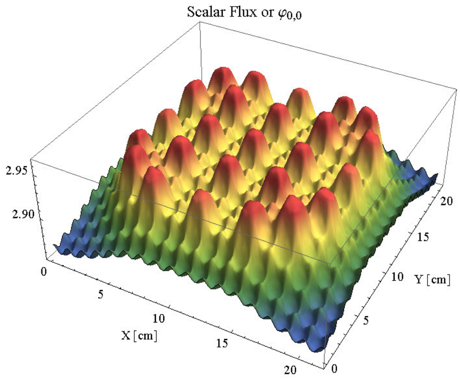
شرکت ساخت و راه‌اندازی نیروگاه‌های اتمی
مرکز محاسبات پیشرفته هسته‌ای

توسعه کد نوترونی « ENTRANS» به مختصات دو بعدی کارتزین



گزارش فنی ENTRANS-2D

بسته پانزدهم – ویرایش ۰ - بهمن ۱۳۹۳

ANC-TEC-TED-PN-200

فهرست مطالب

لیست شکل‌ها

لیست جدول‌ها

۱- چکیده

در گزارش‌های تفصیلی و فنی ارائه شده با عنوان توسعه کد نوترونی ENTRANS-2D در مختصات یک بعدی [۶۹] مقدمات نظری و عملیاتی محاسبات ترابرد نوترون به روش زوج پاره با استفاده از بسط هماهنگ‌های کروی روی متغیر زاویه و نیز اعمال روش اجزای محدود بر متغیر مکان به تفصیل تشریح شده و روابط آن اثبات و استخراج گردید. علاوه بر آن کد محاسباتی ENTRANS-2D در مختصات یک بعدی (تخت، کروی واستوانه) توسعه داده شده و نتایج محاسبات و محک‌ها در گزارش‌های فنی و تفصیلی آورده شد. هدف از این پروژه گسترش کد محاسباتی ENTRANS-2D به مختصات دو بعدی کارتزین بوده به شکلی که قادر به شبیه‌سازی هرگونه هندسه دلخواه باشد. برای تعریف هندسه از مولد شبکه گمبیت (Gambit) استفاده شده که نرم‌افزار نسبتاً جامعی برای استفاده در کدهای ترمومکانیکی از قبیل Fluent است. در گسترش ENTRANS-2D به دو بعد از مش‌های مثلثی سه و شش نقطه‌ای (با درونیابی خطی و درجه

دوم) استفاده شده که در مقایسه با سایر المان‌های دو بعدی پرکاربردتر بوده و نسبت هزینه محاسباتی آن به دقت حاصله کمتر است. بنابراین کاربر ابتدا در محیط Gambit هندسه مورد نظر خود را تعریف کرده، و پس از مش‌بندی یک فایل خروجی با پسوند fdneut صادر می‌کند. این فایل در کنار فایل ورودی حاوی معرفی درجه بسط P_N، تعداد گروه و مواد و نیز سطوح مقاطع گروهی توسط برنامه خوانده شده و سپس محاسبات انجام می‌شود. جزییات کار در گزارش پیش رو آمده و تنها به ذکر این نکته بسنده می‌شود که تلاش شده تا تمام انتگرال‌های زاویه‌ای و مکانی موجود در این فرمول بندی به روش تحلیلی حل شوند که این امر دقت بالا و صرف زمان کمتر محاسباتی را به ارمغان می‌آورد. ضمناً الگوریتم‌های برنامه به صورت موازی طراحی شده تا بتوان از سامانه‌های محاسباتی جدید که دارای چندین پردازنده هستند به شکل مؤثری استفاده نمود که حاصل آن سرعت بالای پردازش داده است. همچنین با استفاده از ماتریس‌های

تنک مقادیر و درایه‌ها به شکل فشرده‌ای ذخیره شده که امکان استفاده از میلیون‌ها المان را فراهم می‌آورد. نتایج و خروجی‌های محاسبات در این گزارش آورده شده و مقایسه می‌شوند.

۲- کلیدواژه

کد ENTRANS-2D، معادلات زوج پاره، معادلات درجه دوم ترابرد نوترون، اصول وردشی، بسط هماهنگ‌های کروی (P_N)، روش اجزای محدود، محاسبات ویژه مقداری، ضریب تکثیر مؤثر نوترون.

۳- اختصارات

در این گزارش از اختصارات خاصی استفاده نشده است

۴- مقدمه

گزارش پیش رو در ادامه گزارش پیشین برای توسعه کد ENTRANS-2D بوده که به بررسی گسترش آن به مختصات دو بعدی کارتزین می‌پردازد. با توجه به اینکه در گزارش گذشته مقدمات نظری معادلات زوج پاره به تفصیل بحث شده، لذا در این گزارش تنها به اشاره‌ای کوتاه از کلیات گزارش پیشین بسنده شده و ادامه مطلب مورد بحث قرار می‌گیرد.

۵- دامنه گزارش

کد «ENTRANS-2D» که برای محاسبات ترابرد نوترون توسعه داده شده در محیط‌های تکثیرپذیر یا غیر آن در حضور چشمه‌های ثابت گروهی یا شکافتی بکار می‌رود. همچنین در این کد توانایی بسط هماهنگ‌های کروی (P_N) تا مرتبه P_{13} پیش بینی شده که در صورت لزوم به راحتی قابل ارتقا به هر مرتبه دلخواه است. در صورت وجود حافظه کافی این کد می‌تواند میلیون‌ها المان درجه دو را پشتیبانی نموده که برای محاسبات کامل یک قلب بدون همگن‌سازی کافی است. الگوریتم‌های به کار رفته تا حد زیادی موازی بوده که امکان استفاده بهینه از رایانه‌ها با تعداد پردازنده بالا را میسر می‌سازد. با توجه به اینکه هندسه مورد نظر در محیط مولد شبکه Gambit طراحی می‌شود، تقریباً هر شکل دلخواه دو بعدی را می‌توان تحت پوشش قرار داد.

۶- بازبینی مقدمات نظری رهیافت وردشی

در گزارش توسعه یک بعدی کد نوترونی ENTRANS-2D اشاره گردید که می‌توان معادله درجه اول ترابرد نوترون یعنی

$$\mathbf{\Omega}.\nabla\psi(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})+\sigma_t(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})=\int_{4\pi}\sigma_s(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}.\mathbf{\Omega}')\psi(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}')\,d\Omega'+\mathcal{S}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})\quad;\quad\mathbf{r}\in V \qquad (۱-۶)$$

را با بازنویسی برای جهت $-\mathbf{\Omega}$ و سپس جمع و تفریق معادله حاصله با (۶-۱) به دو معادله جفت شده از ترکیب بخش زوج و فرد چگالی شار زاویه‌ای به شرح زیر دست یافت:

$$\mathbf{\Omega}.\nabla\psi^{-}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})+\mathbb{C}\,\psi^{+}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})=\mathcal{S}^{+}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}) \qquad (۲-۶)$$

که علامت (+) نشان از تابع زوج نسبت به زاویه داشته و (-) نیز نشانه تابع فرد از $\mathbf{\Omega}$ است. $\mathbb{C}$ و $\mathbb{G}$ نیز دو عملگر با تعاریف زیر هستند:

(۶-۳)

$$\mathbb{C}f(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}) \equiv \sigma_t(\mathbf{r})\, f(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}) - \int_{4\pi} \frac{1}{2}[\sigma_s(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}.\mathbf{\Omega}') + \sigma_s(\mathbf{r},-\mathbf{\Omega}.\mathbf{\Omega}')]f(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}')\, d\Omega' \mathbb{G}^{-1} f(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})$$

$$\equiv \sigma_t(\mathbf{r})\, f(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}) - \int_{4\pi} \frac{1}{2}[\sigma_s(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}.\mathbf{\Omega}') - \sigma_s(\mathbf{r},-\mathbf{\Omega}.\mathbf{\Omega}')]f(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}')\, d\Omega'$$

نامشخص بودن توابع دقیق ψ_0^+ و ψ_0^- به عنوان پاسخ‌های دقیق مسئله باعث می‌شود تا هنگام بکارگیری توابع تقریبی ψ^+ و ψ^- خطاهایی در کل حجم و روی مزر ایجاد می‌شود:

(۴-۶)

$$\boldsymbol{\Omega}.\nabla\psi^{-}(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega}) + \mathbb{C}\,\psi^{+}(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega}) - \mathcal{S}^{+}(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega}) = R_1(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega})$$
$$\boldsymbol{\Omega}.\nabla\psi^{+}(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega}) + \mathbb{G}^{-1}\,\psi^{-}(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega}) - \mathcal{S}^{-}(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega}) = R_2(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega})$$

مشاهده می‌شود که چنانچه مقادیر R_1 و R_2 در کل فضای مورد تحلیل و مرزهای آن به صفر میل کند توابع تقریبی مورد استفاده نیز به نظایر دقیق خود میل می‌کنند. یک رهیافت مناسب برای کمینه کردن خطاهای تقریب وزن کردن آنان به روش کمینه مربعات تعمیم یافته است. براین اساس چنانچه یک تابعی[1] روی خطاهای حجمی و سطحی به شرح زیر تعریف شوند:

$$Er[\psi^{+},\psi^{-}] = \int_V \langle R_1\,\mathbb{C}^{-1} R_1\rangle + \langle R_2 \mathbb{G} R_2\rangle\, dV + \int_{\partial V}\langle {R_1}^2 + {R_2}^2\rangle\, dS \qquad (۵-۶)$$

[1] Functional

آنگاه کمینه شدن تابعی $Er[\psi^+,\psi^-]$ به معنی صفر شدن خطاهای حجمی و سطحی و درنتیجه یافتن چگالی شار زاویه‌ای است. با رجوع به گزارش تفصیلی کد ENTRANS-2D می‌توان از دل این تابعی دو تابعی مستقل روی ψ^+ و ψ^- به نام‌های $K^+[\psi^+]$ و $K^-[\psi^-]$ بدست آورد که بیشینه شدن هر یک از آنها معادل دقیق‌تر شدن تقریب‌های ψ^+ و ψ^- است و برعکس. اما از آنجا که شار نرده‌ای[۲] نوترون را می‌توان تنها از بخش زوج چگالی شار زاویه‌ای تحصیل نمود یعنی:

(۶-۶)

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \psi(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}) d\Omega = \int_{4\pi} \big(\psi^+(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}) + \psi^-(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})\big) d\Omega = \int_{4\pi} \psi^+(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}) d\Omega.$$

[2] Scalar Flux

لذا بیشینه‌سازی اصل وردشی $K^{+}[\psi^{+}]$ برای دانستن شار نرده‌ای نوترون کفایت می‌کند. این اصل به شکل زیر تعریف می‌شود:

(۶-۷)

$$
\begin{aligned}
K^{+}[\psi^{+}] \equiv \int_{V} dV\{ & 2\langle \mathcal{S}^{+}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})\psi^{+}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})\rangle + 2\langle \mathbf{\Omega}.\nabla\psi^{+}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})\mathbb{G}\mathcal{S}^{-}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})\rangle - \langle \mathbf{\Omega}.\nabla\psi^{+}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})\mathbb{G}\mathbf{\Omega}.\nabla\psi^{+}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})\rangle \\
& - \langle \psi^{+}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})\mathbb{C}\psi^{+}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})\rangle\} \\
& - \int_{S_s\cup S_b} dS \left\{ \int_{4\pi} |\mathbf{\Omega}.\mathbf{n}|\, \psi^{+2}(\mathbf{r}_{\mathrm{s,b}},\mathbf{\Omega}) d\Omega \right\} - \int_{S_a} dS \left\{ \int_{4\pi} |\mathbf{\Omega}.\mathbf{n}| \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right) \psi^{+2}(\mathbf{r}_{\mathrm{a}},\mathbf{\Omega})\, d\Omega \right\} \\
& + 4\int_{S_s} dS \left\{ \int_{\mathbf{\Omega}.\mathbf{n}<0} |\mathbf{\Omega}.\mathbf{n}|\psi^{+}(\mathbf{r}_{\mathrm{s}},\mathbf{\Omega}) T(\mathbf{r}_{\mathrm{s}},\mathbf{\Omega}) d\Omega \right\}
\end{aligned}
$$

که در بالا $\mathcal{S}$ و T به ترتیب چشمه‌های مرزی و حجمی هستند. در گزارش‌های تفصیلی اشاره شده که پیش از بیشنیه‌سازی این تابعی $\psi^{+}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})$ و $\mathcal{S}^{\pm}(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})$ و $T(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})$ را بر حسب هماهنگ‌های کروی (که در یک بعد به چند جمله ای‌های لژاندر کاهش می‌یابند) بسط داده و انتگرال‌های موجود بر روی زاویه را بر این هماهنگ‌ها متمرکز می‌کنیم. سپس با اعمال روش اجزای محدود بر بخش وابسته به مکان انتگرالهای مکانی را نیز بر روی توابع پایه بسط روی المان‌ها و مشتقات آن‌ها خلاصه کرده و لذا آنچه می‌ماند برداری از ضرایب مجهول است که یافتن آن پایان حل مسئله است. دستگاه نهایی معادلات به شکل زیر است:

$$\mathbb{M}\xi_0 = \mathbb{S} \qquad (۸-۶)$$

که در آن $\mathbb{M}$ ماتریس جامع هندسه و مواد است که از سرهم‌بندی ماتریس‌های سختی المان‌ها ساختمان یافته، $\mathbb{S}$ بردار جامع سرهم بندی شده از وضعیت چشمه‌های المانی بوده و ξ_0 نیز همان مجهولات مسئله است که مقادیر شار نرده‌ای

نوترون روی گره‌ها نیز بخشی از آن را تشکیل می‌دهد. شکل ماتریس المانی در حالت تک گروهی به صورت زیر معرفی گردید:

(۶-۹)

$$\mathbb{M}_e \equiv \int_{V_e} dV \left\{ \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{+e}(\mathbf{r}) \otimes [\mathbb{m}_e(\mathbf{r})\mathbb{m}_e^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})] + \sum_k \sum_{k'} [\mathbb{U}_k^{\mathrm{T}}\, \tilde{\mathbf{\Sigma}}_{-e}^{-1}(\mathbf{r}) \mathbb{U}_{k'}] \otimes [\partial_k \mathbb{m}_e(\mathbf{r}) \partial_{k'} \mathbb{m}_e^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})] \right\} + \int_{S_{s,e} \cup S_{b,e}} \mathbb{A}_{\mathbf{n}} \otimes [\mathbb{m}_e(\mathbf{r}_{\mathrm{s,b}}) \mathbb{m}_e^{\mathrm{T}}(\mathbf{r}_{\mathrm{s,b}})] dS + \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right) \int_{S_{a,e}} \mathbb{A}_{\mathbf{n}} \otimes [\mathbb{m}_e(\mathbf{r}_{\mathrm{a}}) \mathbb{m}_e^{\mathrm{T}}(\mathbf{r}_{\mathrm{a}})] dS$$

که $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{+e}$ و $\tilde{\mathbf{\Sigma}}_{-e}^{-1}$ ماتریس‌هایی از سطوح مقاطع، $\mathbb{U}_k$ و $\mathbb{A}_{\mathbf{n}}$ ماتریس‌های زاویه‌ای و $\mathbb{m}_e(\mathbf{r})$ بردار توابع میان یابی مورد استفاده در روش اجزای محدود بوده و نماد k و k' نشانگر مؤلفه‌های x و y و z در حالت کلی سه بعدی است، ρ ضریب

بازگشت نوترون در مرز آلبدو $\mathrm{S}_{a,e}$ است و $\mathrm{S}_{s,e}$ و $\mathrm{S}_{b,e}$ به ترتیب مرزهای دارای چشمه سطحی و مجاور خلأ است. همچنین بردار محلی (المانی) چشمه نیز به شکل زیر در می‌آید:

(۱۰-۶)

$$\mathbb{S}_e \equiv \int_{V_e} dV \left\{ \mathbb{s}_e^{+}(\mathbf{r}) \otimes \mathbb{m}_e(\mathbf{r}) + \sum_k \left[\mathbb{U}_k^{\mathrm{T}} \, \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{-e}^{-1}(\mathbf{r}) \; \mathbb{s}_e^{-}(\mathbf{r}) \right] \otimes \partial_k \mathbb{m}_e(\mathbf{r}) \right\} + \int_{\mathrm{S}_{s,e}} [\mathbb{A}_{\mathbf{n}} \mathbb{t}_e^{+}(\mathbf{r}_{\mathrm{s}})] \otimes \mathbb{m}_e(\mathbf{r}_{\mathrm{s}}) dS$$

که در بالا $\mathbb{s}_e^{\pm}(\mathbf{r})$ بردار تکانه‌ها (ممان‌ها)ی بسط چشمه‌های زوج و فرد، $\mathcal{S}^{\pm}(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega})$ به شکل زیراند:

$$\mathbb{s}^{\pm}(\mathbf{r}) \equiv \int_{4\pi} \mathbb{Y}_{\pm}(\boldsymbol{\Omega}) \mathcal{S}^{\pm}(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega}) d\Omega \qquad (۱۱\text{-}۶)$$

در بالا $\mathbb{Y}_{\pm}(\mathbf{\Omega})$ بردار هماهنگ‌های زاویه‌ای زوج یا فرد نسبت به بردار فضایی $\mathbf{\Omega}$ بوده و $S^{\pm}$ دربرگیرنده چشمه‌های شکافتی و خارجی و در حالت چندگروهی شامل پراکندگی از گروه‌های دیگر به گروه مورد بررسی است. بردار $\mathbb{t}_e^{+}(\mathbf{r}_s)$ نیز چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbb{t}^{+}(\mathbf{r}_s) \equiv 2\int_{\mathbf{\Omega}.\mathbf{n}<0} \mathbb{Y}_{+}(\mathbf{\Omega}) T(\mathbf{r}_s, \mathbf{\Omega}) d\Omega. \qquad (۱۲-۶)$$

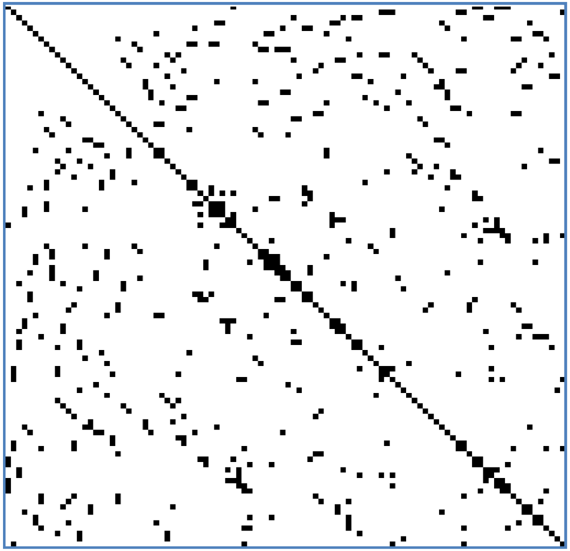
با ساختن $\mathbb{S}_e$ و $\mathbb{M}_e$ برای همه المان‌ها و سر هم بندی آنان در قالب ماتریس‌های سراسری $\mathbb{M}$ و $\mathbb{S}$ و حل دستگاه حاصله می‌توان مجهولات مورد نظر را یافت. همانطور که اشاره گردید آنچه در این بازبینی آمده تنها یک مقدمه کوتاه از نظریه حل معادلات زوج پاره به کمک بسط هماهنگ‌های کروی و ترکیب آن با روش اجزای محدود بوده و خواننده را از بررسی گزارشات تفصیلی نگاشته شده در این باب بی‌نیاز نخواهد کرد. آنچه در ادامه می‌آید دنباله مبحث یک بعدی است که به مختصات دو بعدی کارتزین تعمیم داده می‌شود و فرض بر آن گذاشته شده که خواننده گزارش پیشین [۶۹] شامل

مقدمات و مؤخرات نظری و اعتبارسنجی‌ها را مطالعه کرده و اینک مباحث مختص محیط دوبعدی در ادامه کار مطرح می‌شود.

