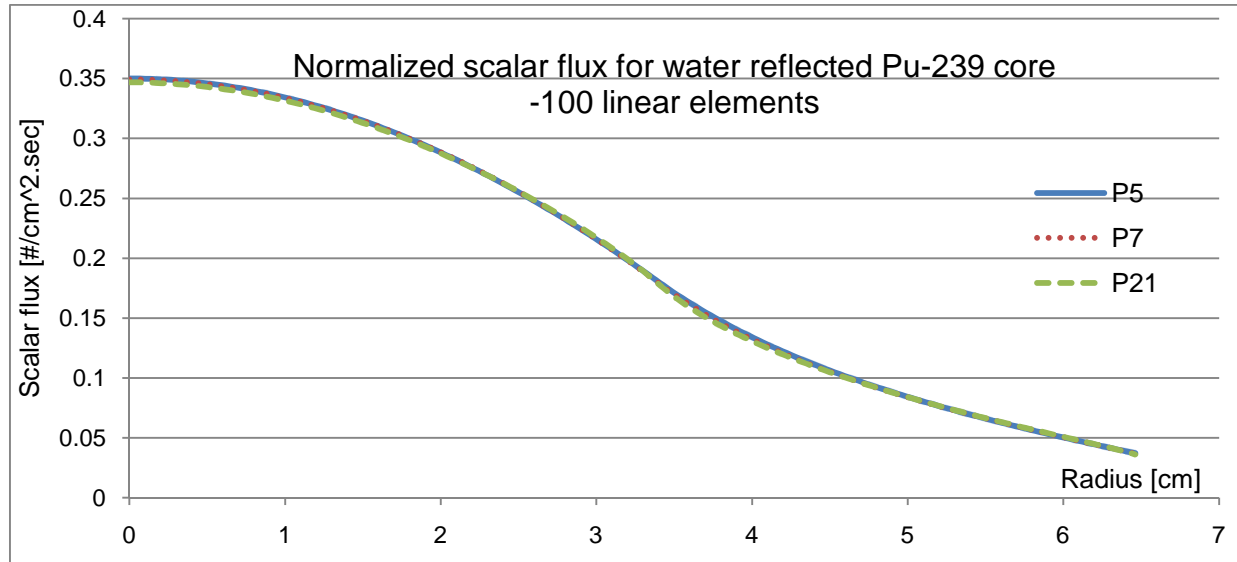
هدف این آزمون نیز محک زدن توانایی تحلیل شرایط چند ناحیه‌ای است. شعاع قلب و بازتابنده به ترتیب ۳/۳۹۷۶۱۰ و ۳/۰۶۳۷۲۵ سانتی‌متر بوده و سطوح مقاطع نیز در جدول ۲۵ قید شده است. نتایج محاسبات بحرانیات برای مراتب بسط و تعداد عناصر مختلف با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

جدول شماره ۲۵: سطوح مقاطع استوانه پلوتونیومی با بازتابنده آب

Material	$\sigma_t [cm^{-1}]$	$\sigma_s [cm^{-1}]$	ν	$\sigma_f [cm^{-1}]$
Pu-239	0.32640	0.225216	2.84	0.081600
H ₂ O	0.32640	0.293760	0.0	0.0

جدول شماره ۲۶: نتایج محاسبات بحرانیت برای استوانه پلوتونیومی با بازتابنده آب

Calculated K_{eff} for Water Reflected Pu-239 by ENTRANS - K_{eff} [ref.] = 1.000000						
No. Elements:	P_1	P_3	P_5	P_7	P_{21}	$\Delta(\%) - P_{21}$
10 + 10	0.879887	0.987123	0.997636	0.999322	1.000320	+0.0320
50 + 50	0.879533	0.986478	0.996954	0.998673	0.999882	-0.0118
100 + 100	0.879522	0.986458	0.996933	0.998653	0.999876	-0.01240



