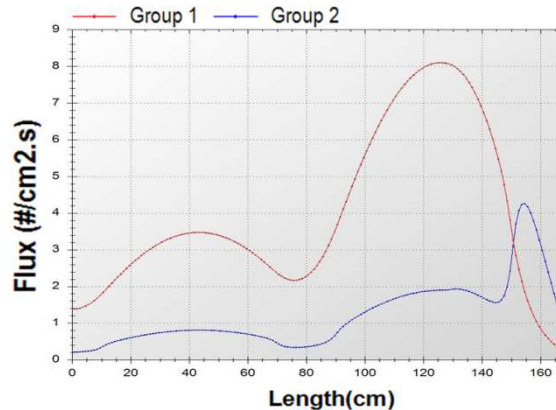


## کد محاسباتی یک بعدی پخش نوترون به روش المان محدود مربعات تعمیم یافته



### گزارش فنی GELES-1D

بسته هشتم - ویرایش ۰ - آبان ۱۳۹۲

ANC-TEC-DES-FL-100

## فهرست مطالب

- ۱- چکیده ..... ۹
- ۲- کلیدواژه ..... ۱۰
- ۳- اختصارات ..... ۱۰
- ۴- مقدمه ..... ۱۱
- ۵- دامنه گزارش ..... ۱۶
- ۶- معادله پخش و شرایط مرزی حاکم بر آن ..... ۱۷

۷- معرفی روش حداقل مربعات تعمیم یافته..... ۲۱

۸- استخراج اصل وردشی بیشینه برای حل معادله پخش..... ۲۴

۹- بیشینه کردن اصل وردشی کلاسیک به روش المان محدود..... ۳۳

۱۰- الگوریتم‌های حل عددی معادله پخش چند گروهی..... ۵۴

۱۱- راستی‌آزمایی نتایج عددی..... ۷۱

۱۲- نتیجه‌گیری..... ۱۰۴

۱۳- مراجع..... ۱۰۵

## لیست شکل‌ها

- شکل ۱: سیستم دو ناحیه‌ای ..... ۱۹
- شکل ۲: المان یک بعدی ..... ۳۶
- شکل ۳: توابع شکلی ..... ۳۹
- شکل ۴: شکل نمایشی سرهم‌بندی المان‌ها ..... ۵۰
- شکل ۵: نمودار گردشی روش قدرت برای محاسبه ضریب تکثیر مؤثر نوترونی ..... ۵۸
- شکل ۶: المان درجه دوم در روش المان محدود ..... ۶۸
- شکل ۷: نحوه سرهم‌بندی المان‌های درجه دوم ..... ۷۰
- شکل ۸: مقایسه شار نوترون بدست آمده از کد GELES با مقادیر تحلیلی برای تیغه ..... ۷۴
- شکل ۹: نمودار درصد خطا در نتایج بدست آمده از کد GELES در مقایسه با پاسخ تحلیلی برای تیغه ..... ۷۵

- شکل ۱۰: نمودار درصد خطا در نتایج بدست آمده از کد GELES در مقایسه با پاسخ تحلیلی برای کره ..... ۷۷
- شکل ۱۱: نمودار درصد خطا در نتایج بدست آمده از کد GELES در مقایسه با پاسخ تحلیلی برای استوانه ..... ۷۸
- شکل ۱۲: شکل هندسی راکتور دو ناحیه‌ای ..... ۸۳
- شکل ۱۳: مقدار شار نرمالیزه شده سریع برای راکتور دو ناحیه‌ای ..... ۸۶
- شکل ۱۴: مقدار شار نرمالیزه شده حرارتی برای راکتور دو ناحیه‌ای ..... ۸۷
- شکل ۱۵: درصد خطای نسبی شار سریع در مقایسه با نتایج کد CITATION ..... ۹۰
- شکل ۱۶: درصد خطای نسبی شار حرارتی در مقایسه با نتایج کد CITATION ..... ۹۱
- شکل ۱۷: مقدار شار نرمالیزه شده سریع و حرارتی برای راکتور چند ناحیه‌ای ..... ۹۵
- شکل ۱۸: نمودار مقادیر ریشه میانگین مربعات خطا بر حسب تعداد المان‌ها (المان خطی) ..... ۹۹
- شکل ۱۹: نمودار مقادیر ریشه میانگین مربعات خطا بر حسب تعداد المان‌ها (المان درجه دوم) ..... ۱۰۰

شکل ۲۰: نمودار محاسبه درجه همگرایی (المان خطی)..... ۱۰۲

شکل ۲۱: نمودار محاسبه درجه همگرایی (المان درجه دوم)..... ۱۰۳

## لیست جدول‌ها

- جدول شماره ۱: مقادیر ثابت برون‌یابی برای شرایط مرزی مختلف..... ۴۵
- جدول شماره ۲: انتگرال‌های مکانی برای حالت تیغه یک بعدی..... ۴۶
- جدول شماره ۳: انتگرال‌های مکانی برای حالت کروی یک بعدی..... ۵۲
- جدول شماره ۴: انتگرال‌های مکانی برای حالت استوانه‌ای یک بعدی..... ۵۳
- جدول شماره ۵: مقایسه مقدار ضریب تکثیر مؤثر محاسبه شده با پاسخ تحلیلی..... ۸۱
- جدول شماره ۶: سطح مقاطع و ضرایب پخش مربوط به راکتور دو ناحیه‌ای..... ۸۴
- جدول شماره ۷: مقایسه ضریب تکثیر مؤثر محاسبه شده با نتیجه کد CITATION برای راکتور دو ناحیه‌ای..... ۸۸
- جدول شماره ۸: ضریب تکثیر محاسبه شده برای راکتور دو ناحیه‌ای با احتساب اثر پراکندگی رو به بالا..... ۹۲
- جدول شماره ۹: ضرایب پخش و سطح مقاطع مربوط به راکتور چند ناحیه‌ای و دو گروهی..... ۹۴

جدول شماره ۱۰: مقایسه ضریب تکثیر محاسبه شده برای راکتور چند ناحیه‌ای ..... ۹۶



## ۱- چکیده

در این پروژه، هدف معرفی یک اصل بیشینه با استفاده از روش حداقل مربعات تعمیم یافته جهت حل عددی معادله پخش نوترون در هندسه‌های یک بعدی می‌باشد. در ابتدا مروری بر تاریخچه اصول وردشی انجام گرفته و سپس به معرفی اصل وردشی بیشینه که با این روش بدست آمده، پرداخته می‌شود. در ادامه به استخراج معادلات و تهیه الگوریتم برنامه با استفاده از این اصل وردشی برای حل عددی معادله پخش نوترون در یک بعد پرداخته می‌شود و در نهایت نتایج حاصل از این روش راستی‌آزمایی می‌شود.

## ۲- کلیدواژه

روش المان محدود مربعات تعمیم یافته، ضریب تکثیر مؤثر نوترونی، شار نوترونی.

## ۳- اختصارات

توضیح	عبارت اختصاری	عبارت
روش المان محدود	FEM	Finite Element Method
نام کد محاسباتی به روش المان محدود مربعات تعمیم یافته	GELES	<u>Generalized</u> <u>Least Squares</u>

## ۴- مقدمه

در بسیاری از مسائل فیزیکی با توجه به قیود وضع شده بر سیستم، متغیرها (طول، جرم، سرعت و ...) به گونه‌ای خود را مرتب می‌کنند که یک تابعی<sup>۱</sup> ناشی از طبیعت مسئله به طور خودکار کمینه و یا بیشینه شود. این تابع را ژوزف لویی لاگرانژ در سال ۱۷۸۸ در کتاب خود تحت عنوان مکانیک تحلیلی معرفی کرده و نشان داد که بسیاری از مسائل مطرح در مکانیک کلاسیک را می‌توان تحت عنوان یک اصل وردشی خلاصه نمود: «اصل کمترین کنش». در همین راستا وی تابع لاگرانژ  $\mathcal{L} \equiv T - U$  را معرفی نمود که در آن  $T$  انرژی جنبشی و  $U$  انرژی پتانسیل سیستم است.

---

<sup>1</sup> Functional

لاگرانژ نشان داد که اگر  $\mathcal{L}$  به صورت تابعی از زمان، مختصات تعمیم یافته  $q_i$  و مشتقات زمانی آن‌ها  $\dot{q}_i$  باشد یعنی  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, q_i, \dot{q}_i)$ ، آنگاه معادله رابطه مشهور  $F = ma$  برای هر ذره مورد بحث در سیستم را می‌توان از طریق معادله اویلر-لاگرانژ زیر تحصیل نمود:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (۱-۴)$$

این معادله ناشی از آن است که طبیعت، کنش زمانی تابع لاگرانژ را برای هر سیستم مکانیکی کمینه یا بیشینه می‌کند و لذا «تابعی کنش<sup>۱</sup>» که به صورت:

---

<sup>۱</sup> Action Functional

$$S[q] \equiv \int_0^t \mathcal{L}(t, q_i, \dot{q}_i) dt \quad (۲-۴)$$

تعریف می‌شود، وابستگی لاگرانژی  $\mathcal{L}$  را به زمان، مختصات  $q_i$  و مشتقات زمانی  $\dot{q}_i$  به گونه‌ای تنظیم می‌کند که کمترین یا بیشترین کنش ممکن رخ دهد.

مشابه این مطلب در فیزیک راکتور نیز صادق است و در واقع با توجه به هندسه راکتور، شرایط مرزی و اولیه و نیز مکان چشمه در راکتور، شکل شار نوترون در آن به گونه‌ای سامان می‌یابد که نوعی از اصل کمترین کنش در آن رعایت شود. تابعی لازم برای یک سامانه مستقل از زمان، روی حجم و سطوح در برگیرنده آن تعریف می‌شود [۱]. به طور کلی هنگامی که تابعی سیستم حاوی مشتقاتی از مرتبه  $m$  است، معادله اوپلر- لاگرانژ حاصل از مرتبه  $۲m$  خواهد بود. بنابراین استفاده از معادلات کلاسیک اوپلر- لاگرانژ تنها هنگامی میسر است، که یک معادله پخش از درجه دوم وجود داشته باشد. اکروید در سال ۱۹۸۳ پس از آنکه ماگری [۲] در سال ۱۹۷۴ اثبات نمود که برای هر معادله خطی یک اصل

وردشی وجود دارد، طی مقاله‌هایی برای معادله پخش در حالت پایا یک اصل وردشی ارائه نمود و سپس در تمام دهه هشتاد و نود میلادی اکروید به کمک شاگردان خویش و نیز سایرین به طور جداگانه، اصول وردشی متعددی را برای حل معادلات ترابرد و پخش نوترون معرفی کردند که ویژگی اکثر آنها عدم نیاز به ارضای شرایط مرزی برای یافتن تابع شار نوترون است.