۷- بررسی معادلات در مختصات دو بعدی

۷-۱- تمایزات محیط دو بعدی

در این فصل به یافتن رابطه‌ای برای حالت دو بعدی می‌پردازیم. تفاوت محاسبات حالت دوبعدی و یک‌بعدی را می‌توان در سطور زیر خلاصه نمود:



شکل ۱: ماتریس‌های سراسری ضرایب در حالت دو بعدی غالبا بزرگ بوده و با حفظ تقارن پراکنده هستند.

الف) شمار متغیرهای مستقل در دو بعد، دو برابر شمار آن‌ها در حالت یک بعدی است. در این حالت علاوه بر x و μ ، متغیرهای y و ω نیز باید در محاسبات دخیل شوند تا موقعیت بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{\Omega}$ کاملاً معین گردد. بنابراین برای داشتن دقت یکسان در تقریب به کار رفته، شمار مجهولات به توان دو خواهد رسید. که اثر آن پهن شدن ماتریس سر هم بندی شده ضرایب برای در برگرفتن اثرات از عناصر همسایه در دو جهت است. حتی حجم ماتریس سراسری برای مسایل کوچک نیز نسبتاً بزرگ بوده که این امر حل آن را توسط روش‌های مستقیم (غیرتکراری) هزینه بر و احیاناً نادقیق می‌سازد.

ب) در مسایل دو بعدی می‌توان هر شکل دلخواه را در نظر گرفت. اثر این انعطاف‌پذیری، ایجاد پیچیدگی در ارتباط اجزای محدود با یکدیگر بوده و نهایتاً باعث می‌شود تا ماتریس کل از یک ساختار به هم ریخته رنج برد، چرا که هر گره از

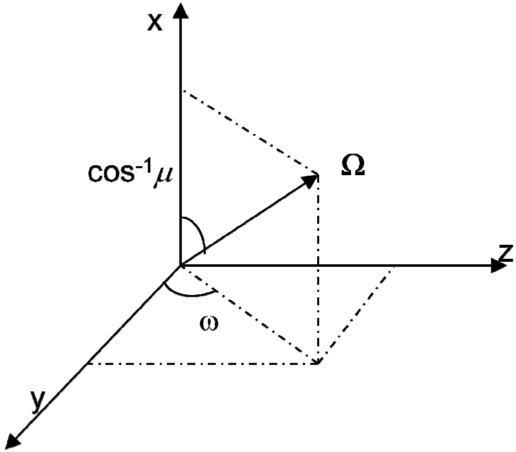
شکل مش‌بندی شده دو بعدی می‌تواند در کنار هر گره به شماره دیگری قرار گیرد. این امر باعث پراکندگی وابستگی مجهولات به یکدیگر شده که اثر آن در پخش نامنظم درایه‌های ماتریس ضرایب می شود.

پ) نشت در حالت دو بعدی شدیدتر بوده که این امر باعث تیزتر شدن شیب شار در حالت دو بعدی شده و بنابراین برای دستیابی به دقت یکسان نسبت به حالت یک بعدی باید از تقریب‌های مرتبه بالاتری استفاده نمود. به ویژه اگر بخش زیادی از مرزهای سامانه مورد بررسی درگیر با خلأ اطراف است.

ت) همان گونه که اشاره شد، در فصل مشترک مواد شار زاویه‌ای نوترون باید جز در حالت $\mathbf{\Omega}.\mathbf{n_i} = 0$ پیوسته باشد. در حالت یک بعدی همه فصول مشترک در یک جهت مرتب شده‌اند و آن عمود بر جهت x است. حتی در صورت خطا در ارضای این شرط در اثر تقریب به کار رفته، این جهت در حالت یک بعدی از اهمیت چندانی برخوردار نیست. لکن در حالت دو بعدی همه جهت‌ها از اهمیت برخوردار بوده و با توجه به اینکه در این حالت امکان تعریف هندسه دلخواه برای

شکل رآکتور میسّر است، اعمال این ناپیوستگی در همه فصول مشترک (که ممکن است در هر جهت دلخواه سامان یافته باشند) نسبتاً مشکل است. برای تحلیل هرچه بهتر این وضعیت لازم است تا از توابع آزمون هموار در اصل $K^+[\psi^+]$ استفاده شود. در این خصوص اصلاح نحوه مش‌بندی ناحیه ممکن است لازم و مفید باشد.

ث) یافتیم که شرط مرزی بازتابنده کامل در حالت یک بعدی به دلیل اهمیت توابع آزمون بکار رفته یک شرط طبیعی است. بدین معنا که توابع آزمون بکار رفته خود به خود این شرط را ارضا کرده و بررسی خاصی پیرامون آن ضرورت ندارد. در هندسه دو بعدی چون جهت‌گیری مرز بازتابنده کامل کاملاً دلخواه است. لذا اعمال تقارن پیش آمده در هندسه رآکتور بر روی توابع آزمون، پیش از بکارگیری در اصل $K^+[\psi^+]$ لازم است. در ادامه به این بحث بیشتر پرداخته می‌شود.



شکل ۲: تعیین دقیق جهت یک بردار در سه بعد نیازمند دانستن دو زاویه (قطبی و سمتی) است.

۷-۲- بسط چگالی شار زاویه‌ای در دو بعد

با توجه به نحوه نشان گذاری بردار $\mathbf{\Omega}$ در سه بعد مطابق شکل ۲ روابط زیر برقرار است:

$$\mathbf{\Omega}.\nabla = (\mathbf{\Omega}.\hat{\mathbf{x}})\frac{\partial}{\partial x} + (\mathbf{\Omega}.\hat{\mathbf{y}})\frac{\partial}{\partial y} + (\mathbf{\Omega}.\hat{\mathbf{z}})\frac{\partial}{\partial z} \qquad (۷-۱)$$

که در رابطه فوق:

$$\mathbf{\Omega}.\hat{\mathbf{x}} = \mu \quad ; \quad \mathbf{\Omega}.\hat{\mathbf{y}} = \sqrt{1-\mu^2}\cos\omega \quad ; \quad \mathbf{\Omega}.\hat{\mathbf{z}} = \sqrt{1-\mu^2}\sin\omega \qquad (۷-۲)$$

به دلیل شباهت نسبی $\mathbf{\Omega}.\hat{\mathbf{y}}$ و $\mathbf{\Omega}.\hat{\mathbf{z}}$ مناسب‌تر آن است که برای بررسی‌های دو بعدی صفحه yz به عنوان مرجع در نظر گرفته شده و از عبارت $\frac{\partial \psi^+}{\partial x}$ صرف نظر شود. از آنجا که $\psi^+(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})$ نسبت به $\mathbf{\Omega}$ تابعی زوج است، لذا باید:

$$\psi^{+}(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega}) = \psi^{+}(\mathbf{r},-\boldsymbol{\Omega}) \tag{۳-۷}$$

که در رابطه فوق:

$$\mathbf{r} = y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \quad ; \quad \boldsymbol{\Omega} = (\mu,\omega) \quad ; \quad -\boldsymbol{\Omega} = (-\mu,\omega+\pi) \tag{۴-۷}$$

علاوه بر آن، تقارن در حالت دو بعدی الزام می‌کند که بین $\psi(\mathbf{r},\mu,\omega)$ و $\psi(\mathbf{r},-\mu,\omega)$ نیز تفاوتی نباشد. از آنجا که شار زاویه‌ای توسط هماهنگ‌های کروی بسط داده می‌شود ارضای شروط یاد شده ایجاب می‌کند که:

$$Y_{lm}(\boldsymbol{\Omega}) = Y_{lm}(-\boldsymbol{\Omega}) \tag{۵-۷}$$

$$P_l^m(\mu)\begin{Bmatrix}\cos m\omega\\ \sin m\omega\end{Bmatrix} = P_l^m(-\mu)\begin{Bmatrix}\cos m(\omega+\pi)\\ \sin m(\omega+\pi)\end{Bmatrix}$$

و

$$P_l^m(\mu) = P_l^m(-\mu) \qquad (۶-۷)$$

با توجه به ویژگی‌های هماهنگ‌های کروی و چند جمله‌ای‌های لژاندر وابسته این دو قید تنها هنگامی تواماً برقرارند که m و l هر دو زوج باشند[پیوست‌های «ت» و «ث» از گزارش تفصیلی یک بعدی]. پس متناسب با تقریب‌های P_1، P_3، P_5، P_7،....P_N پایه بسط ψ^+ به ترتیب ۱، ۴، ۹، ۱۶و....$\frac{(N+1)^2}{4}$ تکانه خواهد داشت:

(۷-۷)

$$\mathbb{Y}_{+yz}^{T}(\mathbf{\Omega}) = [Y_{00} \quad Y_{2-2} \quad Y_{20} \quad Y_{22} \quad Y_{4-4} \quad Y_{4-2} \quad Y_{40} \quad Y_{42} \quad Y_{44} \quad \ldots \quad Y_{N-1,-(N-1)} \quad \cdots \quad Y_{N-1,N-1}]$$

این یک مجموعه زوج نسبت به تبدیلات یاد شده است. متعاقباً می‌توان یک مجموعه زوج نسبت به تبدیل $\mu \to -\mu$ و فرد نسبت به تبدیل $\boldsymbol{\Omega} \to -\boldsymbol{\Omega}$ نیز به صورت زیر معرفی نمود:

$$\mathbb{Y}_{-\mathrm{yz}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Omega}) = \begin{bmatrix} Y_{1-1} & Y_{11} & Y_{3-3} & Y_{3-1} & Y_{31} & Y_{33} & \cdots & Y_{N,-N} & \cdots & Y_{N,N} \end{bmatrix} \quad (۸-۷)$$

که در محاسبه ماتریس $\mathbb{U}$ و ترانهاده آن به کار می‌رود. مشابه قبل می‌توان $\psi_e^+(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega})$ را به شکل زیر بسط داد:

$$\psi_e^+(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega}) = [\mathbb{Y}_+^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Omega}) \otimes \mathbb{m}_e^{\mathrm{T}}(y,z)]\xi_e \quad (۹-۷)$$

که زیرنویس yz از $\mathbb{Y}_+$ حذف شده و ξ_e نیز مشابه (۳-۶) یک ماتریس ستونی به ابعاد MP×1 است، با این تفاوت که در حالت دو بعدی چنانچه از تقریب P_N (N فرد) استفاده شود. تعداد تکانه‌های بکار رفته در بسط $\psi^+(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega})$ برابر با $\mathrm{M} = \frac{(\mathrm{N}+1)^2}{4}$ خواهد بود. نماد P نیز مجدداً تعداد گره‌های عنصر فضایی دو بعدی است.

۷-۳- ساختار ماتریس معادلات در حالت دوبعدی

در حالت دو بعدی با توجه به رابطه (۱۲-۴۴) از گزارش یک بعدی [۶۹] و فرض ثابت بودن خواص ماده درون هر عنصر فضایی، ماتریس سراسری $\mathbb{M}_g$ (حاصل از جمع سرهم‌بندی شده ماتریس‌های محلی $\mathbb{M}_g^e$)، عبارت است از:

(۱۰-۷)

$$\mathbb{M}_g = \sum_{e=1}^{E}\left[\mathbb{M}_g^e\right] =$$

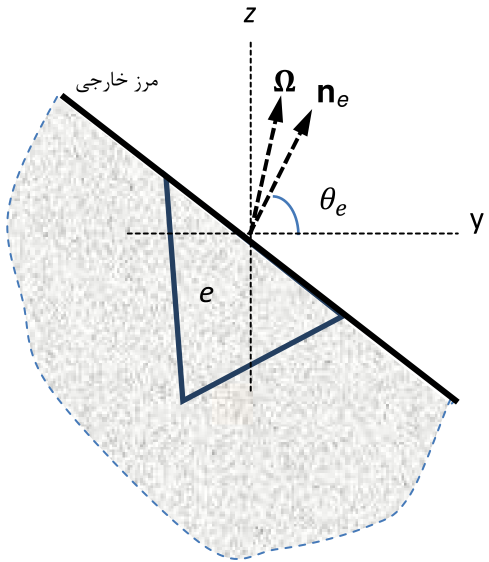
$$\sum_{e=1}^{E}\left[\,\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{+,gg}^{e}\otimes\mathbb{X}_1^e + \sum_k\sum_{k'}\left[\mathbb{U}_k^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{-,gg}^{-1,e}\,\mathbb{U}_{k'}\right]\otimes\,\mathbb{X}_{2\;k,k'}^{e}\right] + \sum_{\substack{e'=1\\ e'\in l}}^{BE}\left[\mathbb{A}(\theta_{e'})\otimes\left[\left(\frac{1-\rho_g}{1+\rho_g}\right)\mathbb{X}_{\mathrm{B1,a}}^{e'} + \mathbb{X}_{\mathrm{B1,\;sUb}}^{e'}\right]\right]$$

در رابطه فوق شاخص a نماد مرز آلبدو با ضریب بازگشت نوترون و شاخص s U b نیز به معنی مرزهای خلأ و دارای چشمه مرزی است و BE نیز تعداد المان‌های مرزی است. $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{+,gg}^{e}$ و $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{-,gg}^{-1,e}$ دو ماتریس از سطوح مقاطع با تعاریف ارائه

شده در گزارش یک بعدی بوده و ماتریس‌های $\mathbb{U}_k$ و $\mathbb{A}(\theta_e)$ نیز دو ماتریس زاویه‌ای و ماتریس‌های $\mathbb{X}_{\mathrm{i}}^e$ نیز ماتریس‌های مکانی هستند که در ادامه معرفی می‌شوند. k' و k هر کدام نشانگر شاخص‌های y و z هستند. θ_e زاویه بردار عمود بر سطح خارجی ($\mathbf{n}$) با محور y در صفحه yz در محل استقرار عنصر مرزی e ام است (شکل ۳). در این حالت برای ماتریس $\mathbb{A}(\theta_e)$ خواهیم داشت:

(۱۱-۷)

$$\mathbb{A}($$



شکل ۳: وضعیت بردار عمود بر مرز (n) در دو بعد در موقعیت عنصر e

در اینجا نماد $\langle . \rangle$ به معنای انتگرال‌گیری کامل روی زاویه فضایی $\boldsymbol{\Omega}$ است. توجه شود که در حالت دو بعدی انتگرال‌های حجمی جای خود را به انتگرال‌های سطحی داده و انتگرال‌های سطحی مرزی نیز به انتگرال روی خط مرزی تبدیل می‌شوند. شاید مجدداً ذکر این نکته ضروری باشد که هر یک از انتگرال‌های مرزی $\int dl$ تنها در شرایط ظاهر می‌شوند که عنصر e روی یکی از مرزهای مربوطه (آلبدو، خلا و یا دارای چشمه مرزی) قرار گرفته باشد و در غیر این صورت این انتگرال‌ها وجود نخواهند داشت. ضمناً با توجه به مجموعه هماهنگ‌های کروی زوج در حالت دو بعدی (۷-۷) ، بردار مجهولات المانی، ξ_e نیز یک بردار ستونی است که درایه‌های آن همان مقادیر $\varphi_{lm}(\mathbf{r})$ (ضرایب بسط هماهنگ‌های کروی) بر روی گره‌های عنصر فضایی e می‌باشند:

(۱۲-۷)

$$\boldsymbol{\xi}_e^{\mathrm{T}} = \left[\underbrace{\xi_{00,1}^{e} \quad \cdots \quad \xi_{00,P}^{e}}_{\xi_{00}^{e}} \quad \underbrace{\xi_{2-2,1}^{e} \quad \cdots \quad \xi_{2-2,P}^{e}}_{\xi_{2-2}^{e}} \quad \cdots \quad \underbrace{\xi_{lm,1}^{e} \quad \cdots \quad \xi_{lm,P}^{e}}_{\xi_{lm}^{e}} \quad \cdots \quad \underbrace{\xi_{N-1,N-1,1}^{e} \quad \cdots \quad \xi_{N-1,N-1,P}^{e}}_{\xi_{N-1,N-1}^{e}} \right]$$

$$l = 0, 2, 4, \cdots, N-1 \qquad ; \qquad |m| = 0,2, 4, \cdots, l$$

که در رابطه فوق P شمار گره‌های یک عنصر فضایی است. در حالت سرهم‌بندی شده چنانچه تعداد کل گره‌های شکل مش‌بندی شده $\mathcal{P}$ باشد، ماتریس مجهولات سراسری به صورت زیر خواهد بود:

(۱۳-۷)

$$\xi^{\mathrm{T}} = \sum_{e=1}^{E} \lfloor \xi_e^{\mathrm{T}} \rfloor$$

$$= \left[\underbrace{\xi_{00,1} \quad \cdots \quad \xi_{00,\mathcal{P}}}_{\xi_{00}} \quad \underbrace{\xi_{2-2,1} \quad \cdots \quad \xi_{2-2,\mathcal{P}}}_{\xi_{2-2}} \quad \cdots \quad \underbrace{\xi_{lm,1} \quad \cdots \quad \xi_{lm,\mathcal{P}}}_{\xi_{lm}} \quad \cdots \quad \underbrace{\xi_{N-1,N-1,1} \quad \cdots \quad \xi_{N-1,N-1,\mathcal{P}}}_{\xi_{N-1,N-1}} \right]$$

همچنین با استناد به رابطه (۷-۵۱) از گزارش تفصیلی ENTRANS-2D یک بعدی [۶۹]، بردار چشمه سراسری گروه g ام عبارت است از:

(۷-۱۴)

$$\mathbb{S}_g = \frac{\chi_g}{K_{eff}} \sum_{g'=1}^{G} \left(\sum_{e=1}^{E} \left| \left([\delta_{l1}\delta_{l'1}] \sum_i \upsilon\sigma_{f,g'}^{i,e} \right) \otimes \mathbb{X}_1^e \right| \right) . \boldsymbol{\xi}_{g'}$$

$$+ \sum_{g'=1}^{G} (1-\delta_{gg'}) \left[\left(\sum_{e=1}^{E} \left| \boldsymbol{\Sigma}_{+,gg'}^{e} \otimes \mathbb{X}_1^e \right| \right) . \boldsymbol{\xi}_{g'} + \sum_k \left(\sum_{e=1}^{E} \left| \left(\mathbb{U}_k^{\mathrm{T}} \, \boldsymbol{\Theta}_{-,gg'}^{e} \right) \otimes \mathbb{X}_{3\,k}^{e\mathrm{T}} \right| \right) . \boldsymbol{\varepsilon}_{g'}^{-} \right.$$

$$\left. - \sum_k \sum_{k'} \left(\sum_{e=1}^{E} \left| \left(\mathbb{U}_k^{\mathrm{T}} \, \boldsymbol{\Theta}_{-,gg'}^{e} \mathbb{U}_{k'} \right) \otimes \left(\mathbb{X}_{3\,k}^{e\mathrm{T}} \, \mathbb{X}_1^{e\,-1} \mathbb{X}_{3\,k'}^{e\mathrm{T}} \right) \right| \right) . \boldsymbol{\xi}_{g'} \right] + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{e=1}^{E} \left\lfloor Q_g^{\circledast e} [\delta_{l1}] \otimes \mathbb{X}_4^e \right\rfloor$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\substack{e'=1 \\ e' \in l}}^{BE} \left\lfloor T_g^{\circledast e'} \left(\mathbb{A}(\theta_{e'}) \, . \, [\delta_{l1}] \right) \otimes \mathbb{X}_{B1}^{e'} \right\rfloor .$$

که در آن بردار $\boldsymbol{\varepsilon}_{g'}^{-}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

(۱۵-۷)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_g^- = \sum_{e=1}^{E}\left\lfloor \boldsymbol{\varepsilon}_g^{-e} \right\rfloor = \sum_{g'=1}^{G}\left(1-\delta_{gg'}\right)$$
$$\times\left\{\left(\sum_{e=1}^{E}\left\lfloor\left(\boldsymbol{\Sigma}_{-gg'}^{e}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{-g'g'}^{-1,e}\right)\otimes\mathbb{I}\right\rfloor\right).\boldsymbol{\varepsilon}_{g'}^{-}-\left(\sum_{k}\sum_{e=1}^{E}\left\lfloor\left(\boldsymbol{\Sigma}_{-gg'}^{e}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{-g'g'}^{-1,e}\,\mathbb{U}_k\right)\otimes\left(\mathbb{X}_1^{e^{-1}}\,\mathbb{X}_{3\,k}^{e}\right)\right\rfloor\right).\xi_{g'}\right\}$$

بنابراین در محاسبه $\mathbb{S}_e$ و $\mathbb{M}_e$ نیاز به محاسبه یک سری انتگرال‌های زاویه‌ای و فضایی است که مشابه حالت یک بعدی در جدول زیر فهرست شده‌اند.

جدول شماره ۱: ماتریس‌ها و انتگرال‌های زاویه‌ای برای حالت دو بعدی کارتزین

انتگرال‌های زاویه‌ای	ماتریس‌های زاویه‌ای
$\langle\sqrt{1-\mu^2}\,\lvert\cos(\omega-\theta_e)\rvert\,\mathbb{Y}_+(\mathbf{\Omega})\mathbb{Y}_+^{\mathrm{T}}(\mathbf{\Omega})\rangle$	$\mathbb{A}(\theta_e)$
$\langle\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega\,\mathbb{Y}_-(\mathbf{\Omega})\mathbb{Y}_+^{\mathrm{T}}(\mathbf{\Omega})\rangle$	$\mathbb{U}_y$
$\langle\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega\,\mathbb{Y}_-(\mathbf{\Omega})\mathbb{Y}_+^{\mathrm{T}}(\mathbf{\Omega})\rangle$	$\mathbb{U}_z$

انتگرال‌های زاویه‌ای مستقل از مسئله بوده و می‌توان آن را یک بار برای همیشه محاسبه کرده و به صورت جدول درآورد.

جدول شماره ۲: ماتریس‌ها و انتگرال‌های مکانی در حالت یک بعدی تخت

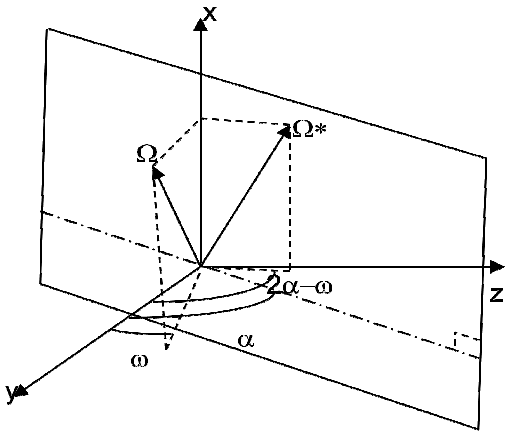
ماتریس‌های مکانی	انتگرالهای مکانی
$\mathbb{X}_1^e$	$\int_{A_e} \mathbb{m}_e(\mathbf{r})\mathbb{m}_e^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})dA$
$\mathbb{X}_{2\ k,k'}^e = \mathbb{X}_{2\ k',k}^{e\mathrm{T}}$	$\int_{A_e} \partial_k \mathbb{m}_e(\mathbf{r})\partial_{k'}\mathbb{m}_e^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})dA$
$\mathbb{X}_{3\ k}^e$	$\int_{A_e} \mathbb{m}_e(\mathbf{r})\partial_k \mathbb{m}_e^{\mathrm{T}}(\mathbf{r})dA$
$\mathbb{X}_4^e$	$\int_{A_e} \mathbb{m}_e(\mathbf{r})dA$
$\mathbb{X}_{\mathrm{B}1}^e$	$\int_{l_e} \mathbb{m}_e(\mathbf{r}_\mathrm{s})dl$
$\mathbb{X}_{\mathrm{B}2}^e$	$\int_{l_e} \mathbb{m}_e(\mathbf{r}_\mathrm{s})\mathbb{m}_e^{\mathrm{T}}(\mathbf{r}_\mathrm{s})dl$
$\mathbf{r}_\mathrm{s} \in \partial A_e$ (*on external boundaries*);	$k' \, or\, k = y\, ,z$

نحوه محاسبه تحلیلی انتگرال‌های زاویه‌ای و مکانی در پیوست ح از گزارش تفصیلی کد ENTRANS-2D. [۶۹] .بیان شده است

در تقریب P_N (N فرد) و با فرض آن‌که هر عنصر فضایی e از P گره تشکیل یافته، سایز ماتریس‌های $\mathbb{S}_e$ و $\mathbb{M}_e$ به ترتیب $\left[\frac{(N+1)^2}{4}P \times 1\right]$ و $\left[\frac{(N+1)^2}{4}P \times \frac{(N+1)^2}{4}P\right]$ خواهد بود. همچنین اگر تعداد کل گره‌ها $\mathcal{P}$ باشد. ابعاد ماتریس سراسری $\mathbb{M}$ برابر $\left[\frac{(N+1)^2}{4}\mathcal{P} \times \frac{(N+1)^2}{4}\mathcal{P}\right]$ بوده و ابعاد ماتریس سراسری معلومات (چشمه) $\mathbb{S}$ نیز برابر $[\frac{(N+1)^2}{4}\mathcal{P} \times 1]$ خواهد بود.

پس از تشکیل ماتریس‌های محلی باید آن‌ها را به گونه‌ای درون ماتریس‌های سراسری سرهم‌بندی نمود که نقاط اشتراک عناصر از مقدار یکسان برخوردار باشند (پیوستگی حفظ شود) [پیوست ج]. ماتریس سراسری در حالت دو بعدی بسته به نوع مش‌بندی صفحه معمولاً پراکنده و پخش بوده اگرچه همواره مثبت قطعی و متقارن است. [۱۲ و ۲۰]

۷-۴- الزامات بازتابنده کامل در حالت دو بعدی



شکل ۴: نحوه قرارگیری صفحه بازتابنده کامل در دو بعد

چنانچه الزامات سطوح بازتابنده کامل در توابع آزمون بکار رفته در اصل $K^{+}[\psi^{+}]$ رعایت نشود، این اصل به پاسخ صحیح نخواهد انجامید. لذا لازم است که وضعیت این سطوح را در حالت دو بعدی با تفصیل بیشتری مطالعه نماییم. فرض کنیم سطح بازتابنده کامل با قید $\psi^{+}(\mathbf{r}_{\mathrm{pr}},\mathbf{\Omega}) = \psi^{+}(\mathbf{r}_{\mathrm{pr}},\mathbf{\Omega}^{*})$ به شکل۴ عمود بر صفحه yz و گذرنده از محور x و با جهت گیری α نسبت به محور y قرار گرفته است. نحوه عملکرد صفحه بازتابنده چنان است که اگر نوترون در جهت $\mathbf{\Omega}$ از پشت صفحه به آن برخورد کند، در جهت $\mathbf{\Omega}^{*}$ (و همانند برخورد نور به آینه) منعکس خواهد شد. برای آن‌که قید یاد شده در تابع آزمون ψ^{+} رعایت شود، لازم است تا روی مرز بازتابنده کامل $(\mathbf{r}_{\mathrm{pr}})$ داشته باشیم:

$$\psi^{+}(\mathbf{r}_{\mathrm{pr}},\mathbf{\Omega}) = \mathbb{Y}_{+}^{\mathrm{T}}(\mathbf{\Omega})\Psi^{+}(\mathbf{r}_{\mathrm{pr}}) = \mathbb{Y}_{+}^{\mathrm{T}}(\mathbf{\Omega}^{*})\Psi^{+}(\mathbf{r}_{\mathrm{pr}}) = \psi^{+}(\mathbf{r}_{\mathrm{pr}},\mathbf{\Omega}^{*}) \qquad (۱۶-۷)$$

با توجه به اینکه:

$$\mathbf{\Omega} = (\mu, \omega) \quad ; \quad \mathbf{\Omega}^* = (\mu, 2\alpha - \omega) \qquad (۱۷-۷)$$

و نیز با توجه به استقلال خطی و تعامد هماهنگ‌های کروی، شرط مذکور ایجاب می‌کند که:

$$Y_{lm}(\mu, \omega) = Y_{lm}(\mu, 2\alpha - \omega) \qquad (۱۸-۷)$$

مشاهده می‌شود که در برخی از هماهنگ‌های کرویِ مجموعه (۷-۷) یعنی Y_{l0}ها به علت عدم وابستگی به زاویه سمتی همواره شرط مذکور رعایت می‌شود. لذا قیدی بر روی ضرایب آنها یعنی $\varphi_{l0}(\mathbf{r})$ ها نخواهد بود. اما در سایر موارد شرط (۷-۱۶) پس از یک سری عملیات ریاضی نهایتاً خود را به صورت زیر نشان خواهد داد:

$$\varphi_{l-m}(\mathbf{r}_{\text{pr}}) + \varphi_{lm}(\mathbf{r}_{\text{pr}}) \tan m\alpha = 0. \quad ; \quad \begin{array}{l} l = 2, 4, \cdots \\ m = 2, 4, \cdots, l \end{array} \qquad (۱۹-۷)$$

رابطه (۷-۱۹) تکانه‌های بسط ψ^+ را به صورت زوج – زوج (و تکانه‌های بسط ψ^- را به صورت فرد – فرد) مقید می‌کند. مشاهده می‌شود که چنانچه $m\alpha$ به صورت مضارب صحیح π باشد (۰ و $\pm\pi$ و . . .)، برقراری تساوی حکم می‌کند که $\varphi_{l-m}(\mathbf{r}_{\text{pr}}) = 0$ در حالی که $\varphi_{lm}(\mathbf{r}_{\text{pr}})$ هر مقداری می‌تواند داشته باشد. بنابراین برای مرز بازتابنده با زاویه $\alpha = 0$ یا $\alpha = \frac{\pi}{2}$ تکانه‌های φ_{2-2}، φ_{4-4}، φ_{4-2}، φ_{6-6}، φ_{6-4}، φ_{6-2}،.... باید در تمام محدوده $\mathbf{r} \in \mathrm{S}_{\text{pr}}$ برابر صفر باشند. چگونگی اعمال این قید در معادلات حاکم از حوصله این گزارش خارج بوده و خواننده برای جزییات ریاضی آن به گزارش تفصیلی گسترش کد نوترونی ENTRANS-2D به دو بعد ارجاع داده می‌شود.[۷۰]

۷-۵- مولد شبکه[3] برای هندسه‌های چند بعدی

برای آن که بتوان هر شکل دلخواه در محیط‌های دو و سه بعدی را مدل نمود، نیاز به نرم افزاری به نام مولّد شبکه است. مولد شبکه دارای محیطی است که کاربر می‌تواند در آن هندسه مورد دلخواه خود را ترسیم کرده، جنس مواد به کار رفته در هر ناحیه و نوع مرزهای سامانه را نیز مشخص کند. پس از رسم شکل و تعیین مواد و مرزها، مولد شبکه به دستور کاربر محیط را به المانهای کوچک می‌شکنند. تنوع شکل المان‌ها (مثلثی، مستطیلی، متوازی السطوح، هرمی و ...)، و قابلیت توزیع یکنواخت یا غیر یکنواخت المان‌ها و امکان استفاده از المان‌های غیر خطی (درجه دو و بالاتر) در نرم افزارهای مولد شبکه متفاوت است. پس از خرد کردن شکل به المان‌های کوچک‌تر چنانچه کیفیت مش‌بندی به لحاظ تعداد، تراکم و یا تقارن‌های هندسی یا ناشی از فیزیک مسئله مطلوب کاربر باشد، مولد شبکه در یک فایل خروجی

[3] Mesh (Grid) Generator

اطلاعات این شبکه‌بندی را منتشر می‌کند. فایل خروجی شامل تعداد و مختصات نقاط، تعداد المان‌ها و نقاط تشکیل دهنده هر المان، نوع ماده تشکیل دهنده المانها و گره‌های مرزی و نوع مرز و برخی اطلاعات دیگر است. قالب[4] چاپ اطلاعات مش‌بندی برای هر مولد متفاوت بوده و برخی مولدها چندین نوع قالب را پشتیبانی می‌کنند. در دنیا مولد شبکه‌های فراوانی طراحی شده که برخی از آنها حرفه‌ای و تجاری بوده و بسیاری دیگر (که عموماً ضعیف‌تر هستند) به طور رایگان از طریق اینترنت در دسترس می‌باشد.

در توسعه برنامه ENTRANS-2D از مولد شبکه Gambit 2.4.6 استفاده شده که اگر چه روانی مطلوب کاربران مهندسی هسته‌ای را نداشته اما قابلیت‌های فراوان و الگوریتم‌های پیشرفته آن در تولید شبکه به انضمام پشتیبانی از چندین نوع المان در دو و سه بعد ضعف‌های آن را به خوبی پوشش می‌دهد. Gambit به ویژه در حوزه مهندسی مکانیک

[4] Format

کارایی خود را به اثبات رسانده و نرم‌افزار قدرتمندی چون Fluent در حوزه سیالات اطلاعات لازم برای حل به روش اجزای محدود را از این نرم‌افزار دریافت می‌کند. فایل خروجی Gambit که توسط برنامه «ENTRANS-2D» خوانده می‌شود از نوع FDNEUT. بوده که برای تولید آن ابتدا روی گزینه FIDAP از منوی Solver کلیک کرده و سپس مسیر File> Export>Mesh را انتخاب می‌نماییم. با این کار در پوشه پیش فرض یک فایل مثلاً به نام Test.fdneut ایجاد شده که در کنار ورودی برنامه ENTRANS-2D که شامل سطوح مقاطع و برخی اطلاعات کلی لازم از جمله درجه بسط و شمار گروه‌های انرژی و مواد و تعریف چشمه‌های حجمی و سطحی و غیره است خوراک لازم برای حل مسئله مطلوب را فراهم می‌آورد.

از میان انواع المان‌های دو بعدی آن چه که فعلاً در توسعه کد دوبعدی ENTRANS-2D انتخاب شده، المان مثلثی شش نقطه‌ای است که در آن از میان‌یابی درجه دو استفاده می‌شود. بهره‌گیری از این نوع المان بنابر آنچه که دی‌اولیویرا

طراح کد EVENT ابراز داشته به لحاظ نسبت فایده به هزینه محاسباتی در نقطه بهینه‌ای در مقایسه با سایر المان‌ها واقع شده است [۴۶]. بنابراین کاربر هنگام مش‌بندی هندسه مورد نظر در Gambit تنها می‌تواند گزینه مش‌های مثلثی ۶ نقطه‌ای را برگزیند.

۷-۶- دقت بالای محاسباتی

یکی از ویژگی‌های منحصر به فرد نرم‌افزار Mathematica قابلیت بالای آن در محاسبات جبری و نمادین است. این قابلیت مولف را قادر ساخته تا تقریباً تمامی انتگرالهای زاویه‌ای و مکانی به کار رفته در محاسبات ماتریسی را (که در جداول ۱ و ۲ آمده اند) به طور تحلیلی حل نماید. حل تحلیلی- پارامتری این انتگرال‌ها علاوه بر آن‌که نیاز به انتگرال‌گیری عددی و تقریبی را مرتفع می‌سازد، سرعت بالای محاسباتی را نیز به ارمغان می‌آورد. بر این اساس تلاش شده تا تمامی انتگرال‌های موجود در این روش به شیوه تحلیلی حل شوند تا هنگام استفاده تنها نیاز به جایگذاری باشد.

حل تحلیلی ماتریس‌های زاویه‌ای و مکانی در دو بعد در پیوست (ح) از گزارش تفصیلی کد [۷۰] تشریح شده است. البته از نرم‌افزار Mathematica تنها در برنامه نویسی مقدماتی ENTRANS-2D و آزمایش الگوریتم‌ها و فرایندهای به کار رفته در آن استفاده می‌شود و نسخه کاربر به زبان‌های پایه‌ای‌تر همچون C ، C# یا Fortran تبدیل خواهد شد.