شکل ۳۲: نمودار شار بهنجار شده برای استوانه پلوتونیومی با بازتابنده آب

- آزمون سوم: ضریب تکثیر مؤثر و بی نهایت راکتور اورانیومی سه گروهی

این آزمون نیز از مرجع [۵۷] انتخاب شده است. در این مرجع با توجه به سطوح مقاطع تنها ضریب تکثیر محیط بی نهایت داده شده و بنابراین شعاع خاصی اعلام نگردیده است. لکن برای مقایسه همین سطوح مقاطع (جدول ۲۷) برای یک استوانه با مرزهای خلا و شعاع $۵/۷۱$ سانتی متر به کد DRAGON داده شده و ضریب تکثیر مؤثر آن با نتایج برنامه ENTRANS تطبیق داده شده است. همانطور که از جداول ۲۸ و ۲۹ پیداست، خروجی کار همخوانی مطلوبی را بین این دو کد به اثبات می‌رساند.

جدول شماره ۲۷: سطوح مقاطع راکتور همگن سه گروهی (آزمون سوم)

Group	σ_t [cm ⁻¹]	$\sigma_{s,g \leftarrow g}$ [cm ⁻¹]	$\sigma_{s,g+1 \leftarrow g}$ [cm ⁻¹]	$\sigma_{s,g+2 \leftarrow g}$ [cm ⁻¹]	ν	σ_f [cm ⁻¹]	χ
I	0.240	0.024	0.171	0.033	3.0	0.006	0.96
II	0.975	0.6	0.275	0.0	2.5	0.06	0.04
III	3.100	2.0	0.0	0.0	2.0	0.9	0.00

جدول شماره ۲۸: نتایج محاسبات محیط بی‌نهایت برای راکتور همگن سه گروهی (آزمون سوم)

	K_{inf}	ϕ_2/ϕ_1	ϕ_3/ϕ_1	ϕ_3/ϕ_2
Analytic [57]	1.6000	0.48	0.15	0.3125
ENTRANS	1.6000	0.48	0.15	0.3125
$\Delta(\%)$	0.0000	0.00	0.00	0.0000

جدول شماره ۲۹: نتایج محاسبات بحرانیته محیط محدود برای رآکتور همگن سه گروهی (آزمون سوم)

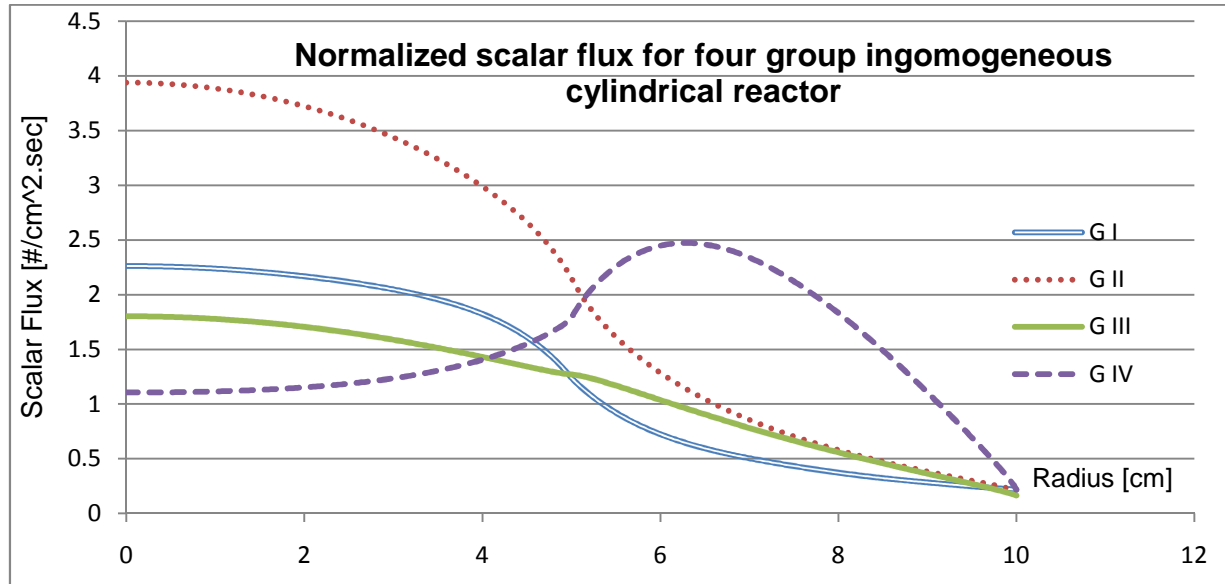
Calculated K_{eff} for Bare Three Group Cylindrical Reactor by ENTRANS						
K_{eff} [ref.] = 1.000000						
No. Elements:	P_1	P_3	P_5	P_7	P_{17}	DRAGON (P_{ij})
150	0.949239	0.995605	0.998767	0.999207	0.999391	0.999318
$\Delta(\%)$	-5.01132	-0.37155	-0.05514	-0.01111	0.007305	0.0000