در برخی از این اصول تنها لازم است که تابع آزمون<sup>۱</sup> بکار رفته پیوسته قطعه‌ای بوده، بدان معنی که روی عناصر فضا پیوسته بوده در حالی که در برخی دیگر از اصول تعمیم یافته، ارضای همین شرط نیز ضرورت ندارد. در این اصل وردشی شار نوترون با یک تابع آزمون معرفی می‌شود. نیاز به اعمال هیچ شرط مرزی بر این تابع آزمون نمی‌باشد و فقط باید تابع آزمون پیوستگی خود را حفظ نماید [۱]. یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های این اصل رعایت اصل بقای نوترون برای هر نوع المان و هندسه‌ای می‌باشد. در تبیین این اصل از بعضی خواص فضای هیلبرت استفاده شده است که در بعضی از

---

<sup>1</sup> trial function

کتاب‌های ریاضی کاربردی [۳، ۴ و ۵] به آنها اشاره شده است. در ایده اولیه این روش یک بردار آزمون برای جریان خالص روی مرز المان و یک تابع آزمون برای توزیع شار نوترون داخل المان در نظر گرفته می‌شود. به جای حل معادله پخش، معادله بالانس نوترونی حل می‌گردد که در نهایت منجر به رعایت اصل بقای نوترون می‌گردد.

در حالت عمومی یک حل تقریبی برای زوج کمیت‌های شار و جریان ارائه می‌شود که در اینجا با سه نوع تقریب مواجه خواهیم شد:

تقریب کلاسیک: به دنبال محاسبه مقدار شار می‌باشد در صورتی که شار در مرزهای داخلی پیوسته باشد.

تقریب تکمیلی<sup>۱</sup>: به دنبال محاسبه مقدار جریان می‌باشد در صورتی که جریان در مرزهای داخلی پیوسته باشد.

---

<sup>1</sup> Complementary App.

تقریب هیبرید<sup>۱</sup>: به دنبال محاسبه مقدار شار و جریان می‌باشد در صورتی که شار و جریان هر دو در مرزهای داخلی پیوسته باشد.

همانطور که مشاهده می‌شود تقریب کلاسیک منجر به حل معادله پخش می‌گردد که در قسمت بعد به آن پرداخته می‌شود.

## ۵- دامنه گزارش

نرم‌افزار GELES-1D می‌تواند برای حل معادله پخش نوترون چند گروهی در هندسه تیغه‌ای یک بعدی به کار برده شود. در این گزارش، نتایج بدست آمده برای مسائل آزمون با مقادیر محاسبه شده از روش تحلیلی یا کدهای دیگر مقایسه شده و صحت محاسبات انجام شده تأیید می‌شود. محاسبات می‌تواند برای معادله پخش نوترون چند گروهی

---

<sup>1</sup> Hybrid App.



انجام شود و هیچ نوع محدودیتی برای در نظر گرفتن پراکندگی از گروه‌های انرژی پایین به گروه‌های انرژی بالا وجود ندارد.

### ۶- معادله پخش و شرایط مرزی حاکم بر آن

برای راحتی کار ابتدا سیستم را دو ناحیه‌ای در نظر گرفته که چشمه حجمی  $S(r)$  بطور یکنواخت در آن توزیع شده است. در ادامه می‌توان روش را به چند ناحیه‌ای تعمیم داد. شار  $(\varphi)$  و جریان  $(J)$  نوترونی زوج معادلات زیر را برآورده می‌کنند.

$$\nabla \cdot J + \sigma_a \varphi(r) = S(r) \quad (۱-۶)$$

$$J = -D \nabla \varphi(r) \quad (۲-۶)$$

در معادلات بالا،  $D$  ضریب پخش و  $\sigma_a$  سطح مقطع جذب است که باید در هر ناحیه مثبت و پیوسته باشند. معادله (۶-۱) به معادله بالانس نوترونی<sup>۱</sup> و معادله (۶-۲) به قانون فیک<sup>۲</sup>، معروف می‌باشند.

با جایگذاری رابطه (۶-۲) در رابطه (۶-۱) به معادله پخش می‌رسیم.

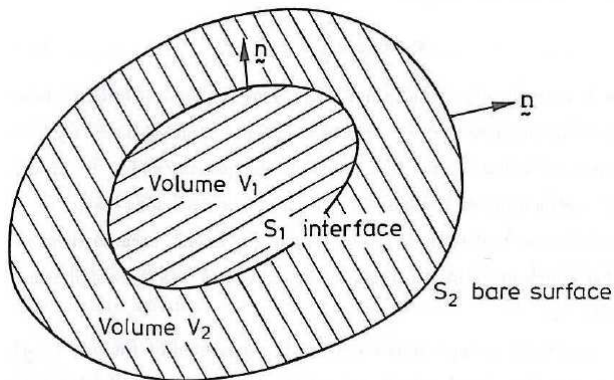
$$-D\nabla^2\phi + \sigma_a\phi = S \quad (۶-۳)$$

با توجه به شکل ۱، سیستم مورد نظر از دو ناحیه با حجم‌های  $V_1$  و  $V_2$  تشکیل شده که توسط سطح‌های  $S_1$  و  $S_2$  محصور شده‌اند و مرز بیرونی برهنه می‌باشد.

---

<sup>1</sup> neutron balance equation

<sup>2</sup> Fick's Law



شکل ۱: سیستم دو ناحیه‌ای

در مرزهای داخلی شرط پیوستگی شار و جریان و در مرز خارجی  $S_2$  شرط مرز برهنه که همان جریان ورودی صفر می‌باشد، برقرار است و به صورت زیر اعمال می‌گردد:

$$\varphi(r_s) - \alpha^2 n \cdot J = 0 \quad (۴-۶)$$

$n$  بردار عمود بر سطح  $S_2$  و  $\varphi$  و  $J$  مقادیر شار و جریان روی مرز خارجی می‌باشند.

معادله (۴-۶) را می‌توان به شکل  $J_n = \frac{\varphi}{\alpha^2}$  نوشت و با توجه به اینکه در تقریب پخش شرط مرزی برهنه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\varphi}{4} + \frac{D}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (۵-۶)$$

مقدار  $\alpha^2 = 2$  بدست می‌آید و در تقریبی بهتر که از معادله برابر حاصل می‌شود مقدار  $\alpha^2 = 2/1313$  حاصل می‌گردد و برای اینکه مقدار شار روی مرز صفر شود باید  $\alpha^2 \rightarrow 0$  میل کند و برای اعمال شرط مرزی بازتابنده کامل  $\alpha^2 \rightarrow \infty$  میل کند.

در حالت کلی یک زوج جواب تقریبی  $\{\varphi, J\}$  برای حل این معادلات در نظر گرفته می‌شود. تقریب کلاسیک هنگامی حاصل می‌شود که مقدار  $\varphi$  روی مرزهای داخلی هر ناحیه پیوسته باشد.

زمانی می‌توان از تقریب‌ها مطمئن شد که میزان خطا برآورده شود. روش حداقل مربعات تعمیم یافته مقدار خطا روی هر المان را برآورد کرده و مقدار آن را به سمت صفر میل می‌دهد.

### ۷- معرفی روش حداقل مربعات تعمیم یافته

اگر جواب دقیق حل معادله بالانس  $\{\varphi_0, J_0\}$  باشد با در نظر گرفتن یک جواب تقریبی مانند  $\{\varphi, J\}$  معادله بالانس (۶-۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\nabla \cdot J + \sigma_a \varphi = S + R \quad (1-7)$$

که R مقدار باقی مانده ناشی از تقریب بکار گرفته شده برای حل معادله پخش می باشد و مانند یک چشمه برای جبران مقدار خطا در مقدار جذب و فرار در سمت راست ظاهر می شود. برای استفاده از خواص فضای هیلبرت باید نوع ارتباط بین این فضا و اصول وردشی مشخص گردد. ارتباط بین اصول وردشی کلاسیک و ضرب اسکالر در فضای هیلبرت توسط مک کانل [۶] بیان گردید.

در فضای هیلبرت ضرب اسکالر دو بردار دلخواه  $\varphi_1$ ،  $\varphi_2$  به صورت زیر مشخص می شود:

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \int_V \{ (R_1 A R_1) + (R_2 B R_2) \} dV \quad (۲-۷)$$

$$+ \int_{S_1} \{ w[\varphi_1]_{r=0}^{r+0} \times [\varphi_2]_{r=0}^{r+0} + w'[J_1]_{r=0}^{r+0} \times [J_2]_{r=0}^{r+0} \} dS$$

$$+ \int_{S_2} w[\varphi_1 - \alpha^2 n \cdot J_1][\varphi_2 - \alpha^2 n \cdot J_2] dS$$

و برای سیستمی شامل چند ناحیه متفاوت ضرب اسکالر دو بردار به صورت زیر می باشد:

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \int_V \{ (R_1 A R_1) + (R_2 B R_2) \} dV \quad (3-7)$$

$$+ \int_{U(s_i \cap s_j)} \{ w[\varphi_1]_{rj}^{ri} \times [\varphi_2]_{rj}^{ri} + w'[J_1]_{rj}^{ri} \times [J_2]_{rj}^{ri} \} dS$$

$$+ \int_{s_b} w[\varphi_1 - \alpha^2 n \cdot J_1][\varphi_2 - \alpha^2 n \cdot J_2] dS$$

A و B عملگرهای مثبت قطعی و خودالحاق هستند و W یک ضریب دلخواه می باشد. در روابط بالا جمله اول مربوط به مقدار خطای حاصل در حجم، جمله دوم مربوط به خطای حاصل از عدم ارضاء شرط پیوستگی شار و جریان در مرزهای داخلی و جمله سوم مربوط به خطای حاصل از عدم ارضاء شرط مرز برهنه در مرزهای خارجی می باشد.

در روش حداقل مربعات تعمیم یافته کافیست این دو بردار دلخواه را بردار مقدار خطا قرار داد [۷] و با استفاده از خاصیت ضرب اسکالر دو بردار در فضای هیلبرت در نهایت می توان به یک اصل وردشی رسید که منجر به حل معادله مورد نظر می شود. نتایج (۲-۷) و (۳-۷) نمونه ای از ارتباط بین اصول وردشی برای معادله پخش با خواص فضای هیلبرت می باشد.

### ۸- استخراج اصل وردشی پیشینه برای حل معادله پخش

اگر بردار تقریب  $\Phi$  مجموعه ای شامل دو زوج مقدار شار و جریان در نظر گرفته شود یعنی  $\{\varphi, J\} \leftrightarrow \Phi$  در این صورت می توان بردار مربعات خطا را به صورت زیر تعریف نمود:

$$H(\varphi, J) = (\Phi - \Phi_0)^2 = \{(\varphi - \varphi_0)^2, (J - J_0)^2\} \quad (۱-۸)$$



اگر بردار جواب‌های دقیق  $\{\Phi_0, J_0\}$   $\leftrightarrow \Phi_0$  باشد سه بردار دیگر می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$\begin{cases} \Phi' \leftrightarrow \{\varphi, 0\} \\ \Phi'_0 \leftrightarrow \{\varphi_0, 0\} \\ \tilde{\Phi} \leftrightarrow \{\varphi, J_0\} \end{cases} \quad (2-8)$$

که رابطه زیر بین آنها برقرار است:

$$\tilde{\Phi} - \Phi_0 = \Phi' - \Phi'_0 \quad (3-8)$$

$(\Phi' - \Phi'_0)^2$  مقدار مربع خطا در تساوی زیر می‌باشد:

$$(\Phi' - \Phi'_0)^2 = (\Phi'_0)^2 + (\Phi')^2 - 2\Phi'_0 \cdot \Phi' \quad (4-8)$$

با توجه به رابطه (۲-۸) می‌توان رابطه زیر را برای جمله اول سمت راست تساوی فوق نوشت:

$$(\Phi'_0)^2 = \int_V [(\sigma_a \varphi_0 A \sigma_a \varphi_0) + (D \nabla \varphi_0 B D \nabla \varphi_0)] dV + \int_{S_2} w \varphi_0^2 dS \quad (۵-۸)$$

در بدست آوردن رابطه فوق مقدار  $J=0$  فرض شده است. همچنین با توجه به پیوستگی شار روی مرزهای داخلی جمله دوم در رابطه (۲-۸) به صفر میل می‌کند. همانطور که مشاهده می‌شود با توجه به معلوم بودن مقدار  $\varphi_0$  و خصوصیات مثبت قطعی و خودالحاق عملگرهای A و B رابطه (۵-۸) دارای یک مقدار مثبت و معلوم است.