۸- آزمون‌ها و نتایج

۸-۱- برنامه محاسباتی ENTRANS-2D

بر پایه محاسبات انجام شده در فصول گذشته، الگوریتم برنامه محاسباتی ENTRANS-2D (مخفف ترابرد وردشی) در محیط نرم‌افزار Mathematica توسط مؤلف توسعه داده شده است. این برنامه قابلیت حل معادله ترابرد نوترون در محیط‌های دوبعدی و چند گروهی را داشته و علاوه بر آن توانایی محاسبه ضریب تکثیر مؤثر نوترون (K_{eff}) را نیز در

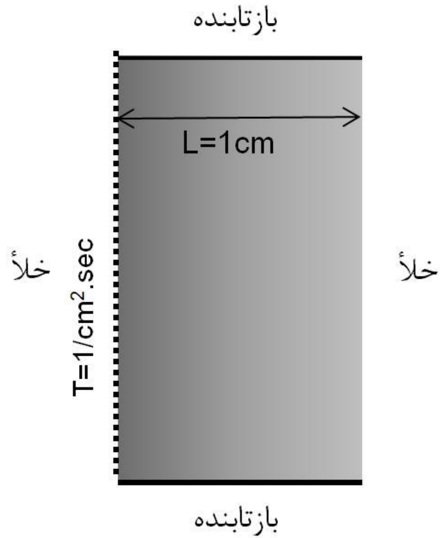
محیط‌هایی با مواد شکافت‌پذیر دارد. در این مرحله نوع المان بکار رفته در تحلیل وابستگی فضایی این برنامه، مثلثی ۳ و ۶ نقطه‌ای (خطی و درجه دو) بوده که کار تولید مش به نرم‌افزار Gambit محول شده است. حل مسایل درگیر با پراکندگی رو به بالا و یا ناهمسانگرد نیز از دیگر قابلیت‌های ENTRANS-2D است. همچنین در بخش زاویه‌ای نیز، امکان محاسبات تا مرتبه بسط (P_{13}) پیش بینی شده که در صورت نیاز به راحتی تا هر مرتبه دلخواه قابل ارتقا می‌باشد. دیگر آن‌که در کد ENTRANS-2D امکان اعمال مرز بازتابنده برای هر جهت گیری دلخواه میسر است. این کد مسایلی با چشمه‌های حجمی و سطحی گروهی را نیز حل می‌کند.

۸-۲- آزمون نخست: جاذب سیاه یک بعدی

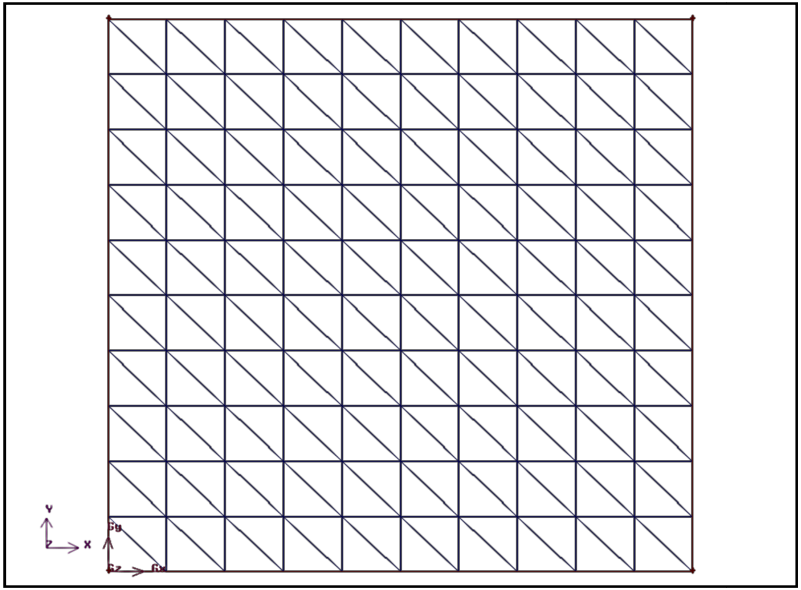
هر کد چند بعدی باید ابعاد پایین‌تر را پشتیبانی کند، بدین معنی که یک کد دو بعدی برای محیطی که در راستای y همگن بوده و مرزهای عمود بر محور y بازتابنده کامل باشد باید همان پاسخ کد یک بعدی را برای مسئله یکسان ارائه دهد. همچنین یک کد سه بعدی باید برای یک محیط همگن در راستای z که با مرزهای بازتابنده پوشانده شده جوابی مشابه با کد دو بعدی ارائه کرده و چنانچه محیط در راستای y نیز همگن و مسلح به مرزهای بازتابنده باشد، پاسخ کد سه بعدی باید با نتایج کد یک بعدی همخوانی داشته باشد.

در این مسئله یک جاذب سیاه یک بعدی مطابق شکل ۵ و با سطح مقطع جذب واحد که روی مرز سمت چپ آن یک چشمه همسانگرد به قدرت واحد کار گذاشته شده توسط نرم‌افزار Gambit شبیه‌سازی شده و نتایج مقایسه می‌شوند. نتایج تحلیلی نیز از رابطه (۱-۱۴) از گزارش کد یک بعدی ENTRANS-2D [۶۹] گرفته شده است. مش‌بندی مورد

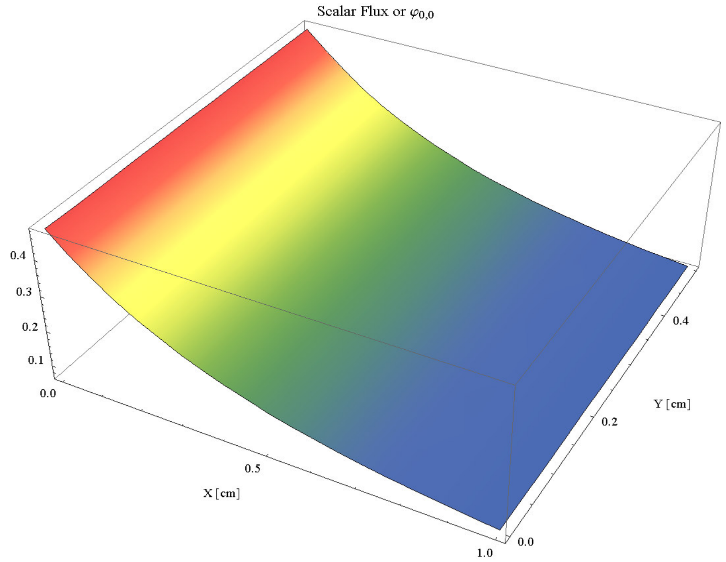
استفاده برای حل در شکل ۶، تراز شار دو بعدی در شکل ۷، نتایج محاسبات و خطای نسبی آن در جداول ۳ و ۴ و نتایج مقایسه‌ای تضعیف شار نیز در نمودار شکل ۸ آمده است.



شکل ۵: هندسه جاذب کامل یک بعدی



شکل ۶: مش بندی شکل جاذب در Gambit



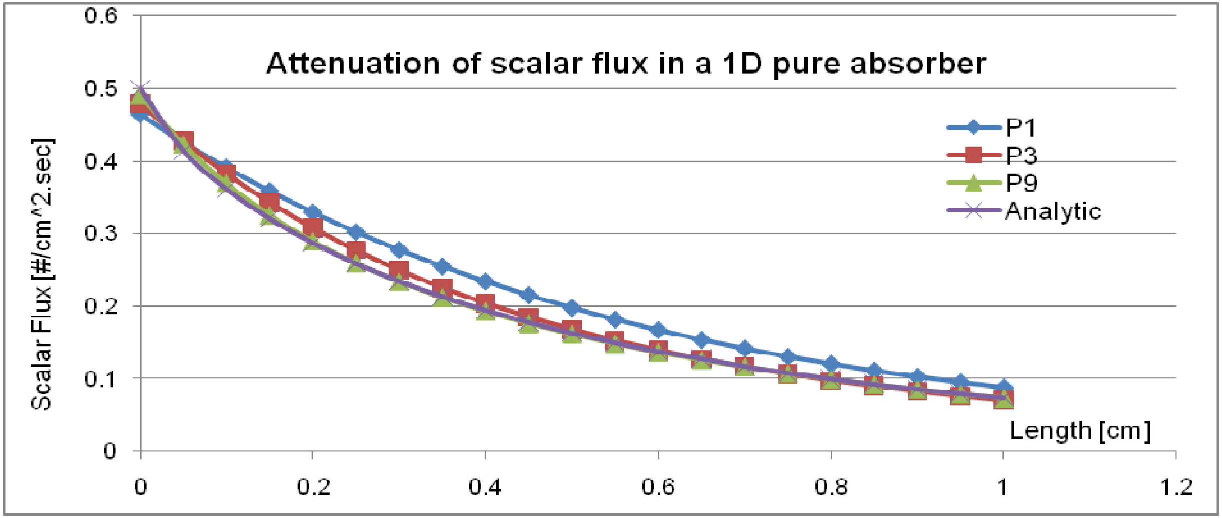
شکل ۷: نمودار تضعیف شار در جاذب یک بعدی

جدول شماره ۳: نتایج تحلیلی و محاسبات ENTRANS-2D در مراتب بسط PN در عمق متفاوت جاذب یک بعدی

x [cm]	P_1	P_3	P_5	P_7	P_9	Analytic
0.0	0.465203	0.478954	0.485127	0.488459	0.490548	0.500000
0.1	0.391585	0.382507	0.376526	0.372230	0.369155	0.361273
0.2	0.329741	0.307807	0.297812	0.292463	0.289523	0.287101
0.3	0.277814	0.249626	0.239705	0.235657	0.234070	0.234558
0.4	0.234242	0.204020	0.195961	0.193691	0.193308	0.194684
0.5	0.197716	0.168021	0.162361	0.161621	0.161987	0.163322
0.6	0.167136	0.139384	0.136033	0.136382	0.137101	0.138092
0.7	0.141582	0.116409	0.114998	0.116026	0.116841	0.117474
0.8	0.120286	0.097803	0.097874	0.099271	0.100058	0.100426
0.9	0.102608	0.082574	0.083668	0.085239	0.085969	0.086202
1.0	0.088017	0.069956	0.071647	0.073285	0.073995	0.074248

جدول شماره ۴: درصد نسبی اختلاف نتایج تحلیلی و ENTRANS-2D در مراتب بسط برای جاذب یک بعدی

x [cm]	P_1	P_3	P_5	P_7	P_9	Analytic
0.0	-13.114203	-8.810386	-5.605485	-3.837689	-2.965251	0
0.1	8.390331	5.877596	4.222043	3.032997	2.181702	0
0.2	14.851847	7.212257	3.730847	1.867496	0.843431	0
0.3	18.441452	6.423942	2.194383	0.468456	-0.207880	0
0.4	20.319287	4.795682	0.655729	-0.510057	-0.706838	0
0.5	21.058890	2.877096	-0.588714	-1.041378	-0.817281	0
0.6	21.031993	0.935592	-1.491325	-1.238232	-0.718000	0
0.7	20.521903	-0.906159	-2.107445	-1.233039	-0.538843	0
0.8	19.776054	-2.611518	-2.541274	-1.150001	-0.366240	0
0.9	19.032505	-4.208660	-2.939259	-1.117143	-0.270759	0
1.0	10.524060	-6.780540	-3.698395	-0.517142	-0.184096	0



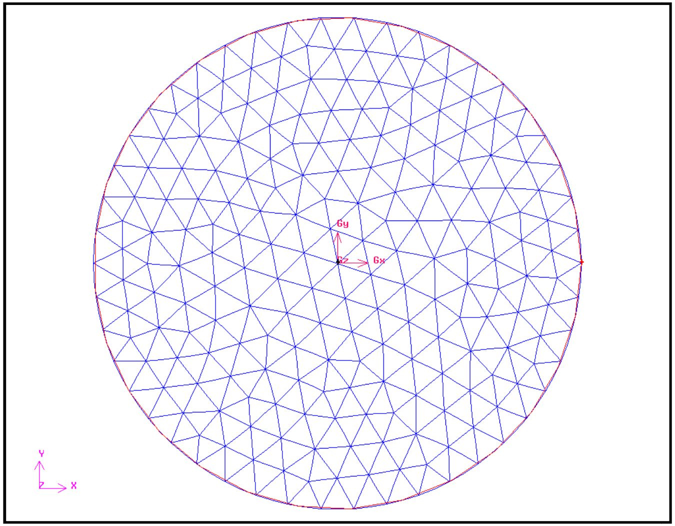
شکل ۸: نمودار تضعیف شار در جاذب یک بعدی روی خط y=0.5 cm برای بسطهای مختلف در مقایسه با نتایج تحلیلی روی تراز z=0.3 در صفحه yz

۸-۳- آزمون دوم: استوانه یک بعدی بحرانی

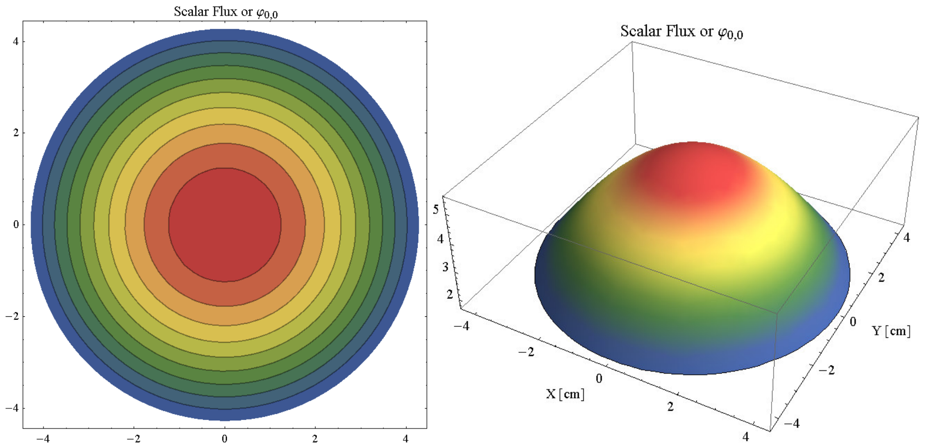
به عنوان دومین محک برای آزمودن تطبیق نتایج یک بعدی و دو بعدی یک استوانه بحرانی یک بعدی به شعاع ۴/۲۷۹۹۶۰ سانتی‌متر را که سطوح مقاطع آن در جدول ۵ آمده [۴۸]، توسط مولد شبکه Gambit شبیه‌سازی می‌کنیم (شکل ۹). از جدول ۶ مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از کد ENTRANS-2D با نتیجه تحلیلی این استوانه تطبیق خوبی دارد. یادآور می‌شود یک استوانه به ارتفاع بی‌نهایت در یک بعد معادل یک دایره در دو بعد است.

جدول شماره ۵: سطوح مقاطع تک گروهی استوانه پلوتونیومی بحرانی [۴۸]

	$\sigma_t\ [cm^{-1}]$	$\sigma_s\ [cm^{-1}]$	ν	$\sigma_f\ [cm^{-1}]$
Pu-239	0.32640	0.225216	2.84	0.081600



شکل ۹: نمونه مش بندی دایره در گمبیت



شکل ۱۰: شار نرده‌ای در استوانه یک بعدی بحرانی

جدول شماره ۶: نتایج محاسبات بحرانیت برای استوانه پلوتونیومی تک گروهی

Calculated K_{eff} for Bare Critical Pu-239 by ENTRANS-2D- K_{eff} [ref.] =1.000000					
No. Elements:	P_1	P_3	P_5	P_7	Δ (%)
438	0.933450	0.993128	0.997879	0.998456	- 0.1544 (P7)
908	0.934245	0.994492	0.998531	0.999102	- 0.0898 (P7)
1572	0.934532	0.994734	0.998766	---	- 0.1234 (P5)

همچنین در مرجع [۴۸] مقدار ضریب تکثیر بی نهایت نوترون‌ها در این ماده پلوتونیومی ۲/۲۹۰۳۲۳ داده شده که تعویض مرز خلأ سامانه با مرز بازتابنده کامل آن را مجدداً حل می‌کنیم. نتایج کد ENTRANS-2D در جدول ۷ آمده است.

جدول شماره ۷: نتایج محاسبات بحرانیت برای محیط پلوتونیومی تک گروهی بی‌نهایت

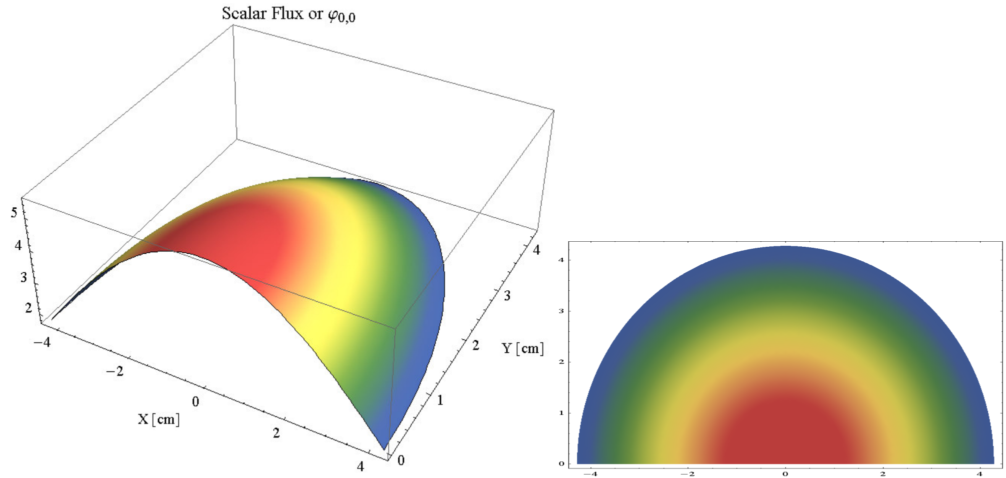
Calculated K_{inf} for Pu-239 by ENTRANS-2D- K_{inf} [ref.] =2.290323					
No. Elements:	P_1	P_3	P_5	P_7	Δ (%)
438	2.2903226	2.2903226	2.2903226	2.2903226	0.00000
908	2.2903226	2.2903226	2.2903226	2.2903226	0.00000
1572	2.2903226	2.2903226	2.2903226	---	0.00000

مشاهده می‌شود که نتایج محاسبات برای ضریب تکثیر محیط بی‌نهایت از دقت بالایی برخوردار است و در این مثال اساساً خطا تا رقم‌های موجود از ضریب تکثیر مؤثر مرجع، صفر است. دلیل این امر آن است که در محیط‌های همگن شار بی نهایت مسطح بوده و جستجوی K_{inf} نیز با حدس شار اولیه مسطح آغاز می‌شود. لذا پس از یک تغییر تراز شار، K_{inf} حاصل از محاسبات بر عدد مرجع منطبق می‌شود. اهمیت این مثال در این نکته نهفته است که نشان می‌دهد در برنامه ENTRANS-2D مرزهای بازتابنده و خلأ در هر جهتی قابل اعمال است.