- آزمون چهارم: ضریب تکثیر مؤثر رآکتور چهار گروهی ناهمگن

در این آزمون رآکتور دو ناحیه‌ای مطرح شده در آزمون چهارم مختصات تیغه‌ای را با همان سطوح مقاطع یاد شده در جدول ۳۰ در حالت استوانه‌ای حل کرده و ضریب تکثیر مؤثر به دست آمده را با نتایج حاصل از اجرای کد DRAGON مقایسه کرده‌ایم. برای این منظور ۴۰۰ المان خطی در طول رآکتور در نظر گرفته شده است.

جدول شماره ۳۰: نتایج محاسبات بحرانیت برای رآکتور چهار گروهی ناهمگن

Calculated K_{eff} for Bare Four Group Two Region Cylindrical Reactor by ENTRANS						
$K_{\text{eff}} [\text{ref.}] = 1.000000$						
No. Elements:	P_1	P_3	P_5	P_{11}	P_{21}	DRAGON (P_{ij})
150	0.359962	0.392955	0.394804	0.394962	0.394953	0.394731
$\Delta(\%)$	-8.808280	-0.449930	0.018494	0.058521	0.056241	0.000000



شکل ۳۳: نمودار شار بهنجار شده گروهی برای رآکتور چهار گروهی دو ناحیه‌ای

۱۴- نتیجه گیری

بررسی کاربرد روش اجزای محدود در ترکیب با هماهنگ‌های کروی برای استفاده در بیشینه‌سازی اصول وردشی نشان از موفقیت‌آمیز بودن این روش برای اجرای محاسبات چند بعدی و چندگروهی دارد. این موفقیت از چند جنبه قابل توجه است. از جمله مزیت‌های روش‌های وردشی بر پایه معادله درجه دوم ترابرد نوترون و به ویژه اصل K^+ آن است که تنها بخشی از هماهنگ‌های کروی برای یافتن شار نرده‌ای نوترون (که هدف نهایی بسیاری از محاسبات است)، به کار می‌رود. در یک بعد تعداد چند جمله‌ای لژاندر به کار رفته در اصل K^+ (یعنی کاهش یافته‌های یک بعدی هماهنگ‌های کروی) تنها نیمی از تعداد لازم برای حل مستقیم معادله ترابرد نوترون بوده و این وضعیت در حالت‌های دو بعدی و سه بعدی به یک چهارم نیز کاهش می‌یابد. به عنوان مثال برای حل دو بعدی معادله ترابرد با بسط P_3 به روش مستقیم تعداد هماهنگ‌های کروی لازم ۱۰ عدد بوده در حالی که روش مورد استفاده ما تنها به ۴ هماهنگ کروی در بسط $\psi(\mathbf{r}, \Omega)$

در حالت دو بعدی احتیاج دارد. نسبت این مقایسه در حالت سه بعدی ۱۶ به ۶ بوده که چنانچه قصد استفاده از یک المان مکانی سه بعدی و مکعبی ساده را داشته باشیم نسبت تعداد مجهولات هر المان در حالت اخیر ۱۲۸ به ۴۸ خواهد بود. بنابراین استفاده از روش یاد شده در این گزارش و بهره‌گیری از اصول وردشی منجر به کاهش قابل توجه تعداد مجهولات شده که این امر سرعت حل ماتریس‌های سراسری را به دلیل کاهش توجه در ابعاد آنان بالا می‌برد.