با همین روش می‌توان برای جمله دوم و سوم تساوی (۴-۸) عبارات زیر را نوشت:

$$(\Phi)^2 = \int_V [(\sigma_a \varphi A \sigma_a \varphi) + (D \nabla \varphi B D \nabla \varphi)] dV \quad (۶-۸)$$

$$+ \int_{S_1} [\varphi n \cdot \varphi]_{r=0}^{r+0} + \int_{S_2} w \varphi^2 dS$$

$$\Phi'_0 \cdot \Phi' = \int_V [(\sigma_a \varphi_0 A \sigma_a \varphi) + (D \nabla \varphi_0 B D \nabla \varphi)] dV \quad (7-8)$$

$$+ \int_{S_1} [\varphi n \cdot \varphi_0]_{r=0}^{r+0} + \int_{S_2} w \varphi \varphi_0 dS$$

با توجه به معادله بالانس مقدار نرخ جذب را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_a \varphi_0 = S - \nabla \cdot J_0 \quad (8-8)$$

با جایگذاری رابطه فوق در جمله اول (7-8)، معادله (8-9) بدست می آید:

$$\Phi'_0 \cdot \Phi' = \int_V [(S A \sigma_a \varphi) - (\nabla \cdot J_0 A \sigma_a \varphi) - (J_0 B D \nabla \varphi)] dV \quad (9-8)$$

$$+ \int_{S_1} [\varphi n \cdot \varphi_0]_{r=0}^{r+0} + \int_{S_2} w \varphi \varphi_0 dS$$

با فرض  $A \sigma_a = B D = 1$  و با استفاده از ویژگی‌های زیر برای عملگر  $\nabla$ :

$$\nabla \cdot (J_0 \varphi) = (\nabla \cdot J_0) \varphi + J_0 \cdot \nabla \varphi \quad (10-8)$$

و با توجه به قضیه واگرایی:

$$\int_V \nabla \cdot (J_0 \varphi) dV = \oint_S \varphi (J_0 \cdot \vec{n}) dS \quad (11-8)$$

عبارت زیر برای رابطه (۸-۹) بدست می آید:

$$\Phi'_0 \cdot \Phi' = \int_V (S \varphi) dV + \int_{S_1} [\varphi (J_0 \cdot \vec{n})]_{r=0}^{r+\infty} dS \quad (۸-۱۲)$$

$$+ \int_{S_2} \varphi (w \varphi_0 - J_0 \cdot \vec{n}) dS$$

با توجه به شرط مرز برهنه یعنی رابطه (۶-۴) اگر  $w = \frac{1}{\alpha^2}$  انتخاب شود مقدار جمله سوم صفر می شود و همچنین اگر مقدار  $\varphi$  روی مرز داخلی پیوسته باشد، جمله دوم به صفر میل می کند بنابراین معادله زیر بدست می آید:

$$\Phi'_0 \cdot \Phi' = \int_V S \varphi dV \quad (۸-۱۳)$$

با روشی مشابه برای رابطه (۸-۶)، تساوی زیر بدست می آید:

$$(\Phi')^2 = \int_V [(\varphi \sigma_a \varphi) + (\nabla \varphi \cdot D \nabla \varphi)] dV + \frac{1}{\alpha^2} \int_{S_2} \varphi^2 dS \quad (۱۴-۸)$$

تابعی  $K'[\varphi]$  به صورت ترکیبی از رابطه‌های (۱۳-۸) و (۱۴-۸) معرفی می‌شود:

$$K'[\varphi] = 2\Phi'_0 \cdot \Phi' - (\Phi')^2 \quad (۱۵-۸)$$

$$= 2 \int_V S \varphi dV - \int_V [(\varphi \sigma_a \varphi) + (\nabla \varphi \cdot D \nabla \varphi)] dV + \frac{1}{\alpha^2} \int_{S_2} \varphi^2 dS$$

با جایگذاری این عبارت در تساوی (۴-۸) بدست می‌آید:

$$(\Phi' - \Phi'_0)^2 = (\Phi'_0)^2 - K'[\varphi] \quad (۱۶-۸)$$

همانطور که قبلاً اشاره شد جمله سمت چپ تساوی مقدار مجموع مربع خطاها و جمله اول سمت راست تساوی یک مقدار مثبت و ثابت می‌باشد.

در صورتی که مقدار تابع آزمون انتخابی با مقدار جواب‌های دقیق برابر باشد یعنی  $\varphi = \varphi_0$  مقدار خطا برابر صفر می‌شود و چون در روش‌های عددی همواره مقدار خطا غیر صفر است، بنابراین نامساوی زیر برقرار است:

$$K'[\varphi] \leq (\Phi'_0)^2 \quad (17-8)$$

پس برای اینکه مقدار خطا را به کمترین حد ممکن برسانیم باید مقدار  $K'[\varphi]$  بیشینه شود.

$$K'[\varphi] = \int_V [(2S\varphi) - (\varphi\sigma_a\varphi) - (\nabla\varphi \cdot D\nabla\varphi)] dV + \frac{1}{\alpha^2} \int_{S_b} \varphi^2 dS \quad (18-8)$$

مقدار  $K'[\varphi]$  یک اصل وردشی بیشینه برای حل معادله پخش با استفاده از روش حداقل مربعات خطا می‌باشد [۸]. یکی از مزایای این روش عدم نیاز به اعمال شرایط مرزی است زیرا استخراج این اصل با اعمال شرایط مرزی صورت گرفته است. از مزایای دیگر این روش ساده بودن شکل آن در هندسه‌های مختلف می‌باشد. همچنین در حالت چند ناحیه‌ای شکل این اصل حفظ شده و فقط انتگرال آخر در معادله (۸-۱۸) روی مرز بیرونی گرفته می‌شود.

برای حل عددی معادله پخش نیاز به بیشینه کردن مقدار  $K'[\varphi]$  است، در قسمت بعدی با استفاده از روش المان محدود به بیشینه نمودن این اصل پرداخته می‌شود.



## ۹- پیشینه کردن اصل وردشی کلاسیک به روش المان محدود

## ۹-۱- مروری بر روش المان محدود

پیدایش روش المان محدود به حل مسائل الاستیسیته و تحلیل سازه‌های بزرگ در مهندسی عمران و هوافضا بر می‌گردد. این روش برای اولین بار توسط الکساندر هرنیکوف و ریچارد کورانت در سال ۱۹۴۲ ارائه گردید [۹]. ویژگی این روش تقسیم یک دامنه پیوسته بزرگ به یک سری المان‌های کوچک‌تر است. اصطلاح المان محدود اولین بار توسط کلگ در سال ۱۹۶۰ جهت حل مسائل الاستیسیته دو بعدی بکار گرفته شد. از آغاز سال ۱۹۶۰ به بعد، استفاده از روش المان محدود در مهندسی توسعه یافت [۱۰] تا اینکه در سال ۱۹۷۰ برای اولین بار روش المان محدود برای حل معادله پخش نوترون مورد استفاده قرار گرفت.

روش المان محدود به عنوان یک روش تحلیل فضایی که مبتنی بر اصول وردشی است، در مسائلی که شکل ضعیف<sup>۱</sup> معادله دیفرانسیل موجود باشد مورد استفاده قرار می‌گیرد. در روش المان محدود تعدادی اصول وردشی پایه مانند روش ریتز<sup>۲</sup>، گلرکین<sup>۳</sup>، حداقل مربعات<sup>۴</sup> و ... کاربرد فراوانی دارند، اما این روش را می‌توان برای دیگر اصول وردشی از جمله اصل حداقل مربعات تعمیم یافته بکار برد.

در این بخش، فضای مورد نظر که در این پروژه یک بعدی در نظر گرفته شده است به المان‌های محدودی که در کنار هم بوده و با همدیگر هم‌پوشانی نداشته باشند، تقسیم‌بندی می‌شوند. برای هر المان می‌توان گره در نظر گرفت. المان‌های مجاور از طریق این گره‌ها به هم مرتبط هستند. بر روی هر المان مانند  $z$  و هر گره مانند  $a_i$ ،  $\Phi_i^j(x)$  که تابع

---

<sup>1</sup> Weak Form

<sup>2</sup> Ritz

<sup>3</sup> Galerkin

<sup>4</sup> Least Square

آزمون می‌باشد، توسط ترکیب خطی توابعی مانند  $B_p^j(x)$  و  $\Psi_{pi}^j$  ضرایب بسط که همان مقادیر تابع در هر گره می‌باشند جایگزین می‌گردند، یعنی:

$$\Phi_i^j(x) = \sum_{p=1}^{Np} B_p^j(x) \Psi_{pi}^j \quad (1-9)$$

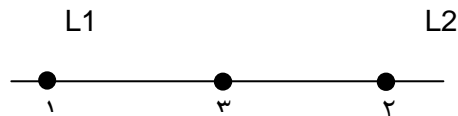
که  $B_p^j(x)$  توابع شکلی<sup>۱</sup> المان می‌باشند. مقدار  $B_p^j(x)$  در گره مربوط به خود دارای مقدار واحد بوده و به صورت خطی و یا تابع درجه ۲ تا گره بعدی تغییر می‌کند تا اینکه در گره بعدی مقدار آن به صفر برسد. مجموع این توابع در روی هر نقطه المان و یا مرزها برابر یک می‌باشد، یعنی:

$$\sum_{p=1}^{Np} B_p^j(x) = 1 \quad (2-9)$$

---

<sup>1</sup> Shape Functions

هنگامی که هندسه و یا خصوصیت مواد تنها تابع یک متغیر مکانی باشند در آن صورت المان‌های یک بعدی استفاده می‌شود. المان‌های یک بعدی را می‌توان به وسیله یک پاره خط که ابتدا و انتهای آن را گره‌ها تشکیل می‌دهد، نشان داد.