در دو مثال قبل کل دایره (استوانه) توسط Gambit مدل شده بود، حال آن که می‌توان با استفاده از تقارن‌های شکل با تعداد المان‌های کمتر به نتایج مشابه دست یافت. برای راستی‌آزمایی برنامه ENTRANS-2D در مواردی با مرزهای بازتابنده می‌توان شکل دایره مش زده شده را با تقارن‌های ۱۸۰، ۹۰ و ۴۵ درجه حل نمود. نتایج باید همخوانی داشته باشد. این نتایج در جداول ۸ و ۹ و ۱۰ آمده است.

جدول شماره ۸: نتایج محاسبات بحرانیت برای نیم استوانه پلوتونیومی تک‌گروهی

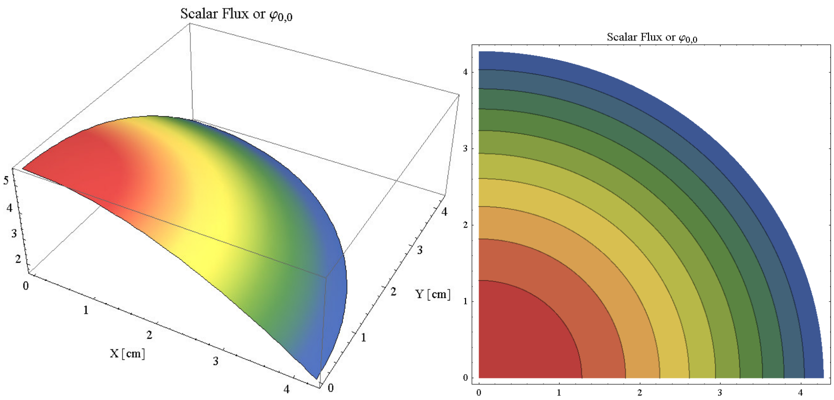
Calculated K_{eff} for Half-Reflected Critical Pu-239 by ENTRANS-2D K_{eff} [ref.] =1.000000;					
No. Elements:	P_1	P_3	P_5	P_7	Δ (%)
641	0.933768	0.994088	0.998138	0.998712	- 0.1288 (P7)
792	0.934515	0.994719	0.998752	0.999322	- 0.0678 (P7)
1726	0.934748	0.994915	0.998943	---	- 0.1057 (P5)



شکل ۱۱: شار نرده‌ای در نیم استوانه یک بعدی بحرانی

جدول شماره ۹: نتایج محاسبات بحرانیت برای چهارک استوانه پلوتونیومی تک گروهی

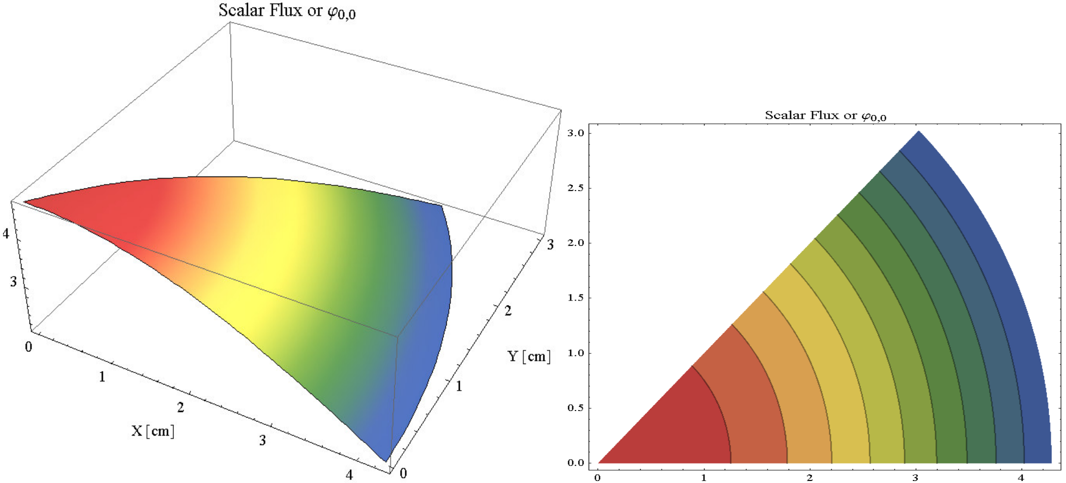
Calculated K_{eff} for Quarter-Reflected Critical Pu-239 by ENTRANS-2D K_{eff} [ref.] =1.000000					
No. Elements:	**P_1**	**P_3**	**P_5**	**P_7**	**Δ (%)**
410	0.934516	0.994720	0.998752	0.999322	- 0.0678 (P7)
884	0.934747	0.994915	0.998943	---	- 0.1056 (P5)
1120	0.934781	0.994943	0.998970	---	- 0.1030 (P5)



شکل ۱۲: شار نرده‌ای در چهارک استوانه یک بعدی بحرانی

جدول شماره ۱۰: نتایج محاسبات بحرانیت برای یک هشتم استوانه پلوتونیومی تک گروهی

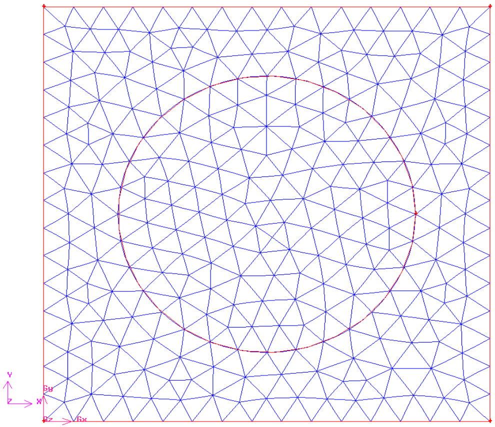
Calculated K_{eff} for 1/8th Reflected Critical Pu-239 by ENTRANS-2D K_{eff} [ref.] =1.000000					
No. Elements:	**P_1**	**P_3**	**P_5**	**P_7**	**Δ (%)**
230	0.934579	0.994773	0.998804	0.999374	- 0.0626 (P_7)
476	0.934766	0.994931	0.998958	0.999526	- 0.0474 (P_7)
822	0.934815	0.994972	0.998998	---	- 0.1002 (P_5)



شکل ۱۳: شار نرده‌ای در یک هشتم استوانه یک بعدی بحرانی

۸-۴- آزمون سوم: محاسبه عامل عدم مزیت یاخته‌های دو بعدی سوخت

هدف در این آزمون بررسی کاربرد ENTRANS-2D در محاسبات ترابرد سلولی است. ویلیامز در مقاله‌ای [۴۲] برای یافتن شار در سلول‌های مربعی شکل دو بعدی با هسته سوختی مربع و دایره‌ای (استوانه ای) شکل روابطی تحلیلی یافته و سپس با استفاده از همین روابط یک رابطه برای محاسبه عامل عدم مزیت یاخته‌های مذکور ارائه کرده است. وی برای شبیه‌سازی وضعیت شار نوترون‌های گرمایی در یاخته‌های سوخت، یک چشمه حجمی نوترون با قدرت ثابت T از را در سرتاسر کند کننده تصور کرده و برای سوخت که از همان جنس کند کننده فرض می‌کند، چشمه در نظر نمی‌گیرد. این وضعیت تا حدود زیادی مشابه یاخته‌های واقعی سوخت است که در آن کنندکننده، منبع نوترون‌های گرمایی است که در سوخت جذب می‌شوند. نظر به پیچیدگی روابط تحلیلی از ذکر آن‌ها در اینجا خودداری شده و فقط یک نمونه از نتایج ارائه شده در مرجع [۴۸] در اینجا شبیه‌سازی می‌شود.



شکل ۱۴: نمونه مش‌بندی یاخته دو بعدی سوخت (آزمون سوم)

با داشتن متوسط شار تحلیلی در نواحی کند کننده و سوخت می‌توان عامل عدم مزیت یاخته سوخت را از رابطه زیر محاسبه نمود:

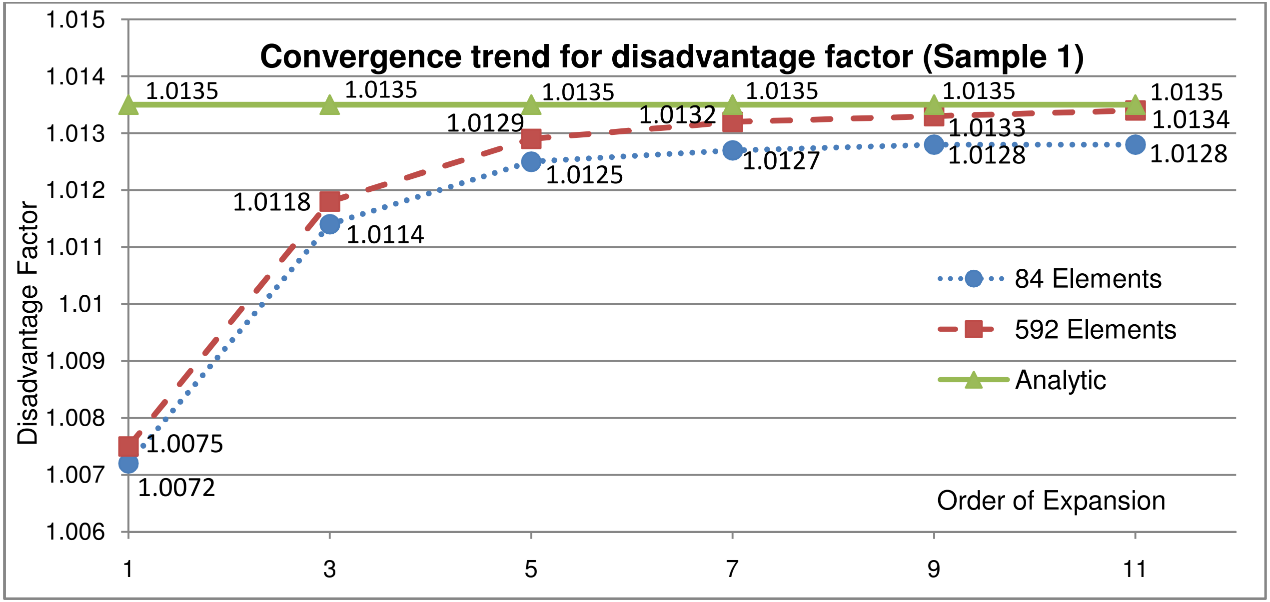
$$\zeta = \frac{\overline{\phi}_M}{\overline{\phi}_F} \qquad (۲-۱۴)$$

برای مقایسه نتایج، دو نمونه یاخته سوختی با مشخصات داده شده در زیر توسط ENTRANS-2D حل شده و نتایج با مقدار تحلیلی مقایسه می‌شود:

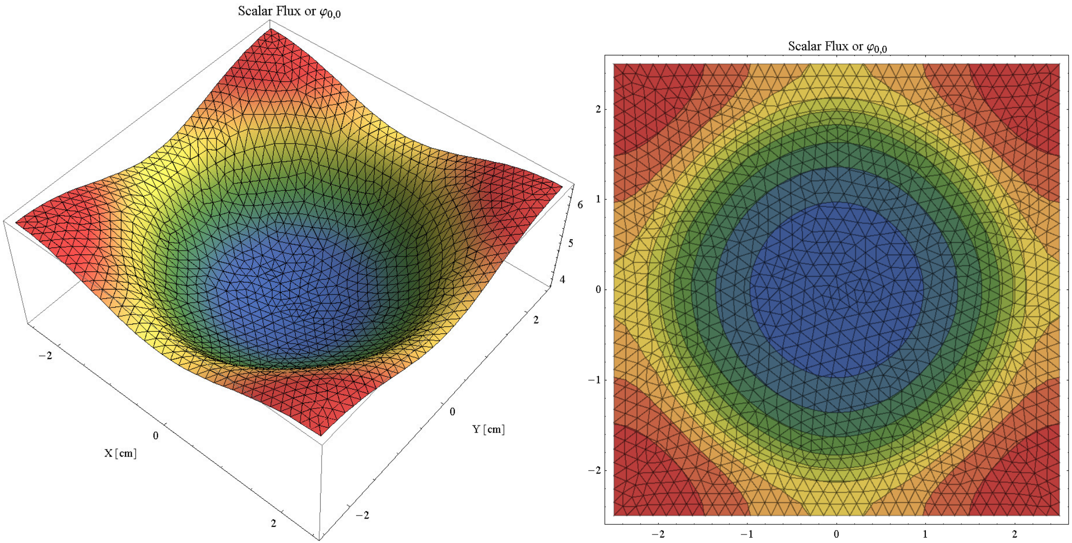
- نمونه اول: شعاع قرص سوخت: ۱ cm؛ گام شبکه: ۳ cm؛ $\sigma_t = 1.0\ [cm^{-1}]$ و $\sigma_s = 0.9\ [cm^{-1}]$
- نمونه دوم: شعاع قرص سوخت: ۲ cm؛ گام شبکه: ۵ cm؛ $\sigma_t = 1.0\ [cm^{-1}]$ و $\sigma_s = 0.9\ [cm^{-1}]$

جدول شماره ۱۱: نتایج محاسبه عامل عدم مزیت یاخته دو بعدی سوخت توسط کد ENTRANS-2D

نمونه	تعداد المان	P_1	P_3	P_5	P_7	P_9	P_{11}	تحلیلی [۴۸]	درصد خطا (P_{11}- تحلیلی)
اول	۸۴	۱/۰۰۷۲	۱/۰۱۱۴	۱/۰۱۲۵	۱/۰۱۲۷	۱/۰۱۲۸	۱/۰۱۲۸	۱/۰۱۳۵	-۰/۰۶۹۱
	۵۹۲	۱/۰۰۷۵	۱/۰۱۱۸	۱/۰۱۲۹	۱/۰۱۳۲	۱/۰۱۳۳	۱/۰۱۳۴		-۰/۰۰۹۹
دوم	۷۳۶	۱/۲۴۷۶	۱/۳۲۶۷	۱/۳۳۷۴	۱/۳۳۹۹	۱/۳۴۰۸	۱/۳۴۱۲	۱/۳۴۳۲	-۰/۱۴۸۹
	۱۵۷۰	۱/۲۴۷۷	۱/۳۲۷۲	۱/۳۳۸۰	۱/۳۴۰۴	۱/۳۴۱۴	۱/۳۴۱۸		-۰/۱۰۴۳



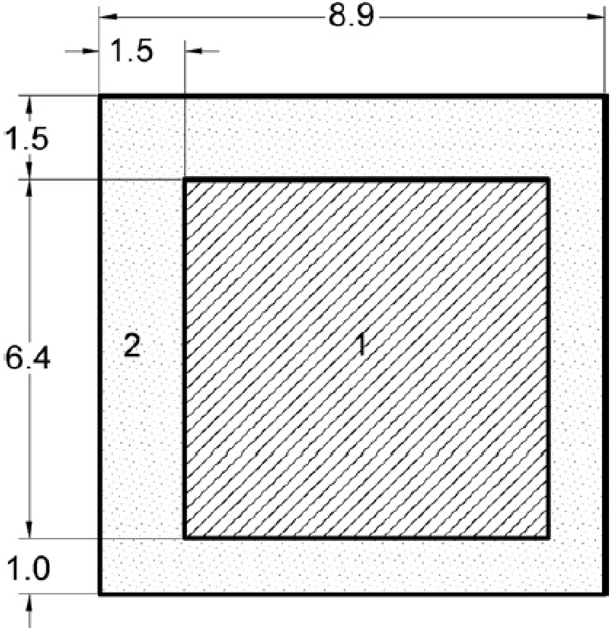
شکل ۱۵: روند همگرایی عامل عدم مزیت یاخته دو بعدی با افزایش مرتبه بسط و تعداد عناصر مکانی



شکل ۱۶: تراز شار نرده‌ای محاسبه شده توسط ENTRANS-2D در یاخته دو بعدی

۸-۵- آزمون چهارم: یاخته همگن دو بعدی با پراکندگی رو به بالا

این محک در مرجع [۶۴] مطرح شده و متشکل از یک یاخته مستطیلی همگن شده دو ناحیه‌ای (شکل ۱۷) و دو گروهی با مرزهای بازتابنده بوده که سطوح مقاطع آن در جدول ۱۲ داده شده است. نتایج محاسبه متوسط شار در هر گروه و همچنین ضریب تکثیر بی‌نهایت یاخته با سایر کدهای معتبر مقایسه شده است.



شکل ۱۷: هندسه یاخته دو بعدی آزمون چهارم

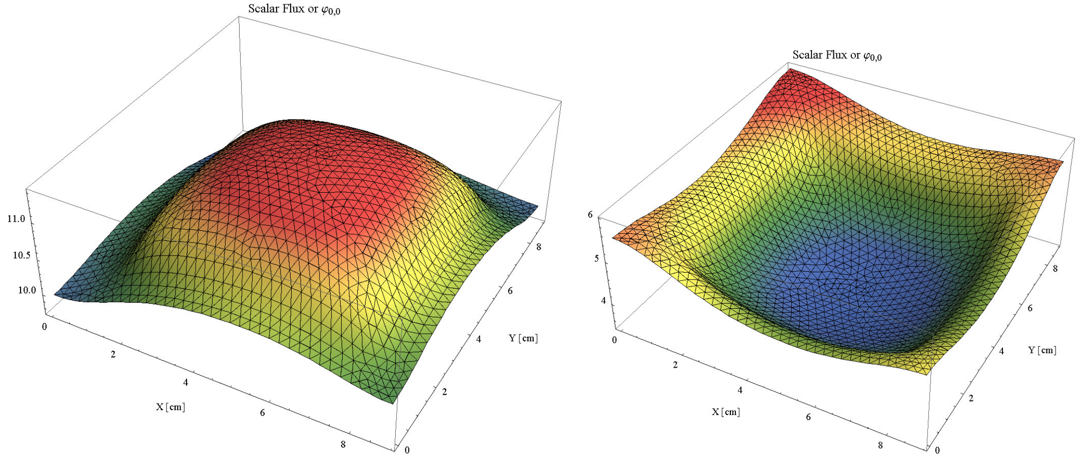
جدول شماره ۱۲: سطوح مقاطع دو گروهی یاخته دو بعدی سوخت

Energy Group	Material	σ_t $[cm^{-1}]$	$\sigma_{s,g\to 1}$ $[cm^{-1}]$	$\sigma_{s,g\to 2}$ $[cm^{-1}]$	$\nu\sigma_f$ $[cm^{-1}]$	χ
1	1	1.96647E-1	1.780E-1	1.002E-2	6.203E-3	1.0
	2	2.22064E-1	1.995E-1	2.188E-2	0.000E+0	
2	1	5.96159E-1	1.089E-3	5.255E-1	1.101E-1	0.0
	2	8.87874E-1	1.558E-3	8.783E-1	0.000E+0	

جدول شماره ۱۳: محاسبه شار و بحرانیت یاخته دو بعدی سوخت توسط ENTRANS-2D (با ۸۳۲ المان) در مقایسه با دو کد دیگر

Code	$\overline{\phi}_1$		$\overline{\phi}_2$		k_∞
	Fuel	Moderator	Fuel	Moderator	
ENTRANS-2D –P_1	1.0000	0.9686	0.3650	0.4499	1.2206
ENTRANS-2D –P_3	1.0000	0.9462	0.3576	0.4572	1.2142
ENTRANS-2D –P_5	1.0000	0.9352	0.3547	0.4546	1.2132
ENTRANS-2D –P_7	1.0000	0.9304	0.3535	0.4532	1.2128
ENTRANS-2D –P_9	1.0000	0.9282	0.3530	0.4525	1.2126
ENTRANS-2D –P_{11}	1.0000	0.9271	0.3527	0.4522	1.2125
SURCU [64]	1.0000	0.9271	0.3529	0.4509	1.2127
AutoMoc [64]	1.0000	0.9278	0.3530	0.4512	1.2137

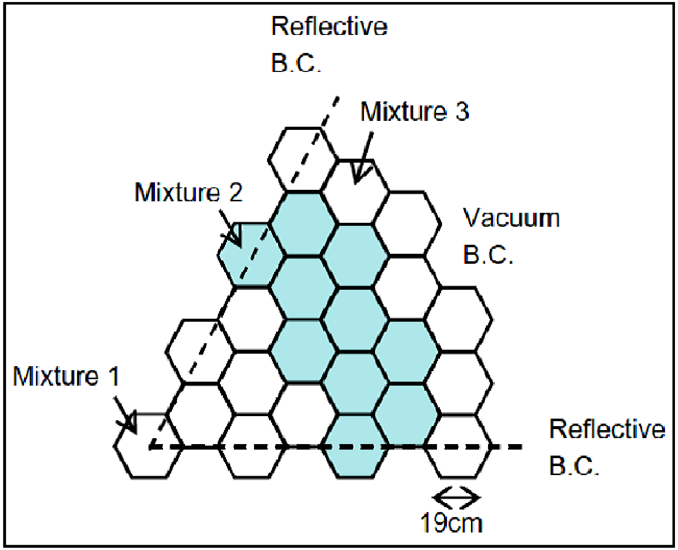
همان‌گونه که مشاهده می‌شود نتایج حاصله از ENTRANS-2D تطبیق خوبی با نتایج کدهای ترابرد انتگرالی دارد.