۱۵- مراجع

۱. ذوالفقاری، احمد. «حل معادله یک بعدی و چند گروهی ترابرد نوترون با استفاده از روش اجزای محدود و هارمونیک‌های کروی»، دانشکده مهندسی هسته‌ای، دانشگاه شهید بهشتی، (منتشر نشده).
۲. صدیقی، مصطفی. «بهینه سازی سوخت نیروگاه اتمی بوشهر با استفاده از شبکه عصبی»، پایان نامه دکتری، دانشکده مهندسی انرژی، دانشگاه صنعتی شریف، ایران، ۱۳۷۴.
۳. یوسفی، مصطفی. «رهیافت وردشی در ترابرد نوترون»، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی هسته‌ای، دانشگاه شهید بهشتی، ایران، بهمن ۱۳۸۹.
4. Abuzid O. A. "Discontinuous Finite Element Solutions for Neutron Diffusion and Transport", PhD Thesis, Dept. Mech. Eng., University of London, U.K., 1994.
5. *Ackroyd R. T., "Least Square Derivation of Extremum and Weighted Residual Methods for Equations of Reactor Physics", Ann. Nucl. Energy, 10, pp. 65-99, 1983.

6. Ackroyd R. T, "A Finite Element Method For Neutron Transport – VII, Completely Boundary Free Maximum Principle for the First Order Boltzmann Equation", Ann. Nucl. Energy, 10, pp. 243-261, 1983.
7. *Ackroyd R. T., De Oliveira C. R. E., "A Maximum Principle for the Time-dependent Boltzmann Eq. for Neutron Transport as a Basis for Numerical Solution Conserving Neutron" Progress in Nucl. Energy, 30, pp. 417-465, 1996.
8. *Ackroyd R. T., Nanneh M. M., "Upper and lower bounds for disadvantage factors as a rest of an algorithm used in synthesis method", Ann. Nucl. Energy, 15, pp. 241-259, 1988.
9. *Ackroyd R. T., B. A. Splawsky, "A finite element method for Neutron transport: Upper and lower bounds for local characteristics of solutions", Ann. Nucl. Energy, 17, pp. 603-634, 1982.
10. Ackroyd, R. T. et al., "A Finite Element Method for Neutron Transport, Part IV: A Comparison of Some Finite Element Solutions of Two group Benchmark Problems with Conventional Solutions", Ann. Nucl. Energy, Vol. 7, pp. 335-349, 1980.

11. Ackroyd R. T., "Finite Element Methods for Particle Transport, application to reactor and radiation physics", Research Studies Press (John Wiley & Sons Inc.), 1997.
12. Ackroyd R. T., "Finite element methods for neutron Transport based on maximum and minimum principle for discontinuous trial functions", Ann. Nucl. Energy, 19, pp. 565-592, 1992.
13. Adams M. L. et al, "Fast Iterative Methods for Discrete Ordinates Particle Transport Calculations", Prog. Nucl. Energy. Vol. 40. No. 1. pp. 3-159. 2002.
14. Agoshkov V. I. et al., "Methods for Solving Mathematical Physics Problems", Cambridge International Science Publishing, 2006.
15. Al Assar R. S., Mavromatis H. A., "A Generalized Formula for the Integral of Three Associated Legendre Polynomials", App. Math. Letts. 12, pp. 101-105, 1999.
16. "ANL-5800, Reactor Physics Constants", 2nd Ed., Argonne National Laboratory, 1963.
17. Arfken G. B., Weber H. J., "Mathematical Methods for Physicists", 6th Ed., Elsevier Inc., 2005.
18. Balanchard P., Bruning E., "Variational Methods in Mathematical Physics, A Unified Approach", Springer-Verlag, 1992.
19. Bell G. I., Glasstone S., "Nuclear Reactor Theory", Van Nostrand Reinhold Co., 1970.