شکل ۲: المان یک بعدی

در شکل ۲ گره‌های شماره ۱ و ۲ به عنوان گره‌های بیرونی نامیده می‌شوند زیرا این گره‌ها به عنوان نقاط اتصال به المان‌های مجاور می‌باشند. می‌توان از گره‌های بیشتری در المان مانند گره شماره ۳ در شکل ۲ استفاده نمود. از آنجایی که این گره به المان‌های دیگری ارتباط ندارد، لذا به آن گره داخلی گفته می‌شود. برای معرفی تابع شکلی  $B_i^j(x)$  در

گره  $i$  که در المان  $j$  واقع است، از روش‌های متعدد می‌توان استفاده کرد. برای این منظور توابع خانواده لاگرانژ بکار گرفته می‌شود. مقادیر این توابع در روی گره‌ها معین می‌گردند و از یک نوع درون‌یابی برای نقاط وسط استفاده می‌شود. البته باید توابعی را انتخاب کرد که قابل قبول باشند (مثلاً درجه پیوستگی مورد نظر معادله را از قبیل پیوستگی خود تابع و یا پیوستگی مشتق را در صورت لزوم ارضا نمایند). اگر المان تنها دارای دو گره باشد می‌توان از توابع پایه زیر استفاده کرد:

$$B_2^j(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = L_2 \quad \text{و} \quad B_1^j(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = L_1 \quad (3-9)$$

$L_1$  و  $L_2$  هرکدام کسری از طول المان می‌باشند و بدیهی است که:

$$0 \leq L_2 \leq 1 \quad \text{و} \quad 0 \leq L_1 \leq 1 \quad (4-9)$$

$$L_1 + L_2 = 1 \quad (5-9)$$

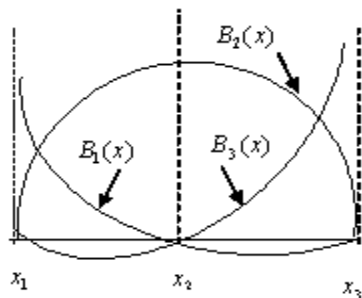
اگر گره سوم در وسط المان در نظر گرفته شود، در آن صورت می توان یک تابع درجه دوم به صورت زیر در نظر گرفت:

$$B_1^j(x) = \left( \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \right) \left( \frac{x-x_2}{x_1-x_3} \right) = L_1(2L_1-1) \quad (6-9)$$

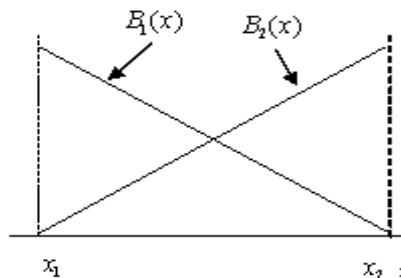
$$B_2^j(x) = \left( \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \right) \left( \frac{x-x_3}{x_2-x_3} \right) = L_1(2L_1-1) \quad (7-9)$$

$$B_3^j(x) = \left( \frac{x-x_1}{x_3-x_1} \right) \left( \frac{x-x_2}{x_3-x_2} \right) = 4L_1L_2 \quad (8-9)$$

در شکل ۳، توابع خطی و درجه دوم معرفی شده فوق نشان داده شده است.



ب: درون‌یابی درجه دوم



الف: درون‌یابی خطی

شکل ۳: توابع شکلی

با توضیحات فوق مشخص می‌شود که  $\Phi_1^j(x)$  در المان  $j$  را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\Phi_1^j(x) = \underline{B}^{jT}(x)\underline{\Psi}^j \quad (9-9)$$

$\underline{\Phi}^j$  یک ماتریس ستونی  $N_p \times 1$  و  $\underline{B}^{jT}(x)$  یک ماتریس  $N_p \times N_p$  می باشد.

### ۹-۲- ماکزیمم نمودن $K'[\phi]$ برای تیغه یک بعدی

با توجه به مطالب گفته شده می توان تابع آزمون زیر را برای شار در نظر گرفت:

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{p=1}^{N_p} B_p^j(x) \psi_p^j \quad (9-10)$$

$N_e$  تعداد کل المانها و  $N_p$  تعداد کل گره های موجود در هندسه مورد نظر می باشد. می توان عبارت بالا را به صورت ماتریسی خلاصه نویسی کرد:



$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{N_e} \underline{B}^{jT}(x) \underline{\psi}^j \quad (11-9)$$

با نگاهی به معادله (۸-۱۸) که معرف اصل وردشی  $K'[\varphi]$  است می‌توان دریافت که این اصل از یک جمله شامل انتگرال مکانی و از یک جمله شامل انتگرال سطحی، تشکیل شده است. این جملات را به صورت زیر از یکدیگر تفکیک می‌کنیم:

$$F_A[\varphi, \varphi] = \int_V [(\varphi \sigma_a \varphi) + (\nabla \varphi \cdot D \nabla \varphi)] dV - \frac{1}{\alpha^2} \int_{S_b} \varphi^2 dS \quad (12-9)$$

$$F_B[\varphi] = \int_V (S \varphi) dV \quad (13-9)$$

بنابراین اصل وردشی  $K'[\varphi]$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$K'[\varphi] = 2F_B[\varphi] - F_A[\varphi, \varphi] \quad (14-9)$$

حال با قرار دادن تابع آزمون حدس زده شده در انتگرال‌های بالا مقادیر  $F_A[\varphi, \varphi]$  و  $F_B[\varphi]$  را برای یک المان محاسبه نموده و سپس با گرفتن مشتق از  $K'[\varphi]$  و برابر صفر قرار دادن آن، اصل وردشی بیشینه می‌شود.

۹-۲-۱- محاسبه  $F_B[\varphi]$  برای یک المان خطی

همانطور که قبلاً اشاره شد مقدار تابع آزمون در یک المان خطی به صورت ماتریسی زیر نوشته می‌شود:

$$\varphi^j(x) = \underline{B}^{jT}(x)\underline{\psi}^j = [B_1^j(x) \quad B_2^j(x)] \begin{bmatrix} \psi_1^j \\ \psi_2^j \end{bmatrix} \quad (۱۵-۹)$$

با جایگذاری این مقدار در رابطه (۹-۴) بدست می‌آید:

$$\int_{V_j} S_j \underline{B}^{jT}(x)\underline{\psi}^j dV = \left\{ \int_{x_1}^{x_2} S_j \underline{B}^{jT}(x) dx \right\} \underline{\psi}^j = \underline{I}_1^j \underline{\psi}^j \quad (۱۶-۹)$$

۹-۲-۲- محاسبه  $F_A[\varphi, \varphi]$  برای یک المان خطی

جمله‌های اول و دوم در رابطه (۹-۳) بعد از جایگذاری رابطه (۹-۶) در آنها به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\int_V (\varphi \sigma_a \varphi) dV = \underline{\psi}^{jT} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \underline{B}^j(x) \sigma_{aj} \underline{B}^{jT}(x) dx \right\} \underline{\psi}^j = \underline{\psi}^{jT} I_2^j \underline{\psi}^j \quad (۹-۱۷)$$

$$\int_V (\nabla \varphi \cdot D \nabla \varphi) dV = \underline{\psi}^{jT} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \underline{B}^j(x)}{\partial x} D_j \frac{\partial \underline{B}^{jT}(x)}{\partial x} dx \right\} \underline{\psi}^j = \underline{\psi}^{jT} I_3^j \underline{\psi}^j \quad (۹-۱۸)$$

و جمله آخر که یک انتگرال سطحی است به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{\alpha^2} \int_{S_b} \varphi^2 dS = \underline{\psi}^{jT} \{ \lambda \underline{B}^j(x_b) \underline{B}^{jT}(x_b) \} \underline{\psi}^j = \underline{\psi}^{jT} I_4^j \underline{\psi}^j \quad (۹-۱۹)$$

مقدار  $x_b$  روی مرز بیرونی و  $\lambda = \frac{1}{a^2}$  ثابت برون‌یابی می‌باشد. مقدار  $\lambda$  برای شرایط مرزی مختلف در جدول شماره ۱ آورده شده است.

ماتریس‌های  $I_1^A$ ،  $I_2^A$ ،  $I_3^A$  و  $I_4^A$  انتگرال‌های مکانی می‌باشند که به نوع و درجه المان و خواص موادی که در المان بکار رفته بستگی دارند. در جدول شماره ۲ این انتگرال‌ها برای یک تیغه یک بعدی آورده شده است.

جدول شماره ۱: مقادیر ثابت برون‌یابی برای شرایط مرزی مختلف

مقدار ثابت برون‌یابی	نوع شرط مرزی
$\lambda = 0.5$	شرط مرز برهنه (تئوری پخش)
$\lambda = 0.4692$	شرط مرز برهنه (تئوری ترابرد)
$\lambda = 0.0$	شرط مرز بازتابنده کامل
$\lambda \rightarrow \infty$	شرط مرزی $\varphi=0$

جدول شماره ۲: انتگرال‌های مکانی برای حالت تیغه یک بعدی

انتگرال مکانی	تعریف
$\underline{I}_1^j$	$S_j \int_{x_1}^{x_{Np}} \underline{B}^{jT}(x) dx$
$\underline{I}_2^j$	$\sigma_{aj} \int_{x_1}^{x_{Np}} \underline{B}^j(x) \underline{B}^{jT}(x) dx$
$\underline{I}_3^j$	$D_j \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \underline{B}^j(x)}{\partial x} \frac{\partial \underline{B}^{jT}(x)}{\partial x} dx$
$\underline{I}_4^j$	$\lambda \underline{B}^j(x_b) \underline{B}^{jT}(x_b) \quad \text{در مرز } x_b$

۹-۲-۳- سرهم‌بندی ماتریس‌ها

با قراردادن مقادیر محاسبه شده در اصل وردشی (۹-۵)، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$K'[\varphi^j] = 2\underline{I}_1^j \underline{\psi}^j - \underline{\psi}^{jT} (\underline{I}_2^j + \underline{I}_3^j + \underline{I}_4^j) \underline{\psi}^j \quad (۹-۲۰)$$

اگر ماتریس‌های فوق برای هر المان نوشته شده و سپس سرهم‌بندی شوند، در آن صورت می‌توان  $K'[\Phi]$  را به صورت زیر نوشت:

$$K'[\varphi] = \sum_{j=1}^{N_e} 2\underline{I}_1^j \underline{\psi}^j - \underline{\psi}^{jT} (\underline{I}_2^j + \underline{I}_3^j + \underline{I}_4^j) \underline{\psi}^j = 2\underline{\Psi}^T \underline{B} - \underline{\Psi}^T \underline{A} \underline{\Psi} \quad (۹-۲۱)$$

در رابطه فوق،  $\underline{A}$  یک ماتریس  $N_e N_p \times N_e N_p$  و  $\underline{B}$  یک بردار  $1 \times N_e N_p$  و  $\underline{\Psi}^T$  بردار مقادیر شار می‌باشد. برای بیشینه کردن  $K'[\Phi]$  نسبت به  $\underline{\Psi}^T$  مشتق گرفته و برابر صفر قرار داده می‌شود که نتیجه زیر را به دنبال دارد:

$$\frac{\partial K'[\varphi]}{\partial \underline{\Psi}^T} = 0 \quad (22-9)$$

با توجه به قرینه بودن ماتریس  $\underline{A}$ ، معادلات (۲۳-۹) و (۲۴-۹) بدست می آیند:

$$\frac{\partial(\underline{\Psi}^T \underline{A} \underline{\Psi})}{\partial \underline{\Psi}^T} = 2 \underline{A} \underline{\Psi} \quad (23-9)$$

$$\frac{\partial(\underline{\Psi}^T \underline{B})}{\partial \underline{\Psi}^T} = \underline{B} \quad (24-9)$$

با جایگذاری معادلات بالا، در نهایت دستگاه معادلات زیر بدست می آید:

$$\underline{A} \underline{\Psi} = \underline{B} \quad (25-9)$$

در واقع حل معادله اصلی منوط به حل دستگاه معادلات خطی فوق می گردد.