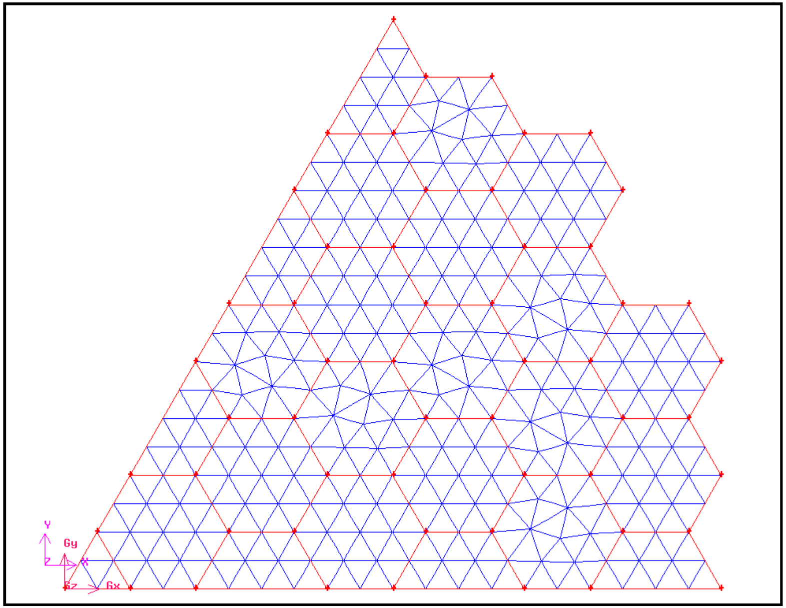
شکل ۱۸: شار نرده‌ای محاسبه شده در یاخته دو بعدی آزمون چهارم (گروه اول: سمت چپ - گروه دوم: سمت راست)

۸-۶- آزمون پنجم: رآکتور با سوخت‌های شش ضلعی و سطح مقطع ناهمسانگرد

این محک نیز در مرجع [۶۵] مطرح شده و هدف آن نشان دادن توانایی کد در تحلیل پراکندگی ناهمسانگرد است. هندسه این محک در شکل ۱۹، مش‌بندی مورد استفاده در شکل ۲۰ و سطوح مقاطع آن در جدول ۱۴ آمده است. نتایج نیز در جدول ۱۵ منعکس شده است.



شکل ۱۹: هندسه رآکتور با سوخت‌های شش ضلعی



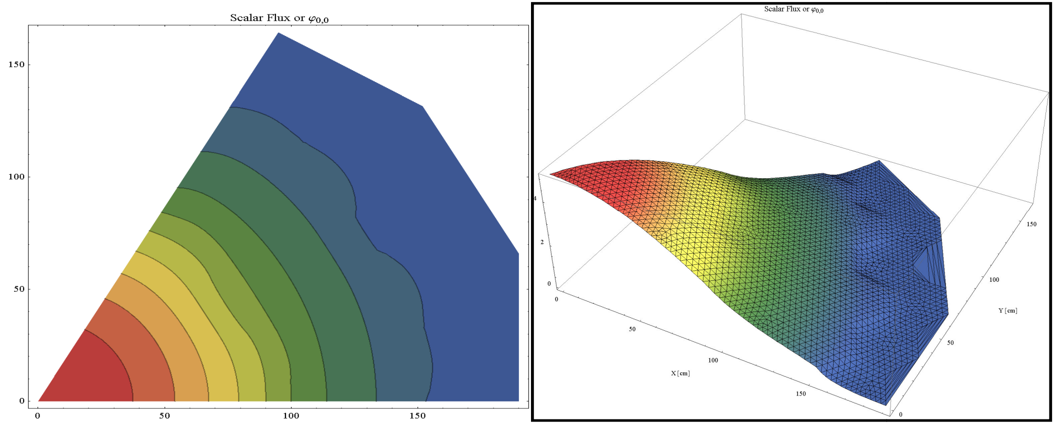
شکل ۲۰: نمونه مش‌بندی رآکتور با سوخت‌های شش ضلعی

جدول شماره ۱۴: سطوح مقاطع مواد بکار رفته در آزمون پنجم

Material	σ_t	$\sigma_{s,0}$	$\sigma_{s,1}$	$\nu\sigma_f$
Mix. 1	0.025	0.013	0.000	0.0155
Mix. 2	0.025	0.024	0.006	0.0000
Mix. 3	0.075	0.000	0.000	0.0000

جدول شماره ۱۵: نتایج محاسبات بحرانیت توسط کد ENTRANS-2D برای آزمون پنجم و مقایسه با نتایج مرجع

تعداد المان	P_1	P_3	P_5	P_7	مرجع [۶۵]	درصد خطا (P_7- تحلیلی)
۵۵۰	۰/۹۷۲۳۳	۰/۹۹۸۵۰۶	۰/۹۹۹۸۴۹	۱/۰۰۰۲۲	۱/۰۰۰۳۳	-۰/۰۱۱
۱۲۱۶	۰/۹۷۲۳۹۷	۰/۹۹۸۵۸۰	۰/۹۹۹۹۴۶	۱/۰۰۰۳۴		+۰/۰۰۰۱



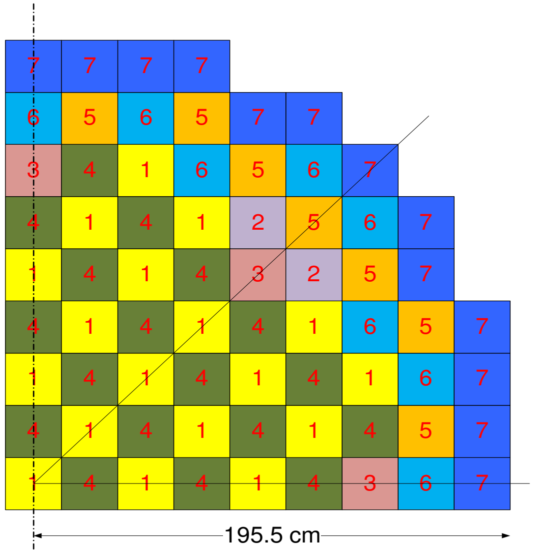
شکل ۲۱: تراز شار در رآکتور با سوخت‌های شش ضلعی

۸-۷- آزمون ششم: قلب دو گروهی رآکتور قدیم بوشهر (KWU’s PWR)

در این محک به شبیه‌سازی قلب دو گروهی رآکتور PWR طراحی شده توسط KWU می‌پردازیم. قلب این رآکتور از شش نوع مجتمع سوخت تشکیل شده که اطراف آن را آب فرا گرفته است. طرح کامل این قلب در شکل ۲۲ آمده و سطوح مقاطع نیز در جدول ۱۶ آن مذکور است. لکن یک مشکل عمده در تحلیل این قلب، عدم وجود سطوح مقاطع مناسب معادله ترابرد نوترون است چرا که مقادیر داده شده در جدول سطوح مقاطع، برای معادله پخش تنظیم شده است. البته از طریق روابطی مانند $D_g = \frac{1}{3\sigma_{t,g}}$ و $\sigma_{R,g} = \sigma_{t,g} - \sigma_{s,gg}$ (**که در آن** D_g و $\sigma_{R,g}$ به ترتیب ضریب پخش گروهی نوترون و سطح مقطع حذف از گروه است،) **می**‌توان به نوعی سطح مقاطع تبدیل شده‌ای را برای معادله ترابرد به دست آورد. استفاده از این مقادیر به تجربه نشان از کارآمدی این روابط برای این مسئله خاص دارد. با توجه به وجود تقارن‌های

موجود در شکل ۲۲ تحلیل تنها یک هشتم قلب این PWR کفایت می‌کند که این امر به کاهش هزینه‌های محاسباتی بدون کاستن از دقت منجر می‌شود.

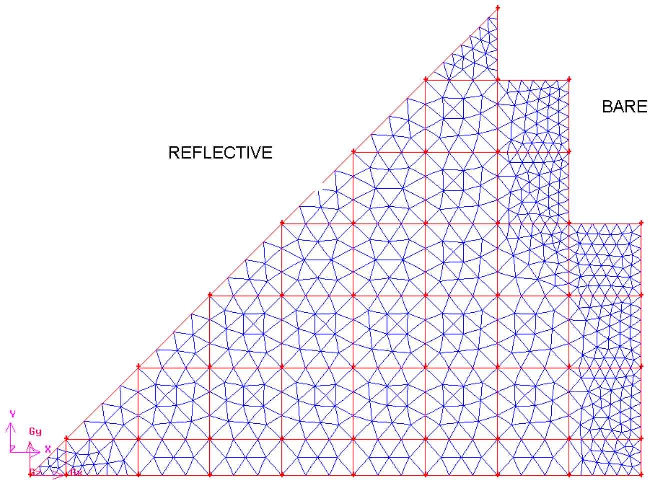
ضلع هر مجتمع سوخت در این رآکتور ۲۳ سانتی‌متر بوده و برای افزایش دقت تراکم المان‌ها در اطراف مرز خلأ را افزایش داده‌ایم (شکل ۲۳). یادآور می‌شود یک لایه آب (در نقش بازتابنده) به ضخامت ۲۳ سانتی‌متر اطراف قلب را فراگرفته است.). یادآور می‌شود یک لایه آب (در نقش بازتابنده) به ضخامت ۲۳ سانتی‌متر اطراف قلب را فراگرفته است. با توجه به ضخامت نسبتاً بالای این لایه آبی می‌توان ورای آن را برای نوترون‌ها مرز بدون بازگشت (مرز خلأ) در نظر گرفت که با توجه به ابعاد قلب این تقریب بر دقت محاسبات اثر ناچیزی دارد. این مسئله توسط ENTRANS-2D حل شده و نتایج با کد CITATION مقایسه شده است. (جدول ۱۷)



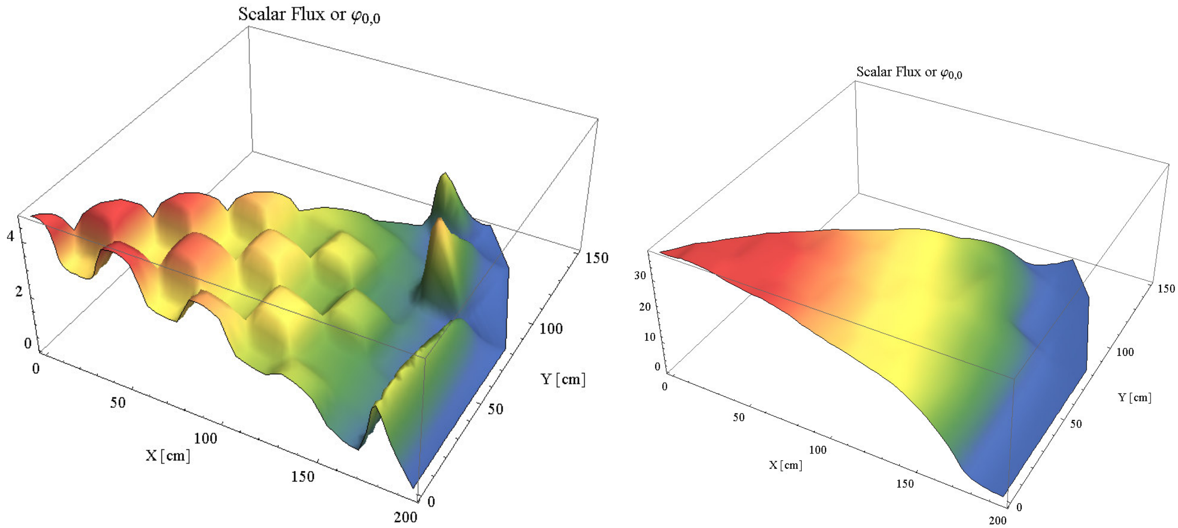
شکل ۲۲: چینش قلب رآکتور قدیم بوشهر- طراحی KWU

جدول شماره ۱۶: سطوح مقاطع سوخت‌های بکار رفته در رآکتور قدیم بوشهر [۶۷]

نوع سوخت	D_1	D_2	σ_{R1}	$\sigma_{a,1}$	$\sigma_{a,2}$	$\nu\sigma_{f1}$	$\nu\sigma_{f2}$
1	1.3948E+00	3.8234E-01	1.7003E-02	8.2870E-03	6.8372E-02	4.8881E-03	8.1256E-02
2	1.4082E+00	3.8852E-01	1.6318E-02	8.4906E-03	7.3725E-02	4.8594E-03	8.1415E-02
3	1.4111E+00	3.8566E-01	1.6686E-02	8.6933E-03	7.8326E-02	5.6764E-03	1.0292E-01
4	1.4099E+00	3.9187E-01	1.6011E-02	8.8995E-03	8.3793E-02	5.6438E-03	1.0314E-01
5	1.4131E+00	3.8874E-01	1.6341E-02	9.1495E-03	8.9253E-02	6.5505E-03	1.2641E-01
6	1.4118E+00	3.9494E-01	1.5675E-02	9.3479E-03	9.4641E-02	6.5120E-03	1.2669E-01
7	2.22231E+00	2.8649E-01	3.4002E-02	7.59E-04	2.7397E-02	0.0000	0.0000



شکل ۲۳: نمونه مش‌بندی رآکتور قدیم بوشهر با استفاده از Gambit - تعداد المان: ۱۳۳۲



شکل ۲۴: نمودار شارهای نرده‌ای رآکتور قدیم بوشهر (سمت راست: گروه اول - سمت چپ: گروه دوم)

جدول شماره ۱۷: نتایج محاسبات بحرانیت برای رآکتور قدیم بوشهر

تعداد المان	P_1	P_3	P_5	CITATION [68]
۹۳۶	۰/۸۸۹۸۵۰	۰/۸۹۰۰۲۸	۰/۸۹۰۰۳۵	۰/۸۸۹۰۸۱
۱۳۳۲	۰/۸۸۹۸۴۰	۰/۸۹۰۰۱۸	۰/۸۹۰۰۲۵	
۲۰۲۸	۰/۸۸۹۸۲۳	۰/۸۸۹۹۹۸	۰/۸۹۰۰۰۵	

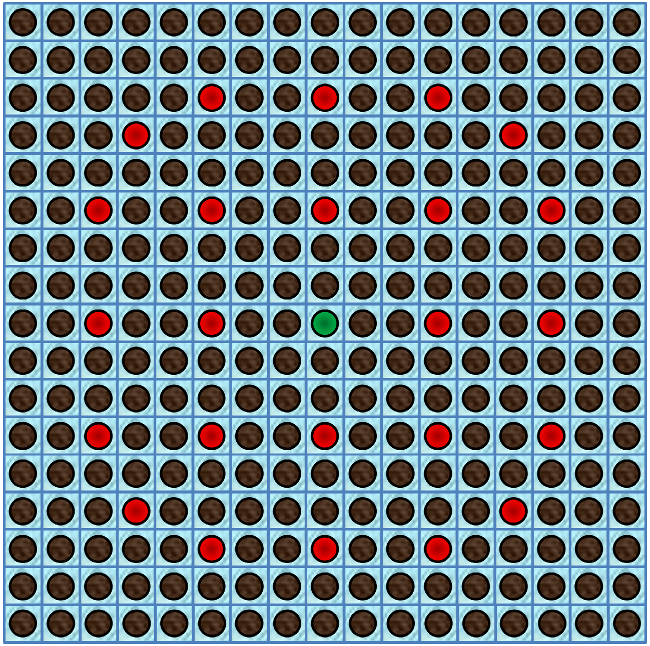
مشاهده می‌شود که تطبیق خوبی بین نتایج محاسبات توسط ENTRANS-2D و کد CITATION (به ویژه در حالت P_1 که قرابت زیادی به معادله پخش دارد) مشاهده می‌شود. لکن به دلیل آن‌که روش و تعداد مجهولات به کار رفته در این دو کد متفاوت است نمی‌توان انتظار نتایج کاملاً مشابه را داشت.