20. Berry, R. M., "The Inverse Power Method for Multiplication Factors in the Neutron Transport Equation", MSc Thesis in Mathematics, Texas Tech University, USA, May 2001.
21. Bru R. et al, "Iterative Schemes for the Neutron Diffusion Equation", Comp. & Math. with App. 44, pp. 1307-1323, 2002.
22. Capilla M. et al, "A nodal collocation approximation for the multi-dimensional P_L equations—2D applications", Ann. Nucl. Energy, Vol. 35, pp. 1820–1830, 2008.
23. Case K. M., Zweifel P. F., "Linear Transport Theory", Addison-Wesley Pub. Co., 1967.
24. Chessa J., "Programming the FEM with Matlab", Northwestern University, (On-line), 2003.
25. Davison B., "Neutron Transport Theory", Oxford University Press, 1958.
26. Damian J. I. M., "Multi-level Acceleration of Neutron Transport Calculations", MSc Thesis, Dept. Mech. Eng., Georgia Institute of Technology, Dec. 2007.
27. De Oliveira C. R. E., "Finite Element Techniques for Multi-group Neutron Transport Equation with Anisotropic Scattering", PhD Thesis, Dept. Mech. Eng., University of London, U.K., 1987.

28. De Oliveira C. R. E., Wood J., "A Multi-group Finite Element Solution of Neutron Transport Equation-I, (XY Geometry)", Ann. Nucl. Energy, Vol. 11, No. 5, pp. 229-243, 1984.
29. De Oliveira C. R. E., "An arbitrary geometry finite element method for multi-group neutron transport with anisotropic scattering", Prog. Nucl. Energy, 18, pp.251-264, 1986.
30. Dong S. H, Lemus R., "The Overlap Integral of Three Associated Legendre Polynomials", App. Math. Letts. 15, pp. 541-546, 2002.
31. Duderstadt J. J., Martin W. R., "Transport Theory", John Wiley & Sons Inc. 1979.
32. *Fletcher J. K., "The Solution of the Multi-group Neutron Transport Equation Using Spherical Harmonics", Nucl. Sci. Eng. 116:73, 1994.
33. Go Chiba, "Application of the hierarchical domain decomposition boundary element method to the simplified P3 equation", Ann. Nucl. Energy, doi:10.1016/j.anucene.2011.01.01 1, 2011.
34. Henry A. F., "Nuclear-Reactor Analysis", MIT Press, 2nd printing, 1980.
35. JEFF Report 16, "Intercomparison of Calculations for Godiva and Jezebel", OECD, 1999.

36. *Kaplan S., Davis J. A., "Canonical and Involutory Transformation of the Variational Problems of Transport Theory", Nucl. Sci. Eng. 28, pp. 166-176, 1967.
37. Kevorkian J., "Partial Differential Equations: Analytical Solution Techniques", Wadsworth /Brooks-Cole, 1990.
38. Lamarsh J. R., "Introduction to Nuclear Reactor Theory", Addison-Wesley Pub. Co., 1972.
39. Lewis E. E., Miller W. F. Jr., "Computational Methods of Neutron Transport", John Wiley & Sons Inc. 1984.
40. *Lewis E. E., "Finite element approximation to the even-parity transport equation", Adv. Nucl. Sci. Tech., 13, pp. 155-225, Plenum Press, N.Y., 1981.
41. Li S., Liu W. K., "Mesh-free Particle Method", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
42. *Magri F., "Variational Formulation for Every Linear Equation", Int'l J. Eng. Sci., 12, pp. 537-549, 1974.
43. Martin W. J., "Non-Linear Acceleration Methods for Even-Parity Neutron Transport", MSc Thesis, Dept. Nucl. Eng., The University of New Mexico, May 2010.

44. Mavromatis H. A., "A single-sum expression for the overlap integral of two associated Legendre polynomials", J. Phys. A: Math. Gen. 32, pp. 2601–2603, 1999.
45. Mirza A. M., "Discontinuous Finite Element Formulation of the Neutron Transport Theory", PhD Thesis, Dept. Mech. Eng., University of London, U.K., 1994.
46. Mirza A. M., Iqbal S., Rahman F., "A spatially adaptive grid-refinement approach for the finite element solution of the even-parity Boltzmann transport equation", Ann. Nucl. Energy, 34, pp. 600-613, 2007.
47. Nanneh M. M., "A Synthesis Method Based on Hybrid Principle for Finite Element Neutron Transport", PhD Thesis, Dept. Mech. Eng., University of London, U.K., April 1990.
48. OECD, "Benchmark on Deterministic Transport Calculations without Spatial Homogenization- A 2D/3D MOX Fuel Assembly Benchmark", NEA/NSC/DOC(2003)16, ISBN: 92-64-02139-6, 2003.
49. Pattnaik A., "Parallel Performance Analysis of the Finite Element-Spherical Harmonics Radiation Transport Method", MSc Thesis, Dept. Nucl. Eng., Georgia Institute of Technology, Dec 2006.