برای سرهم‌بندی المان‌ها باید دقت داشت که مقدار انتگرال‌ها در هر المان با گره مشترک المان بعدی جمع شود که در نهایت منجر به تشکیل یک دستگاه معادلات خطی می‌گردد. در سرهم‌بندی المان‌ها شماره هر المان و شماره گره‌هایی که با المان در ارتباط هستند از اطلاعات بسیار ضروری است که توسط یک نرم‌افزار تولید المان به عنوان ورودی به برنامه داده می‌شود. نحوه سرهم‌بندی المان‌ها در شکل ۴ نشان داده شده است.

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & -K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ -K_{12}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & -K_{23}^{(2)} & 0 \\ 0 & -K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & -K_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & -K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \end{bmatrix}$$

شکل ۴: شکل نمایشی سرهم‌بندی المان‌ها

۹-۳- ماکزیمم نمودن  $K'[\varphi]$  برای حالت کروی و استوانه‌ای

با توجه به اصل وردشی  $K'[\varphi]$  که در آن عملگر لاپلاسین ظاهر نمی‌شود، شکل انتگرال‌ها تغییر چندانی نمی‌کند زیرا عملگر گرادیان در مختصات کروی و استوانه‌ای به صورت  $\nabla \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r}$  در می‌آید (۲ شعاع کره یا استوانه می‌باشد) و شکل انتگرال‌ها را عوض نمی‌کند اما در هندسه‌های کروی و استوانه‌ای، المان حجمی به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{cases} dV = 4\pi r^2 dr & \text{برای حالت کروی} \\ dV = 2\pi r dr & \text{برای حالت استوانه ای} \end{cases}$$

و در نتیجه باعث تغییر شکل انتگرال‌های مکانی می‌شود. جدول‌های شماره ۳ و ۴ مقدار انتگرال‌های مکانی در هندسه‌های کروی و استوانه‌ای را نشان می‌دهد.

جدول شماره ۳: انتگرال‌های مکانی برای حالت کروی یک بعدی

انتگرال مکانی	تعریف
$I_1^j$	$4\pi S_j \int_{r_1}^{r_{Np}} \underline{B}^{jT}(r) r^2 dr$
$I_2^j$	$4\pi \sigma_{aj} \int_{r_1}^{r_{Np}} \underline{B}^j(r) \underline{B}^{jT}(r) r^2 dr$
$I_3^j$	$4\pi D_j \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial \underline{B}^j(r)}{\partial r} \frac{\partial \underline{B}^{jT}(r)}{\partial r} r^2 dr$
$I_4^j$	$4\pi \lambda r_b^2 \underline{B}^j(r_b) \underline{B}^{jT}(r_b)$ در مرز $r_b$

جدول شماره ۴: انتگرال‌های مکانی برای حالت استوانه‌ای یک بعدی

انتگرال مکانی	تعریف
$I_1^j$	$2\pi S_j \int_{r_1}^{r_{Np}} \underline{B}^{jT}(r) r dr$
$I_2^j$	$2\pi \sigma_{aj} \int_{r_1}^{r_{Np}} \underline{B}^j(r) \underline{B}^{jT}(r) r dr$
$I_3^j$	$2\pi D_j \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial \underline{B}^j(r)}{\partial r} \frac{\partial \underline{B}^{jT}(r)}{\partial r} r dr$
$I_4^j$	$2\pi \lambda r_b \underline{B}^j(r_b) \underline{B}^{jT}(r_b) \quad r_b \text{ مرز در}$

انتگرال‌های فوق به روشی مشابه آنچه برای حالت تیغه‌ای گفته شد بدست آمده است.

## ۱۰- الگوریتم‌های حل عددی معادله پخش چند گروهی

## ۱۰-۱- محاسبه ضریب تکثیر مؤثر یک محیط

اگر محیط تکثیرپذیر باشد و در آن شکافت رخ دهد، تعداد نوترون‌ها افزایش می‌یابد و در نتیجه باید محاسبات مربوط به بحرانی شدن لحاظ شوند. در این صورت چشمه ناشی از شکافت در حالت تک انرژی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$S = \frac{1}{k} \nu \sigma_f \varphi \quad (1-10)$$

با جایگذاری این مقدار در رابطه (۹-۱۳) بدست می‌آید:

$$F_B[\varphi] = \int_V (S\varphi) dV = \int_V \left( \frac{1}{k} v \sigma_f \varphi \right) dV = \frac{1}{k} v \sigma_f \int_V \varphi^2 dV \quad (2-10)$$

با قرار دادن تابع آزمون (۹-۱۵) در عبارت (۱۰-۲)، مقدار انتگرال مکانی مربوط به چشمه ناشی از شکافت به صورت زیر در می‌آید.

$$\underline{\psi}^{jT} \left\{ \frac{1}{k} v \sigma_f \int_{V_j} \underline{B}^{jT}(x) \underline{B}^j(x) dx \right\} \underline{\psi}^j = \underline{\psi}^{jT} \underline{I}_f^j \underline{\psi}^j \quad (3-10)$$

برای حل معادله ابتدا یک مقدار اولیه مانند  $\underline{\psi}_0^j$  برای شار و یک مقدار اولیه برای ضریب تکثیر مؤثر نوترونی در نظر گرفته می‌شود، بدین ترتیب مقدار چشمه ناشی از شکافت محاسبه می‌شود که در نهایت ماتریس  $\underline{B}$  به صورت زیر بدست می‌آید، که در آن  $\underline{I}_f^j \underline{\psi}_0^j$  حاصل ضرب معمولی دو ماتریس در هم می‌باشد.

$$\underline{B} = \underline{I}_f^j \underline{\psi}_0^j \quad (4-10)$$

در صورتی که علاوه بر چشمه ناشی از شکافت، چشمه خارجی هم در محیط وجود داشته باشد می توان عبارت بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\underline{B} = \underline{L}_f^j \underline{\psi}_0^j + \underline{L}_1^j \quad (5-10)$$

بعد از مشخص شدن ماتریس  $\underline{B}$  و حل دستگاه، در تکرار بعدی باید مقادیر جدید شار و ضریب تکثیر مؤثر نوترونی جایگزین گردند. در هر مرحله با استفاده از مقدار جدیدی که برای شار بدست آمده می توان ضریب تکثیر مؤثر نوترونی جدید را به صورت زیر برای سیستم محاسبه نمود:

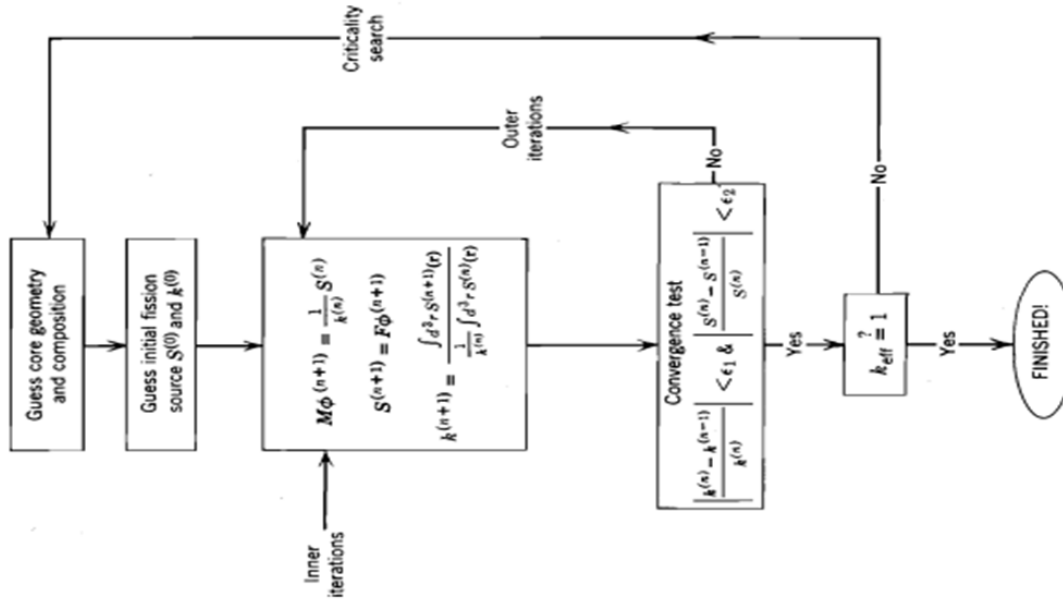
$$K^{n+1} \approx \frac{\int_V \nu \sigma_f \varphi^{n+1} dV}{\frac{1}{K^n} \int_V \nu \sigma_f \varphi^n dV} \quad (6-10)$$



در هر مرحله این روند تکرار می‌شود تا شرط همگرایی هم روی شار و هم روی ضریب تکثیر مؤثر به صورت زیر برقرار گردد.

$$\max \left| \frac{s_g^n - s_g^{n-1}}{s_g^n} \right| < \varepsilon_1 \quad , \quad \left| \frac{K^n - K^{n-1}}{K^n} \right| < \varepsilon_2 \quad (7-10)$$

نمودار گردشی محاسبه ضریب تکثیر مؤثر نوترونی که روش تکرار قدرت نام دارد، در شکل ۵ نمایش داده شده است [۱۰].



شکل ۵: نمودار گردش روش قدرت برای محاسبه ضریب تکثیر مؤثر نوترونی

با توجه به نمودار گردشی فوق اگر از روش‌های تکرار برای حل دستگاه معادلات خطی استفاده شود به آن تکرار داخلی می‌گویند. همچنین یک تکرار برای بدست آوردن مقادیر جدید ضریب تکثیر مؤثر نوترونی و چشمه ناشی از شکافت وجود دارد که به آن تکرار خارجی می‌گویند.

### ۱۰-۲- حل معادله پخش نوترون در حالت چند گروهی

در تمامی قسمت‌های قبل فرض بر این بود که نوترون‌ها تک انرژی هستند. برای انجام محاسبات دقیق‌تر، انرژی نوترون‌ها را در بازه‌های مختلف انرژی که گروه نامیده می‌شود ثابت در نظر می‌گیرند. سپس معادله پخش چند گروهی را برای هر گروه انرژی حل نموده و مقدار شار را در هر گروه بدست می‌آورند. فرض می‌شود انرژی به  $G$  بازه تقسیم شده باشد که در این حالت معادلات پخش چند گروهی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$-D_g \nabla \cdot \nabla \varphi_g + \sigma_{Rg} \varphi_g = S_{fg} + S_{sg} \quad (۱۰-۸)$$

$$g = 1, 2, \dots, G$$

که در آن  $\varphi_g$  شار نوترون در گروه  $g$  و  $\sigma_{Rg} = \sigma_{tg} - \sigma_{sg}$  سطح مقطع برداشت در هر گروه انرژی می‌باشد. مقدار چشمه ناشی از شکافت را می‌توان به شکل زیر معرفی نمود:

$$S_{fg} = \chi_g \sum_{g'=1}^G \frac{\nu \sigma_{fg'}}{K} \varphi_{g'} \quad (9-10)$$

و جمله دوم سمت راست معادله (10-8) چشمه ناشی از پراکندگی نوترون به گروه‌های بالاتر یا پایین‌تر می‌باشد.

$$S_{sg} = \sum_{g'=1}^G (1 - \delta_{gg'}) \sigma_{sgg'} \varphi_{g'} \quad (10-10)$$

این جمله را می‌توان به دو قسمت چشمه ناشی از پراکندگی رو به بالا و پراکندگی رو به پایین تقسیم نمود.