۸-۸- آزمون هفتم: مجتمع سوخت رآکتور آب سبک با سوخت UO_2 در حالت ۷ گروهی

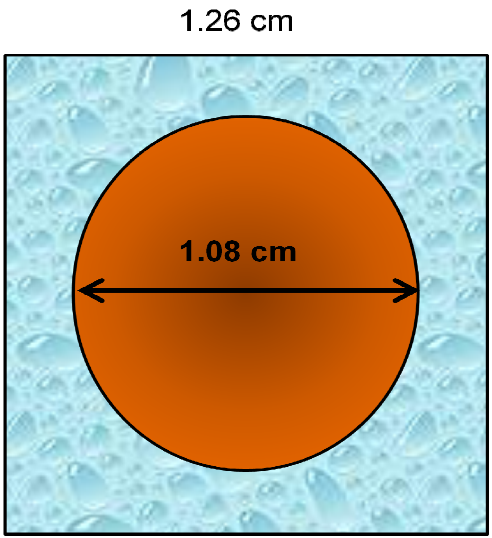
در این آزمون تلاش می‌کنیم تا ضریب تکثیر بی نهایت (K_{eff}) یک مجتمع سوخت رآکتور آب سبک با قرص‌های UO_2 در حالت ۷ گروهی را به دست آورده و با مقدار نسبتاً دقیق به دست آمده از محاسبات MCNP به عنوان پاسخ مرجع مقایسه کنیم. این مجتمع سوخت یک شبکه ۱۷ x ۱۷ از میله‌های سوخت UO_2 با کندکننده آب است که به جای تعدادی از میله‌ها موادی با نام مسیر هدایت[5] کار گذاشته شده و در کانال مرکزی نیز ماده اتاقک شکافت قرار گرفته است. هندسه این مجتمع سوخت در شکل ۲۵ و هندسه یک یاخته آن در شکل ۲۶ نشان داده شده است. از آن جا که سطوح مقاطع این محک در مرجع [۵۳] به تفصیل آمده از بازنویسی آن در گزارش خودداری می‌شود. برای محاسبه ضریب تکثیر بی نهایت این مجتمع سوخت پس از طراحی آن در Gambit چهار سوی آن را مرز بازتابنده کامل قرار داده

[5] Guide Tube

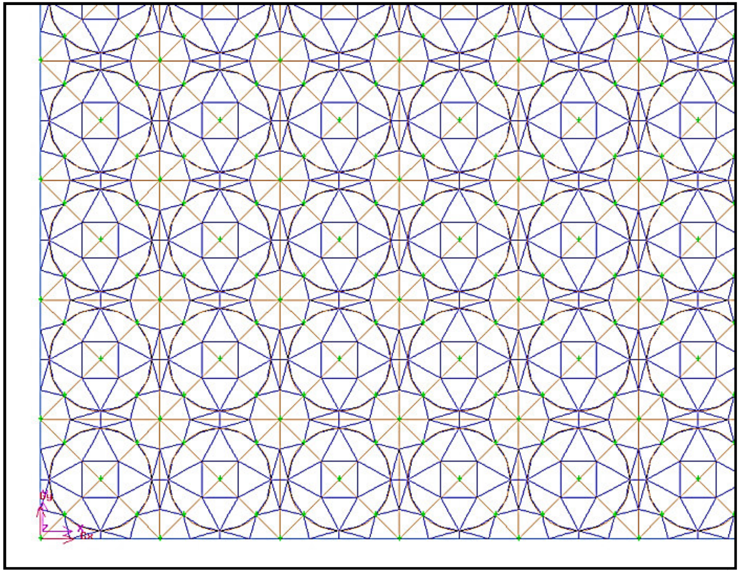
و شکل را مش می‌زنیم. خروجی محاسبات با دو تراکم مش (شکل‌های ۲۷ و ۲۸) و با استفاده از مش‌بندی‌های مثلثی سه و شش نقطه‌ای در جدول ۱۸ آورده شده است.



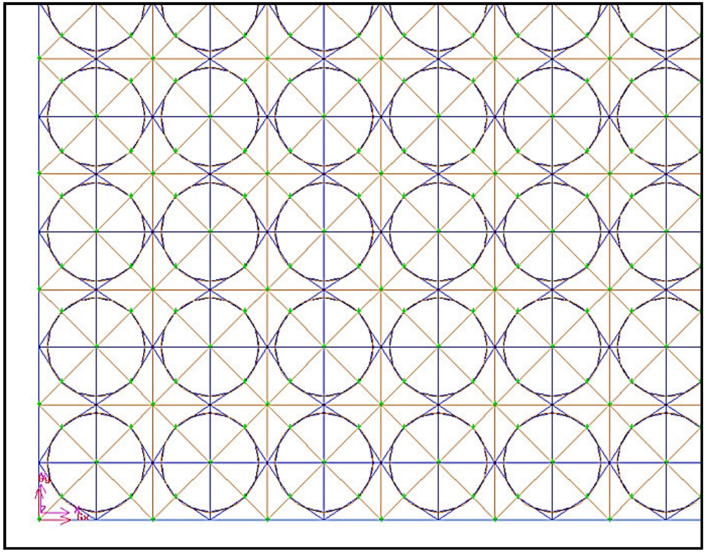
شکل ۲۵: هندسه مجتمع سوخت UO_2



شکل ۲۶: هندسه و ابعاد یک یاخته سوخت مجتمع سوخت UO_2



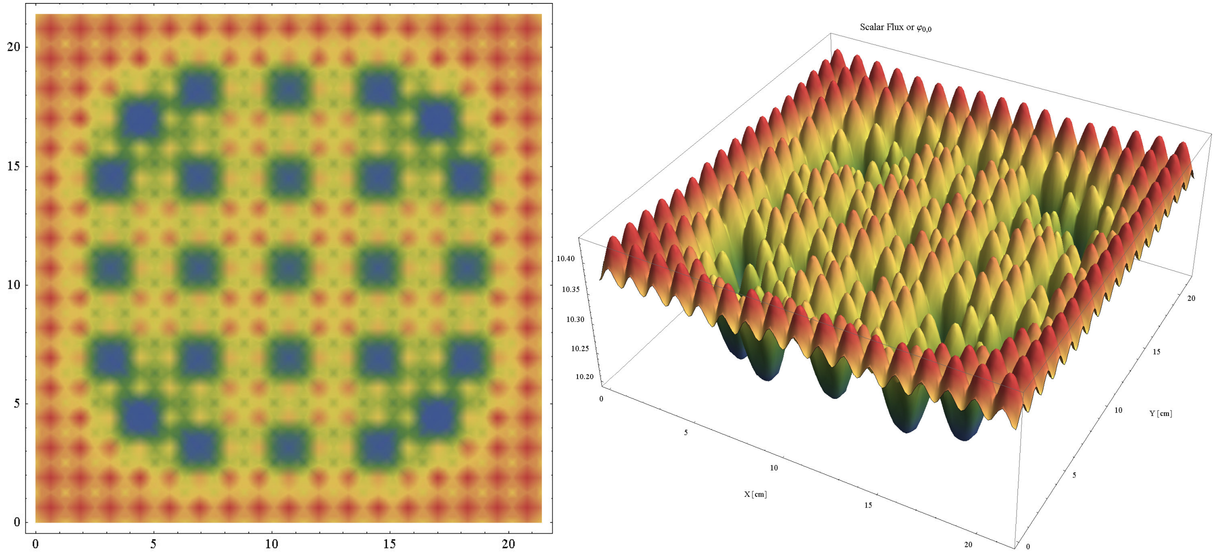
شکل ۲۷: بخشی از مش‌بندی مثلثی مجتمع سوخت UO_2 با تراکم ۴۰ المان در هر یاخته



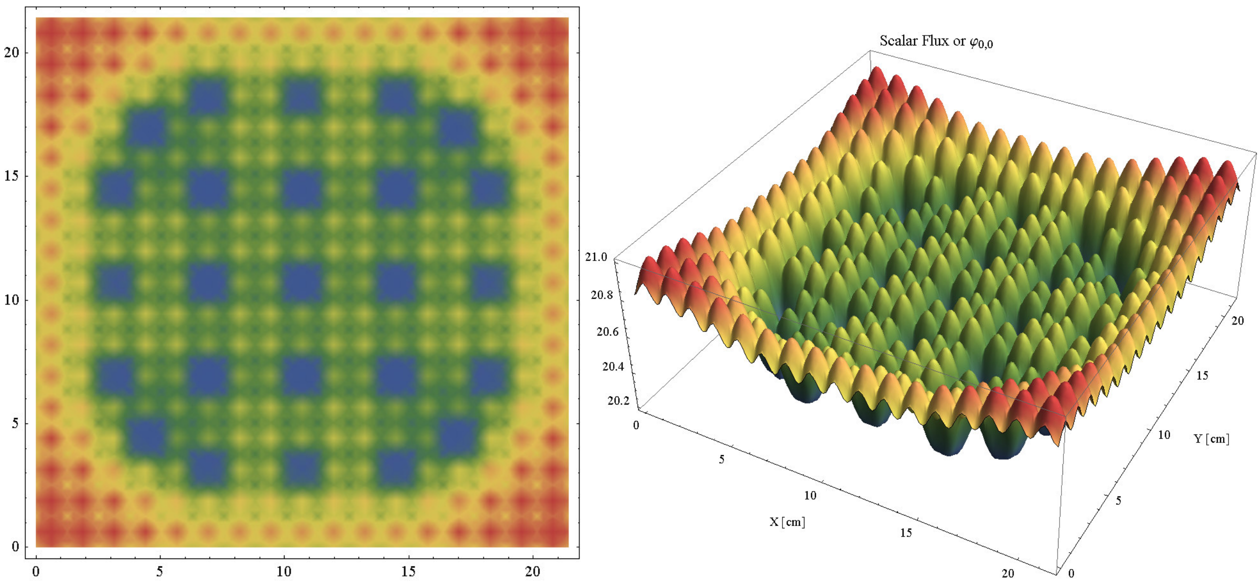
شکل ۲۸: بخشی از مش‌بندی مثلثی مجتمع سوخت UO_2 با تراکم ۲۴ المان در هر یاخته

جدول شماره ۱۸: نتایج محاسبات ضریب تکثیر بی نهایت برای مجتمع سوخت UO_2

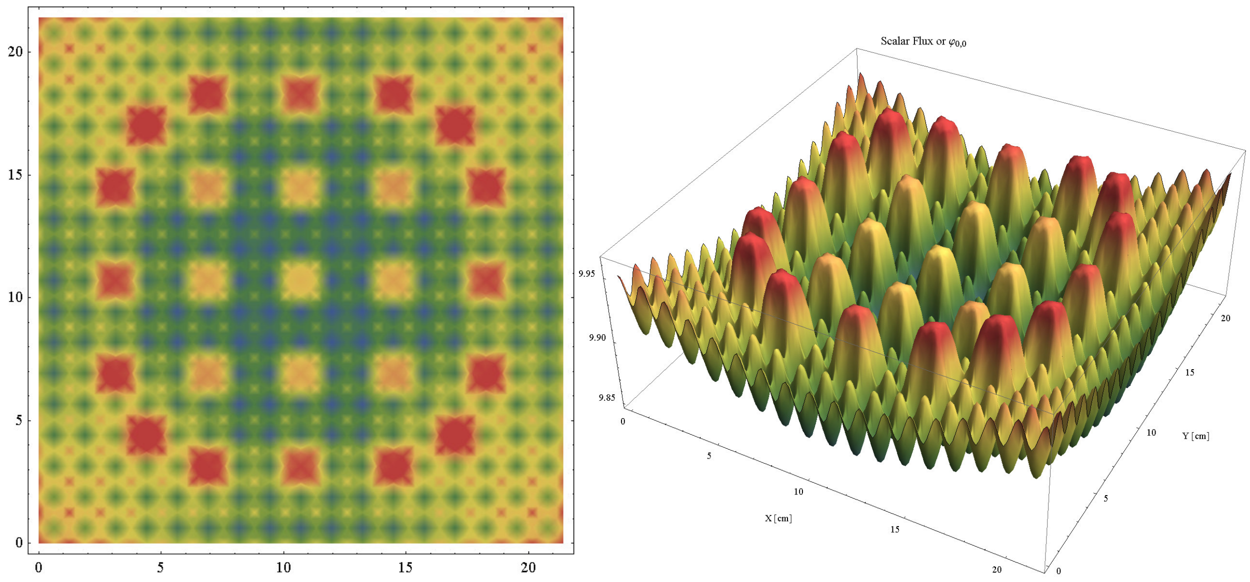
<table>
<tr><th>نوع المان</th><th>تعداد المان</th><th>P_1</th><th>P_3</th><th>مرجع [۶۷]</th><th>درصد خطا (P_3)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">مثلثی خطی</td><td>۶۹۳۶</td><td>۱/۳۵۳۸۴</td><td>۱/۳۴۹۷۱</td><td rowspan="4">۱/۳۳۳۴۲</td><td>۱/۲۲</td></tr>
<tr><td>۱۱۵۶۰</td><td>۱/۳۴۹۴۰</td><td>۱/۳۴۵۵۲</td><td>۰/۹۱</td></tr>
<tr><td rowspan="2">مثلثی درجه دو</td><td>۶۹۳۶</td><td>۱/۳۵۱۹۵</td><td>۱/۳۴۶۷۴</td><td>۰/۱۰</td></tr>
<tr><td>۱۱۵۶۰</td><td>۱/۳۴۸۰۶</td><td>۱/۳۴۳۳۱</td><td>۰/۰۷</td></tr>
</table>



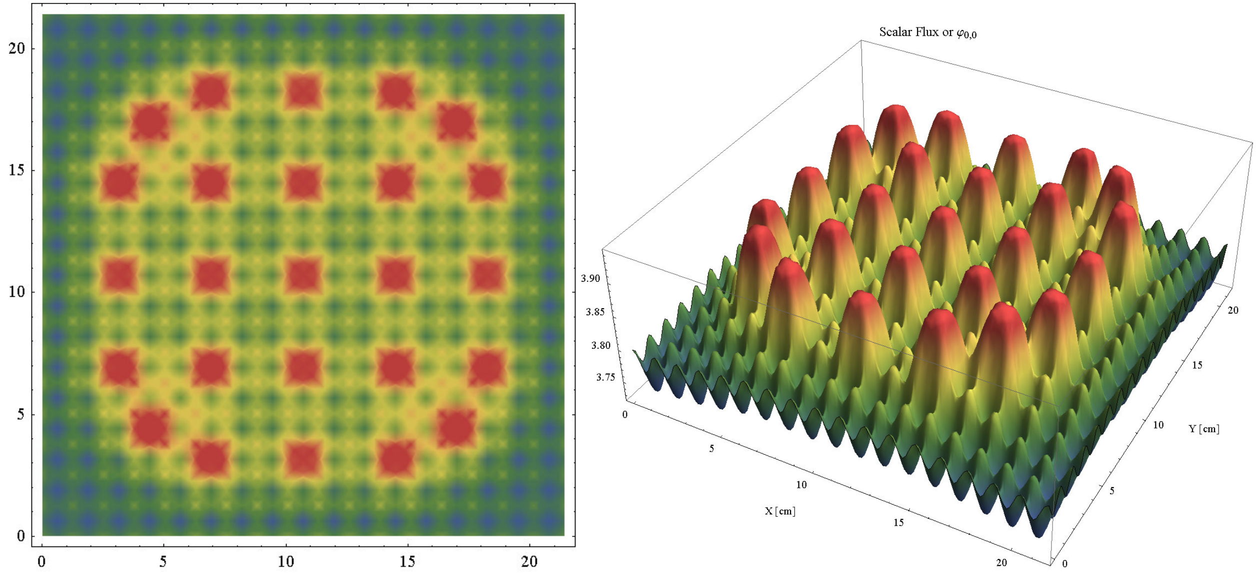
شکل ۲۹: تراز نسبی شار نرده‌ای گروه اول در مجتمع سوخت UO_2



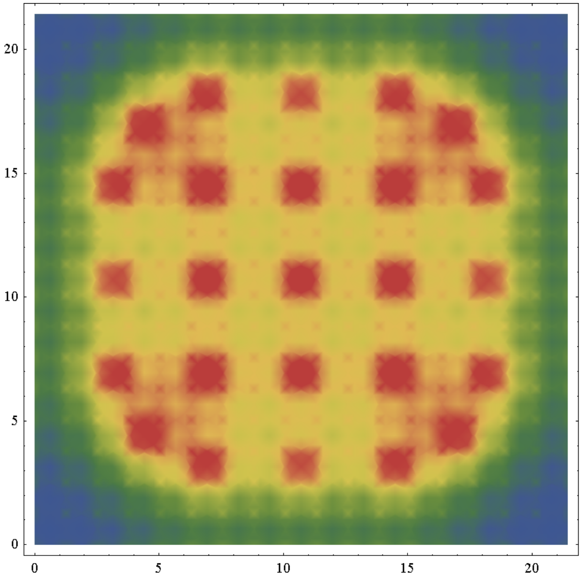
شکل ۳۰: تراز نسبی شار نرده‌ای گروه دوم در مجتمع سوخت UO_2