50. Qichang C. et al, "Auto MOC - A 2D neutron transport code for arbitrary geometry based on the method of characteristics and customization of AutoCAD", Nucl. Eng. & Des. 238, pp. 2828–2833, 2008.
51. Rao S. S., "The Finite Element Method in Engineering", 4th Ed., Elsevier Science & Technology, 2004.
52. Sartori E., Azmy Y., "Nuclear Computational Sciences", (Ch. 2. Written by E. E. Lewis), Springer, 2010.
53. Splawsky B. A., "Finite Element Methods for Neutron Transport Calculations", PhD Thesis, Dept. Mech. Eng., University of London, U.K., 1981.
54. Stone M., Goldbart P., "Mathematics for Physics, A Guide Tour for Graduate Students", Cambridge University Press, 2009.
55. Shaukat Iqbal, "An Adaptive Finite Element Formulation of the Boltzmann-Type Neutron Transport Theory", PhD Thesis, Faculty of Computer Science & Engineering, Ghulam Ishaq Khan Institute of Engineering, Pakistan, 2007.
56. Stacey W. M., "Variational Methods in Nuclear Reactor Physics", Academic Press, 1974.

57. Sood. A et al, "Analytical Benchmark Test Set for Criticality Code Verification", Prog. Nucl. Energy, Vol. 42, No. 1, pp. 55-106, 2003.
58. Scheben F., "Iterative Methods for Criticality Computations in Neutron Transport Theory", PhD Thesis, Dept. Math. Sci., The University of Bath, Jan. 2011.
59. Urbatsch T. J., "Iterative Acceleration Methods for Monte Carlo and Deterministic Criticality Calculations", PhD Thesis, Dept. of Nucl. Eng. & Sci. Comp., The University of Michigan, (Documented at Los Alamos: LA-13052-T), 1995.
60. Vladimirov V. S., "Mathematical problems in the one-velocity theory of particle transport", Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni V. A. Steklova, Vol. 61, 1961., (English translation: Atomic Energy of Canada Limited, AECL. 1661, Chalk River, Ontario, 1963.
61. Williams M. M. R., Ackroyd R. T., "An Extended Variational Principle for an Albedo Boundary Condition", Ann. Nucl. Energy, 11, No. 6, pp. 296-273, 1984.
62. Wikipedia, the Free Encyclopedia.
63. Williams M. M. R., Wood J., "A Transport Theory Calculation of Neutron Flux, Disadvantage Factors and Effective Diffusion Coefficients in Square Cells and Slabs", J. Nucl. Energy, 22, pp. 141-162, Pergamon Press, 1972.

64. Wei L., "Unified approach for exact calculation of angular momentum coupling and recoupling coefficients", Comp. Phys. Communications, 120, pp. 222-230, 1999.
65. Yilmazer, A., "Jacobi Polynomials Approximation to the One-speed Neutron Transport Equation", Ann. Nucl. Energy, Vol. 34, pp. 977-991, 2007.
66. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., "The Finite Element Method", vol. 1 (The Basis), 5th Ed., Butterworth-Heinemann, 2000.
67. Zolfaghari Daryani, A. R. "Multi-dimensional Finite Element Modeling of Thermal Radiation in Participating Media", PhD Thesis, Dept. Mech. Eng., University of London, U.K., 1998.

توضیح: مراجعی که با علامت * مشخص شده اند، در دسترس نویسندگان نبوده ولی در بسیاری از نوشتجات به آنان اشاره شده و مراجعه به آنان مفید به نظر می‌رسد.