چشمه ناشی از پراکندگی رو به بالا:

$$S_{ug} = \sum_{g'=1}^{g-1} \sigma_{sgg'} \varphi_{g'} \quad (11-10)$$

چشمه ناشی از پراکندگی رو به پایین:

$$S_{Dg} = \sum_{g'=g+1}^G \sigma_{sgg'} \varphi_{g'} \quad (12-10)$$

حال برای هر گروه انرژی یک معادله وجود دارد که در نهایت تمام این معادلات با یکدیگر جفت شده هستند.

برای پیدا کردن الگوریتم حل معادلات پخش نوترون چند گروهی ابتدا حالت ساده دو گروهی در نظر گرفته شده و سپس دستورالعمل بدست آمده به حالت چند گروهی تعمیم داده می‌شود.

معادلات پخش دو گروهی با پراکندگی رو به بالا به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$-D_1 \nabla \cdot \nabla \varphi_1 + \sigma_{R1} \varphi_1 = \chi_1 (v \sigma_{f1} \varphi_1 + v \sigma_{f2} \varphi_2) + \sigma_{s21} \varphi_2 \quad (13-10)$$

$$-D_2 \nabla \cdot \nabla \varphi_2 + \sigma_{R2} \varphi_2 = \chi_2 (v \sigma_{f1} \varphi_1 + v \sigma_{f2} \varphi_2) + \sigma_{s12} \varphi_1 \quad (14-10)$$

برای حل معادلات دو گروهی ابتدا یک حدس اولیه برای شار تمامی گروه‌های انرژی، در نظر گرفته می‌شود. با توجه به اینکه در سمت راست معادله (۱۳-۱۰) مقداری معلوم پیدا می‌شود، ابتدا معادله گروه اول را حل نموده و مقادیر شار نوترون در گروه اول بدست می‌آید. برای حل معادله گروه دوم، از مقدار محاسبه شده شار گروه اول استفاده می‌گردد. با بدست آوردن مقدار جدید شار در هر گروه انرژی از این مقادیر برای محاسبات دور بعدی استفاده می‌شود و تکرار این روند تا رسیدن به شرط همگرایی و محاسبه مقادیر شار گروهی ادامه می‌یابد.

در حالت چند گروهی دستگاه معادلات جفت شده به صورت زیر در می آید.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\nabla \cdot D_1 \nabla + \Sigma_{R1} & 0 & 0 & \cdots \\ -\Sigma_{S12} & -\nabla \cdot D_2 \nabla + \Sigma_{R2} & 0 & \cdots \\ -\Sigma_{S13} & -\Sigma_{S23} & -\nabla \cdot D_3 \nabla + \Sigma_{R3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\underline{\Phi}} = \frac{1}{k} \underbrace{\begin{bmatrix} \chi_1 v_1 \Sigma_{f1} & \chi_1 v_2 \Sigma_{f2} & \cdots \\ \chi_2 v_1 \Sigma_{f1} & \chi_2 v_2 \Sigma_{f2} & \cdots \\ \chi_3 v_1 \Sigma_{f1} & \chi_3 v_2 \Sigma_{f2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{F}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\underline{\Phi}}$$

ابتدا مقدار شار نوترون برای تمام گروه‌های انرژی حدس زده می‌شود و سپس با جایگذاری در روابط (۹-۱۰) و (۱۰-۱۱) و (۱۰-۱۲) مقدارهای اولیه برای چشمه ناشی از شکافت و چشمه‌های ناشی از پراکندگی رو به بالا و پایین بدست آورده می‌شوند. در این مرحله هم می‌توان از حدس اولیه برای محاسبه شار گروهی استفاده نمود و هم می‌توان از مقادیر شار محاسبه شده از گروه‌های انرژی بالاتر برای محاسبه چشمه ناشی از پراکندگی رو به پایین استفاده نمود. استفاده از مقدار شار محاسبه شده باعث کاهش تعداد دفعات تکرار در مقایسه با استفاده از حدس اولیه می‌شود، از این رو در این پژوهش

از روش دوم برای حل معادلات گروهی استفاده می‌شود. در ادامه کار از مقادیر شار گروهی محاسبه شده به عنوان حدس جدید برای تکرارهای بعدی استفاده می‌شود تا شرایط همگرایی برقرار گردد.

### ۱۰-۳- حل عددی معادله الحاقی پخش

در بعضی از مسائل ارزش نوترون‌های موجود در راکتور از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است به عنوان مثال در محاسبه پارامترهای دینامیکی راکتور مانند راکتیویته، زمان میانگین تولید و ... نیاز به حل معادله الحاقی و بدست آوردن ارزش نوترون‌ها می‌باشد.



معادله الحاقی پخش که به معادله ارزش نوترون نیز معروف است، از جایگذاری عملگرهای الحاقی در معادله پخش نوترون بدست می‌آید که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$D_g \nabla \cdot \nabla \varphi_g + \sigma_{Rg} \varphi_g = S_{fg} + S_{sg} \quad (15-10)$$

$$g = 1, 2, \dots, G$$

که در آن عملگرهای الحاقی شکافت و پراکندگی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$S_{fg} = \frac{v\sigma_{fg}}{K} \sum_{g'=1}^G \chi_{g'g} \varphi_{g'} \quad (16-10)$$

$$S_{sg} = \sum_{g'=1}^G (1 - \delta_{g'g}) \sigma_{sg'g} \varphi_{g'} \quad (17-10)$$

همانطور که مشاهده می‌شود تفاوت چندانی بین معادله الحاقی پخش و معادله چند گروهی پخش وجود ندارد و فقط علامت جمله اول عوض شده و چشمه‌های ناشی از شکافت و پراکندگی تغییرات کوچکی داشته‌اند که با استفاده از روش مشابهی که برای حل عددی معادله پخش چند گروهی ارائه گردید می‌توان معادله الحاقی را نیز حل نمود. باید دقت داشت که مقدار ضریب تکثیر مؤثر بدست آمده از حل عددی معادله الحاقی با ضریب تکثیر مؤثر معادله پخش چند گروهی برابر است.

#### ۱۰-۴- محاسبات مربوط به المان درجه دوم

همانطور که در بخش (۹-۱) اشاره شد می‌توان مقادیر شار را با استفاده از توابع پایه خطی یا با درجات بالاتر بسط داد. یکی از مزیت‌های استفاده از توابع درجات بالاتر، حل عددی معادله با تعداد المان‌های کمتر و همچنین جواب‌های دقیق‌تر به ویژه در نقاطی که تغییرات شار زیاد است، می‌باشد. علت این امر این است که المان‌های با درجات بالاتر تعداد

درجات آزادی بیشتری دارند که امکان انعطاف‌پذیری بیشتری نیز به آنها می‌دهد. هر چند استفاده از این المان‌ها منجر به کاهش خطا و حل دقیق‌تر مسائل می‌شود اما باعث افزایش تعداد عملیات محاسباتی و بالا رفتن زمان اجرای برنامه می‌شود که به همین دلیل فقط از المان درجه دوم که نیاز به محاسبات کمتری دارد در روش المان محدود استفاده می‌شود.

المان درجه دوم در روش المان محدود مطابق شکل ۶ تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= [1 \quad x \quad x^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L} & \frac{4}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^2} & -\frac{4}{L^2} & \frac{2}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \\ N_1(x) &= 1 - \frac{3}{L}x + \frac{2}{L^2}x^2 \\ N_2(x) &= \frac{4x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ N_3(x) &= \frac{x}{L} \left(\frac{2x}{L} - 1\right) \end{aligned}$$

شکل ۶: المان درجه دوم در روش المان محدود

که در آن  $L$  طول المان و  $N(x)$ ها توابع پایه شکلی که شار بر حسب آنها بسط داده می‌شود، می‌باشند.

همانطور که مشاهده می‌شود در هر المان سه گره وجود دارد که گره‌های اول و سوم ابتدا و انتهای المان را مشخص می‌کنند.

با قرار دادن توابع پایه درجه دوم در انتگرال‌های مکانی که به آنها اشاره شد می‌توان مقادیر این انتگرال‌ها را محاسبه نمود. این انتگرال‌ها هم به روش تحلیلی و هم به روش عددی قابل محاسبه می‌باشند که در این پروژه از مقادیر تحلیلی استفاده شده است.

در اینجا باید دقت داشت که ماتریس‌های تولید شده  $3 \times 3$  می‌باشند که برای سرهم‌بندی آنها کفایت گره انتهایی یک المان به گره ابتدایی المان بعدی متصل شود و بنابراین گره دوم که گره میانی هر المان است در سرهم‌بندی نقشی ندارد.

شکل زیر نحوه سرهم‌بندی المان‌های درجه دوم را نشان می‌دهد.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ 0 & 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix}$$

شکل ۷: نحوه سرهم‌بندی المان‌های درجه دوم

## ۱۱- راستی آزمایی نتایج عددی

## ۱۱-۱- توضیحاتی درباره نرم افزار محاسباتی

با توجه به مطالب بیان شده در بخش‌های قبلی و با استخراج الگوریتم‌های مربوط به روش ذکر شده یک برنامه محاسباتی به زبان فرترن با نام GELES برای حل عددی معادله پخش چند گروهی در مختصات یک بعدی نوشته شده است. این برنامه قابلیت حل معادله پخش در محیط‌های غیرتکثیرپذیر با چشمه حجمی ثابت و محیط‌های تکثیرپذیر را دارد و همچنین تمامی هندسه‌های یک بعدی شامل تیغه، استوانه و کره را پوشش می‌دهد. امکان اعمال شرایط مرزی بازتابنده کامل و مرز برهنه در این برنامه وجود دارد. در این برنامه کاربر می‌تواند چند نوع ماده با سطح مقاطع مختلف چند گروهی تعریف کند و سپس آنها را به دلخواه در نواحی مختلف بچیند. در این برنامه اثر مربوط به پراکندگی به گروه‌های بالاتر انرژی نیز در محاسبات لحاظ شده است. ورودی برنامه شامل پارامترهای کنترلی، هندسه مسئله و سطح

مقاطع گروهی جهت حل معادله پخش می باشد. خروجی برنامه شامل شار گروهی و چگالی قدرت تولیدی در هر المان و نیز ضریب تکثیر مؤثر نوترونی سیستم می باشد. در این بخش برای راستی آزمایی برنامه و بررسی صحت نتایج، مثال های عددی مختلف ذکر می گردد.

### ۱۱-۲- چشمه ثابت تک انرژی در محیط غیر تکثیر پذیر

در این مثال چشمه نوترون ثابتی به قدرت واحد در تیغه ای به ضخامت ۱ سانتیمتر و مقادیر ضریب پخش و سطح مقطع جذب به ترتیب 1.22735 و 0.081 در نظر گرفته می شود. در سمت چپ شرط مرزی بازتابنده کامل و در سمت راست شرط مرزی برهنه اعمال شده است.