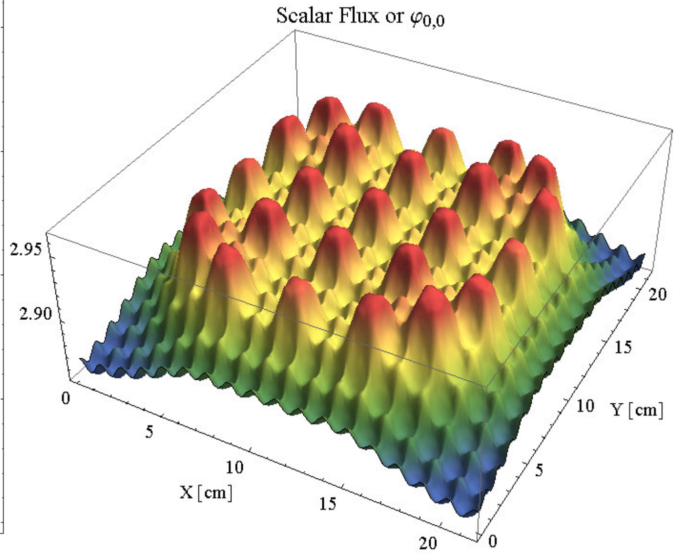


شکل ۳۱: تراز نسبی شار نرده‌ای گروه سوم در مجتمع سوخت UO_2

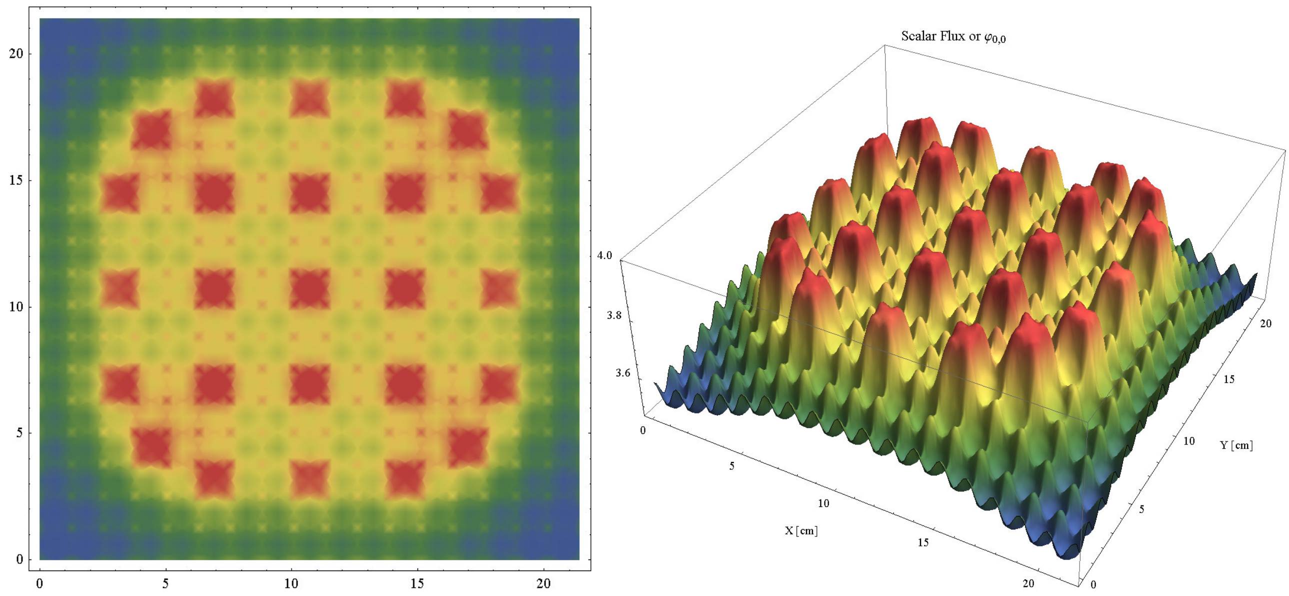


شکل ۳۲: تراز نسبی شار نرده‌ای گروه چهارم در مجتمع سوخت UO_2

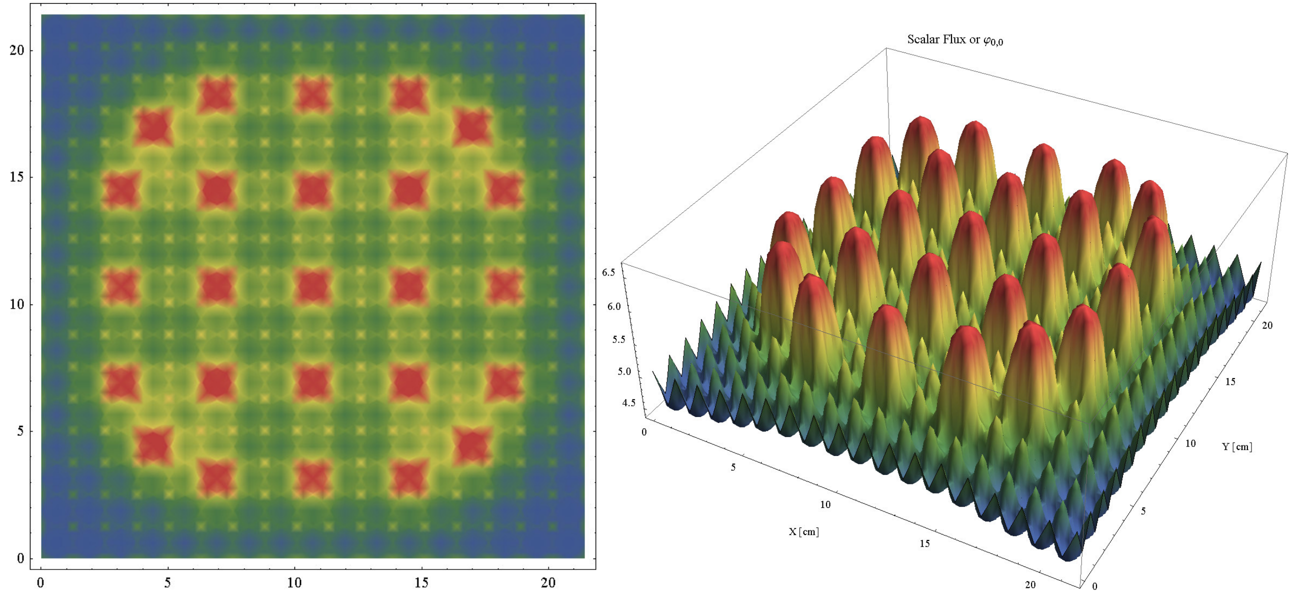




شکل ۳۳: تراز نسبی شار نرده‌ای گروه پنجم در مجتمع سوخت UO_2



شکل ۳۴: تراز نسبی شار نرده‌ای گروه ششم در مجتمع سوخت UO_2



شکل ۳۵: تراز نسبی شار نرده‌ای گروه هفتم در مجتمع سوخت UO_2

۹- نتیجه‌گیری

در این گزارش گسترش برنامه محاسباتی ENTRANS-2D به مختصات دو بعدی کارتزین بررسی شده و روابط آن استخراج گردید. علاوه بر آن حل تحلیلی انتگرال‌های به کار رفته در محاسبات (یاد شده در پیوست ح) نیز به تفصیل تشریح شده است. یک برنامه مرتبط نیز در محیط نرم‌افزار Mathematica تدوین گردید که با استفاده از قابلیت‌های ذخیره‌سازی ماتریس‌های تُنُک و امکان پردازش موازی تا حد زیادی بهینه شده است. نتایج این برنامه محاسباتی که در بخش هشتم برای محک‌های متعدد آورده شده نشان از دقت بالای محاسبات زوج‌پاره در بدست آوردن شار نوترون و ضریب تکثیر مؤثر نوترون‌ها دارد. همچنین نشان داده شد که می‌توان از مولد مش گمبیت به عنوان خوراک مناسبی برای توسعه کدهای محاسباتی به روش اجزای محدود استفاده نمود. توسعه این روش به سه بعد و گسترش دینامیکی آن می‌تواند محور پژوهش‌های آتی باشد.

۱۰- مراجع

1. Case K. M., Zweifel P. F., "Linear Transport Theory", Addison-Wesley Pub. Co., 1967.
2. Lewis E. E., Miller W. F. Jr., "Computational Methods of Neutron Transport", John Wiley & Sons Inc. 1984.
3. Henry A. F., "Nuclear-Reactor Analysis", MIT Press, 2nd printing, 1980.
4. Lamarsh J. R., "Introduction to Nuclear Reactor Theory", Addison-Wesley Pub. Co., 1972.
5. Davison B., "Neutron Transport Theory", Oxford University Press, 1958.
6. Mirza A. M., "Discontinuous Finite Element Formulation of the Neutron Transport Theory", PhD Thesis, Dept. Mech. Eng., University of London, U.K., 1994.
7. Balanchard P., Bruning E., "Variational Methods in Mathematical Physics, A Unified Approach", Springer-Verlag, 1992.
8. Stone M., Goldbart P., "Mathematics for Physics, A Guide Tour for Graduate Students", Cambridge University Press, 2009.

9. Kevorkian J., "Partial Differential Equations: Analytical Solution Techniques", Wadsworth /Brooks-Cole, 1990.
10. Ackroyd R. T., "Finite Element Methods for Particle Transport, application to reactor and radiation physics", Research Studies Press (John Wiley & Sons Inc.), 1997.
11. Nanneh M. M., "A Synthesis Method Based on Hybrid Principle for Finite Element Neutron Transport", PhD Thesis, Dept. Mech. Eng., University of London, U.K., April 1990.
12. Splawsky B. A., "Finite Element Methods for Neutron Transport Calculations", PhD Thesis, Dept. Mech. Eng., University of London, U.K., 1981.
13. Abuzid O. A. "Discontinuous Finite Element Solutions for Neutron Diffusion and Transport", PhD Thesis, Dept. Mech. Eng., University of London, U.K., 1994.
14. Sartori E., Azmy Y., "Nuclear Computational Sciences", (Ch. 2. Written by E. E. Lewis), Springer, 2010.
۱۵. ذوالفقاری، احمد. «حل معادله یک بعدی و چند گروهی ترابرد نوترون با استفاده از روش اجزای محدود وهارمونیک‌های کروی»، دانشکده مهندسی هسته ای، دانشگاه شهید بهشتی، (منتشر نشده).
16. Bell G. I., Glasstone S., "Nuclear Reactor Theory", Van Nostrand Reinhold Co., 1970.

17. Stacey W. M., "Variational Methods in Nuclear Reactor Physics", Academic Press, 1974.
18. Mirza A. M., Iqbal S., Rahman F., "A spatially adaptive grid-refinement approach for the finite element solution of the even-parity Boltzmann transport equation", Ann. Nucl. Energy, 34, pp. 600-613, 2007.
19. Williams M. M. R., Ackroyd R. T., "An Extended Variational Principle for an Albedo Boundary Condition", Ann. Nucl. Energy, 11, No. 6, pp. 296-273, 1984.
20. Shaukat Iqbal, "An Adaptive Finite Element Formulation of the Boltzmann-Type Neutron Transport Theory", PhD Thesis, Faculty of Computer Science & Engineering, Ghulam Ishaq Khan Institute of Engineering, Pakistan, 2007.
21. Agoshkov V. I. et al., "Methods for Solving Mathematical Physics Problems", Cambridge International Science Publishing, 2006.
22. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., "The Finite Element Method", vol. 1 (The Basis), 5th Ed., Butterworth-Heinemann, 2000.
23. Rao S. S., "The Finite Element Method in Engineering", 4th Ed., Elsevier Science & Technology, 2004.
24. Wikipedia, the Free Encyclopedia.

25. Li S., Liu W. K., "Mesh-free Particle Method", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
26. Chessa J., "Programming the FEM with Matlab", Northwestern University, (On-line), 2003.
27. Arfken G. B., Weber H. J., "Mathematical Methods for Physicists", 6th Ed., Elsevier Inc., 2005.
28. Duderstadt J. J., Martin W. R., "Transport Theory", John Wiley & Sons Inc. 1979.
29. *Magri F., "Variational Formulation for Every Linear Equation", Int'l J. Eng. Sci., 12, pp. 537-549, 1974.
30. *Ackroyd R. T., "Least Square Derivation of Extremum and Weighted Residual Methods for Equations of Reactor Physics", Ann. Nucl. Energy, 10, pp. 65-99, 1983.
31. R. T. Ackroyd, "A Finite Element Method For Neutron Transport – VII, Completely Boundary Free Maximum Principle for the First Order Boltzmann Equation", Ann. Nucl. Energy, 10, pp. 243-261, 1983.
32. *Ackroyd R. T., De Oliveira C. R. E., "A Maximum Principle for the Time-dependent Boltzmann Eq. for Neutron Transport as a Basis for Numerical Solution Conserving Neutron" Progress in Nucl. Energy, 30, pp. 417-465, 1996.

33. *Ackroyd R. T., Nanneh M. M., "Upper and lower bounds for disadvantage factors as a rest of an algorithm used in synthesis method", Ann. Nucl. Energy, 15, pp. 241-259, 1988.
34. *Ackroyd R. T., B. A. Splawsky, "A finite element method for Neutron transport: Upper and lower bounds for local characteristics of solutions", Ann. Nucl. Energy, 17, pp. 603-634, 1982.
35. Vladimirov V. S., "Mathematical problems in the one-velocity theory of particle transport", Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni V. A. Steklova, Vol. 61, 1961., (English translation: Atomic Energy of Canada Limited, AECL. 1661, Chalk River, Ontario, 1963.

به دلیل قدمت، دسترسی به متن ترجمه شده مرجع [۳۵] دشوار بوده، لکن متن زبان اصلی (روسی) این کتابچه ی بسیار ارجاع داده شده و بنیادی، از طریق پایگاه اینترنتی زیر قابل دریافت است:

http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=tm&paperid=1576&option_lang=eng

36. De Oliveira C. R. E., "An arbitrary geometry finite element method for multi-group neutron transport with anisotropic scattering", Prog. Nucl. Energy, 18, pp.251-264, 1986.

37. *Ackroyd R. T., "Finite element methods for neutron Transport based on maximum and minimum principle for discontinuous trial functions", Ann. Nucl. Energy, 19, pp. 565-592, 1992.
38. *Kaplan S., Davis J. A., "Canonical and Involutory Transformation of the Variational Problems of Transport Theory", Nucl. Sci. Eng. 28, pp. 166-176, 1967.
39. *Lewis E. E., "Finite element approximation to the even-parity transport equation", Adv. Nucl. Sci. Tech., 13, pp. 155-225, Plenum Press, N.Y., 1981.
40. *Fletcher J. K., "The Solution of the Multi-group Neutron Transport Equation Using Spherical Harmonics", Nucl. Sci. Eng. 116:73, 1994.
41. Zolfaghari Daryani, A. R. “Multi-dimensional Finite Element Modeling of Thermal Radiation in Participating Media”, PhD Thesis, Dept. Mech. Eng., University of London, U.K., 1998.
42. Williams M. M. R., Wood J., “A Transport Theory Calculation of Neutron Flux, Disadvantage Factors and Effective Diffusion Coefficients in Square Cells and Slabs”, J. Nucl. Energy, 22, pp. 141-162, Pergamon Press, 1972.
43. De Oliveira C. R. E., Wood J., “A Multi-group Finite Element Solution of Neutron Transport Equation-I, (XY Geometry)”, Ann. Nucl. Energy, Vol. 11, No. 5, pp. 229-243, 1984.

44. Ackroyd, R. T. et al., “A Finite Element Method for Neutron Transport, Part IV: A Comparison of Some Finite Element Solutions of Two group Benchmark Problems with Conventional Solutions”, Ann. Nucl. Energy, Vol. 7, pp. 335-349, 1980.
45. Yilmazer, A., “Jacobi Polynomials Approximation to the One-speed Neutron Transport Equation”, Ann. Nucl. Energy, Vol. 34, pp. 977-991, 2007.
46. De Oliveira C. R. E., “Finite Element Techniques for Multi-group Neutron Transport Equation with Anisotropic Scattering”, PhD Thesis, Dept. Mech. Eng., University of London, U.K., 1987.
47. Capilla M. et al, “A nodal collocation approximation for the multi-dimensional P_L equations–2D applications”, Ann. Nucl. Energy, Vol. 35, pp. 1820–1830, 2008.
48. Sood. A et al, “Analytical Benchmark Test Set for Criticality Code Verification”, Prog. Nucl. Energy, Vol. 42, No. 1, pp. 55-106, 2003.
49. JEFF Report 16, “Intercomparison of Calculations for Godiva and Jezebel”, OECD, 1999.
50. “ANL-5800, Reactor Physics Constants”, 2^{nd} Ed., Argonne National Laboratory, 1963.
51. Berry, R. M., “The Inverse Power Method for Multiplication Factors in the Neutron Transport Equation”, MSc Thesis in Mathematics, Texas Tech University, USA, May 2001.

52. Pattnaik A., “Parallel Performance Analysis of the Finite Element-Spherical Harmonics Radiation Transport Method”, MSc Thesis, Dept. Nucl. Eng., Georgia Institute of Technology, Dec 2006.
53. OECD, “Benchmark on Deterministic Transport Calculations without Spatial Homogenization- A 2D/3D MOX Fuel Assembly Benchmark”, NEA/NSC/DOC(2003)16, ISBN: 92-64-02139-6, 2003.
54. Bru R. et al, “Iterative Schemes for the Neutron Diffusion Equation”, Comp. & Math. with App. 44, pp. 1307-1323, 2002.
55. Scheben F., “Iterative Methods for Criticality Computations in Neutron Transport Theory”, PhD Thesis, Dept. Math. Sci., The University of Bath, Jan. 2011.
56. Urbatsch T. J., “Iterative Acceleration Methods for Monte Carlo and Deterministic Criticality Calculations”, PhD Thesis, Dept. of Nucl. Eng. & Sci. Comp., The University of Michigan, (Documented at Los Alamos: LA-13052-T), 1995.
57. Adams M. L. et al, “Fast Iterative Methods for Discrete Ordinates Particle Transport Calculations”, Prog. Nucl. Energy. Vol. 40. No. I. pp. 3-159. 2002.
58. Martin W. J., “Non-Linear Acceleration Methods for Even-Parity Neutron Transport”, MSc Thesis, Dept. Nucl. Eng., The University of New Mexico, May 2010.

59. Damian J. I. M., “Multi-level Acceleration of Neutron Transport Calculations”, MSc Thesis, Dept. Mech. Eng., Georgia Institute of Technology, Dec. 2007.
60. Al Assar R. S., Mavromatis H. A., “A Generalized Formula for the Integral of Three Associated Legendre Polynomials”, App. Math. Letts. 12, pp. 101-105, 1999.
61. Mavromatis H. A., “A single-sum expression for the overlap integral of two associated Legendre polynomials”, J. Phys. A: Math. Gen. 32, pp. 2601–2603, 1999.
62. Dong S. H, Lemus R., “The Overlap Integral of Three Associated Legendre Polynomials”, App. Math. Letts. 15, pp. 541-546, 2002.
63. Wei L., “Unified approach for exact calculation of angular momentum coupling and recoupling coefficients”, Comp. Phys. Communications, 120, pp. 222-230, 1999.
64. Qichang C. et al, “Auto MOC - A 2D neutron transport code for arbitrary geometry based on the method of characteristics and customization of AutoCAD”, Nucl. Eng. & Des. 238, pp. 2828–2833, 2008.
65. Go Chiba, “Application of the hierarchical domain decomposition boundary element method to the simplified P3 equation”, Ann. Nucl. Energy, doi:10.1016/j.anucene.2011.01.01 1, 2011.
66. Chai X. M. et al., “The Linear Source Approximation In Three Dimension Characteristic Method ”, Int’l Conf. on Math., Computational Methods & Reactor Physics (M&C 2009).

۶۷. صدیقی، مصطفی. «بهینه‌سازی سوخت نیروگاه اتمی بوشهر با استفاده از شبکه عصبی»، پایان نامه دکتری، دانشکده مهندسی انرژی، دانشگاه صنعتی شریف، ایران، ۱۳۷۴.
۶۸. یوسفی، مصطفی. «رهیافت وردشی در ترابرد نوترون»، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی هسته ای، دانشگاه شهید بهشتی، ایران، بهمن ۱۳۸۹.
۶۹. یوسفی، مصطفی. «توسعه کد نوترونی ENTRANS-2D در مختصات یک بعدی (تخت، کروی و استوانه‌ای)»، شرکت سورنا، کد مدرک: ANC-RPT-TED-PN-100
۷۰. یوسفی، مصطفی. «گسترش کد نوترونی ENTRANS-2D به مختصات دو بعدی کارتزین»، شرکت سورنا، کد مدرک: ANC-RPT-TED-PN-200.

*****

توضیح: مراجعی که با علامت ❋ مشخص شده اند، در دسترس نویسنده نبوده ولی در بسیاری از نوشتجات به آنان اشاره شده و مراجعه به آنان مفید به نظر می‌رسد.