برای تیغه ای به ضخامت  $a$  یک جواب تحلیلی به صورت زیر وجود دارد:

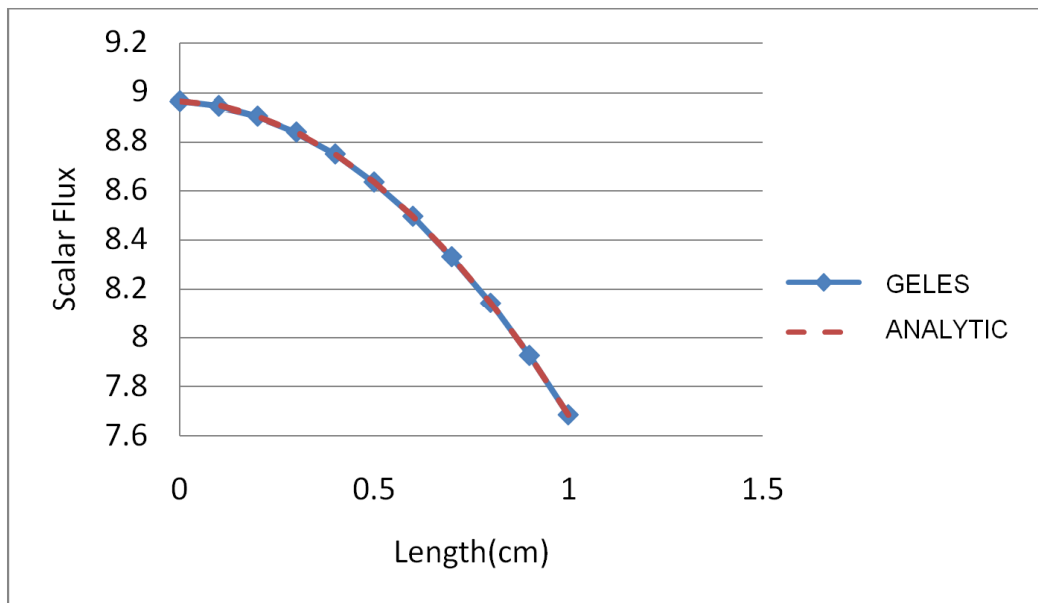


$$\varphi(x) = \frac{s}{\Sigma_a} \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{x}{L}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{L}\right) + \frac{2D \sinh\left(\frac{a}{L}\right)}{L}} \right) \quad (1-11)$$

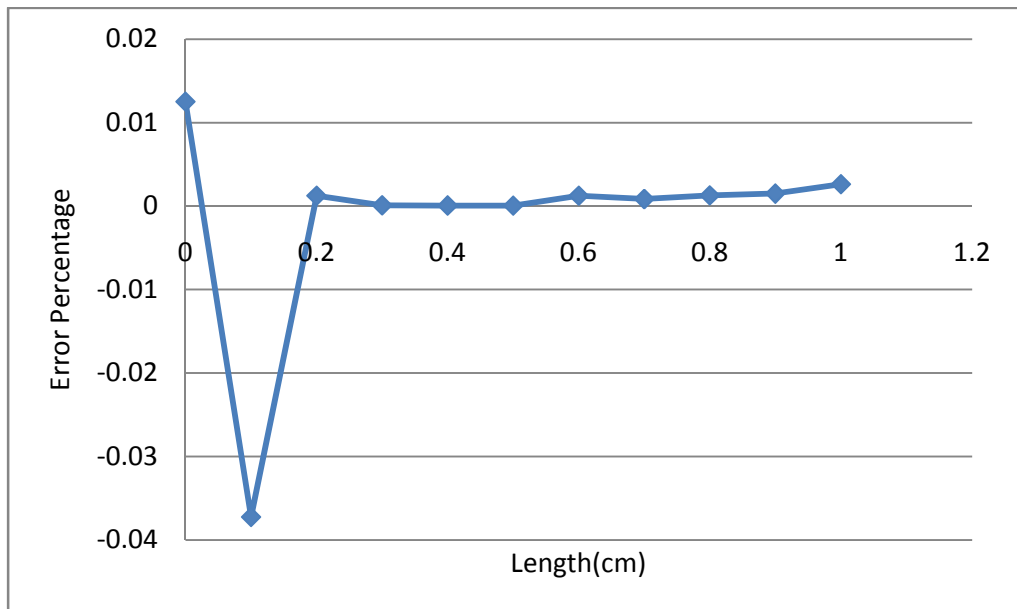
در این رابطه S قدرت چشمه و L طول پخش می‌باشد که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}} \quad (2-11)$$

نتایج بدست آمده از برنامه برای یک تیغه با مقادیر تحلیلی در شکل ۸ مقایسه شده و همچنین نمودار درصد خطا در شکل ۹ نمایش داده شده است.



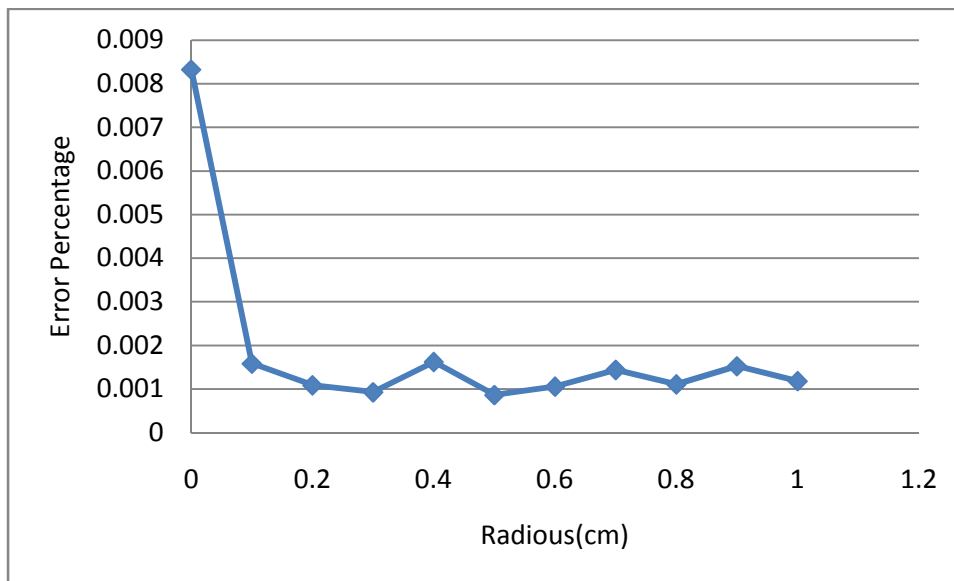
شکل ۸: مقایسه شار نوترون بدست آمده از کد GELES با مقادیر تحلیلی برای تیغه



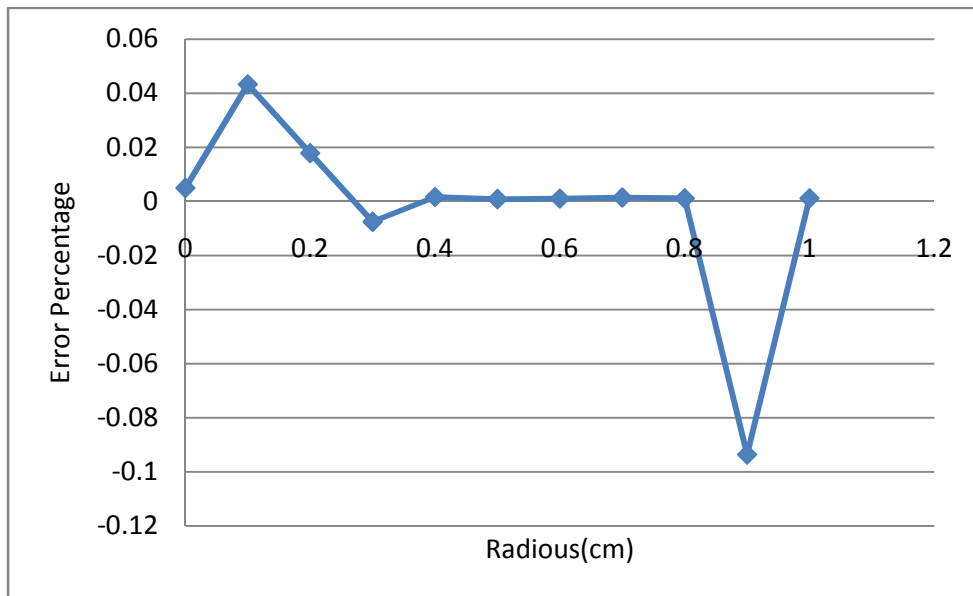
شکل ۹: نمودار درصد خطا در نتایج بدست آمده از کد GELES در مقایسه با پاسخ تحلیلی برای تیغه

همانطور که مشاهده می‌شود مقادیر محاسبه شده با درصد خطای بسیار ناچیزی مطابقت بسیار خوبی با جواب‌های تحلیلی دارد.

حال برای راستی‌آزمایی نتایج در دیگر هندسه‌ها، همین مثال برای یک کره و استوانه که شعاع آنها ۱ cm می‌باشد تکرار می‌شود، با توجه به جواب‌های تحلیلی که برای این مسئله موجود است نمودار درصد خطای نسبی در مقایسه با مقادیر تحلیلی برای هندسه‌های کره و استوانه‌ای در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱۰: نمودار درصد خطا در نتایج بدست آمده از کد GELES در مقایسه با پاسخ تحلیلی برای کره



شکل ۱۱: نمودار درصد خطا در نتایج بدست آمده از کد GELES در مقایسه با پاسخ تحلیلی برای استوانه

با نگاهی به این دو نمودار همخوانی بسیار خوبی بین نتایج بدست آمده و مقادیر تحلیلی برای کره و استوانه مشاهده می‌شود.

### ۱۱-۳- محاسبه ضریب تکثیر مؤثر برای محیط تک ناحیه‌ای در حالت یک گروهی

در این مثال هدف محاسبه ضریب تکثیر مؤثر نوترونی در یک محیط تکثیرپذیر با هندسه‌های متفاوت می‌باشد. فرض می‌شود ضخامت محیط  $200 \text{ cm}$  است و مقدار ضریب پخش  $1.01019$ ، سطح مقطع جذب  $0.00765$  و سطح مقطع شکافت  $0.01181$  است. در سمت چپ شرط مرزی بازتابنده کامل و در سمت راست شرط مرزی برهنه اعمال شده است.

مقادیر بدست آمده برای ضریب تکثیر مؤثر در هندسه‌های مختلف در جدول شماره ۵ با مقادیر تحلیلی که از معادلات (۱۱-۳) بدست آمده مقایسه شده است.

$$K_{eff} = \frac{K_{\infty}}{1 + B^2 L^2}$$

$$K_{\infty} = \frac{v \Sigma f}{\Sigma a}$$

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma a}$$

$$B^2 = \frac{\pi^2}{R^2}$$

(۳-۱۱)



جدول شماره ۵: مقایسه مقدار ضریب تکثیر مؤثر محاسبه شده با پاسخ تحلیلی

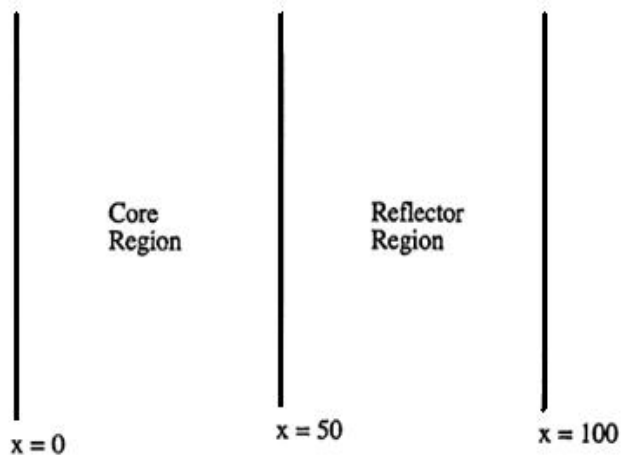
نام کد	تیغه	کره	استوانه
GELES	1.531327	1.496014	1.514606
ANALYTIC	1.531317	1.496078	1.514865
Error Percentage	0.000627	-0.004278	-0.017097

مقادیر بسیار ناچیز خطا نشان دهنده دقت بالای محاسبات برای این مثال می باشد.

## ۱۱-۴- راکتور تیغه‌ای دو ناحیه‌ای و دو گروهی

این مثال به منظور راستی‌آزمایی حل عددی معادله پخش در مسائل دو ناحیه‌ای و دو گروهی توسط آژانس بین‌المللی انرژی اتمی [۶] طراحی شده است. در این مثال یک راکتور تیغه‌ای شامل دو ناحیه قلب و بازتابنده انتخاب شده است که حل در حالت دو گروهی انجام شده است. چنانچه در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود در این راکتور تیغه‌ای، ضخامت ناحیه قلب و بازتابنده به طور مشابه ۵۰ سانتیمتر در نظر گرفته شده است. ضرایب پخش و سطح مقطع لازم از سایت آژانس بین‌المللی انرژی اتمی گرفته شده و در جدول شماره ۶ درج شده است.

در این مثال هدف بدست آوردن مقدار شار در نقاط مختلف و محاسبه ضریب تکثیر مؤثر می‌باشد. برای حل این مسئله از ۱۰۰ المان خطی استفاده شده است.

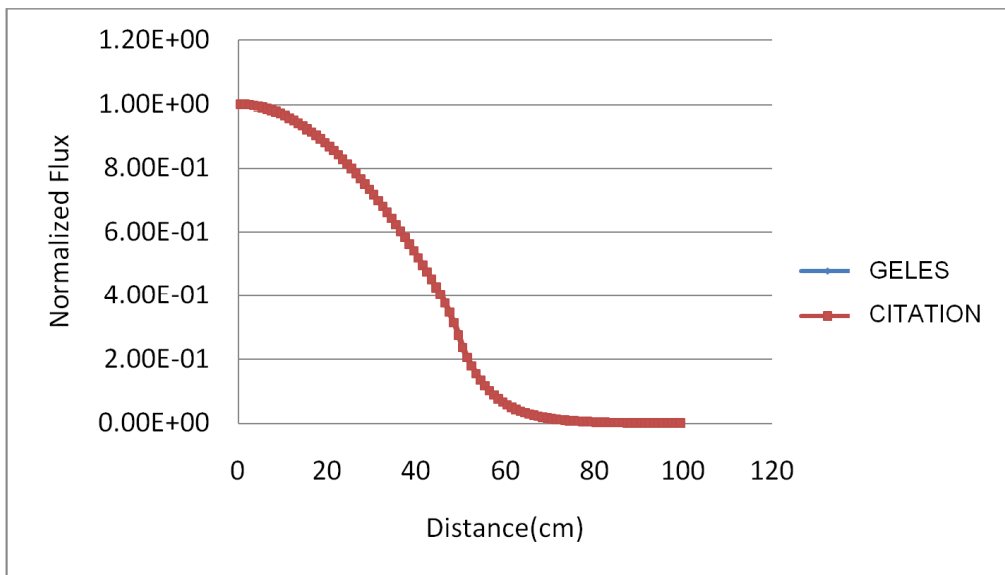


شکل ۱۲: شکل هندسی راکتور دو ناحیه‌ای

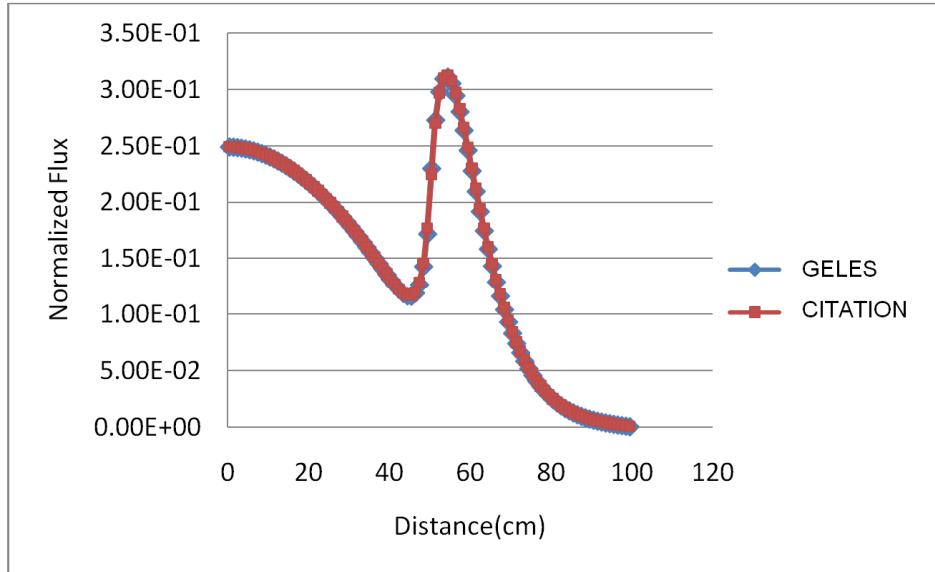
جدول شماره ۶: سطح مقاطع و ضرایب پخش مربوط به راکتور دو ناحیه‌ای

	Core Region Group 1	Core Region Group 2	Reflector Region Group 1	Reflector Region Group 2
Diffusion Coefficient, $D_g$ (cm)	1.5	0.4	1.999996	0.3
Removal Cross Section, $\Sigma_{R,g}$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	0.03	0.08	0.04	0.01
Fission Cross Section, $\nu\Sigma_{f,g}$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	0.0	0.135	0.0	0.0
Probability of a Fission Neutron Born into Group g, $\chi_g$	1.0	0.0	1.0	0.0
Scattering Cross Section, $\Sigma_{s,g'g}$ ( $\text{cm}^{-1}$ )	1→1 0.0 2→1 0.0	1→2 0.02 2→2 0.0	1→1 0.0 2→1 0.0	1→2 0.04 2→2 0.0

با توجه به اینکه مقادیر مرجع شار برای این مثال وجود نداشت لذا با استفاده از کد CITATION (کد نوترونی برای حل معادله پخش به روش اختلاف محدود می‌باشد) این مسئله مدل‌سازی شد و مقدار شار برای دو گروه انرژی سریع و حرارتی پس از حل مسئله توسط برنامه GELES در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نمایش داده شده است. البته باید دقت داشت که مقادیر شار به بیشینه مقدار نرمالیزه شده است.



شکل ۱۳: مقدار شار نرمالیزه شده سریع برای راکتور دو ناحیه‌ای



شکل ۱۴: مقدار شار نرمالیزه شده حرارتی برای راکتور دو ناحیه‌ای

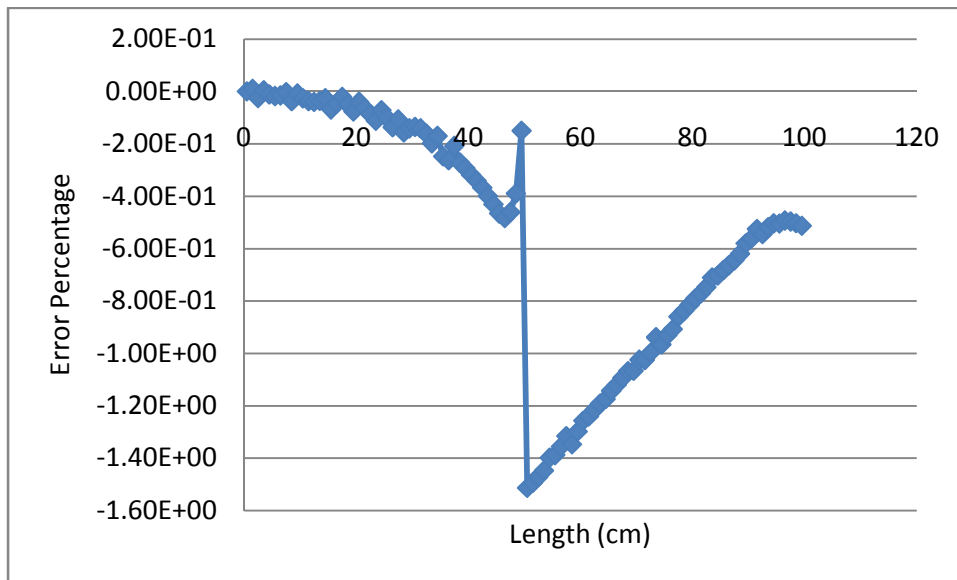
نمودار درصد خطای نسبی شار گروه سریع و حرارتی در مقایسه با نتایجی که از کد CITATION بدست آمده، در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ نشان داده شده است. همچنین مقادیر ضریب تکثیر مؤثر محاسبه شده با مقدار مرجع و با مقدار بدست آمده از کد CITATION در جدول شماره ۷ مقایسه شده است.

جدول شماره ۷: مقایسه ضریب تکثیر مؤثر محاسبه شده با نتیجه کد CITATION برای راکتور دو ناحیه‌ای

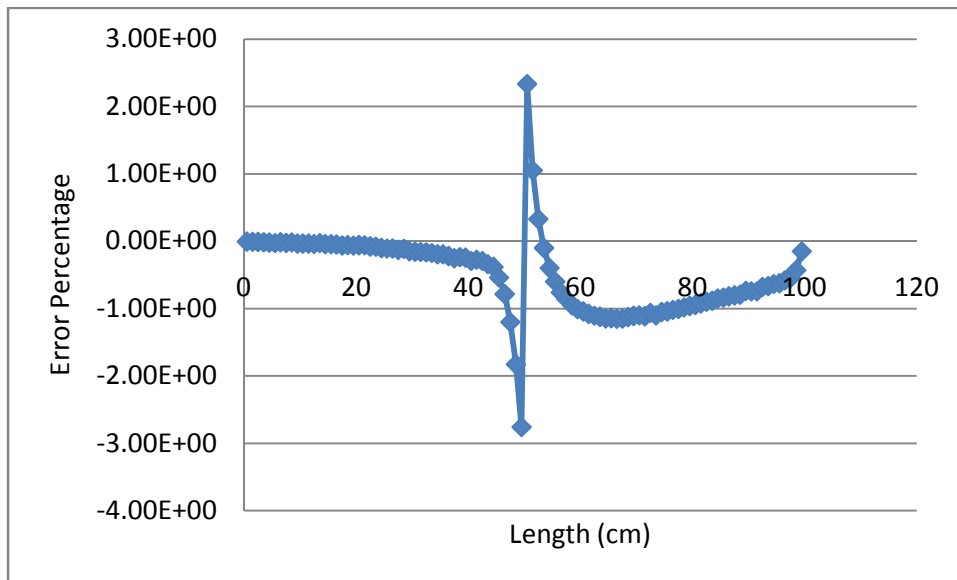
خطای نسبی (%)	ضریب تکثیر مؤثر (CITATION)	ضریب تکثیر مؤثر (GELES)	ضریب تکثیر مؤثر (مرجع)
0.0211	1.08663	1.08677	1.087



از شکل‌های ۱۵ و ۱۶ می‌توان دریافت که مقدار خطا در تمامی نقاط قابل قبول است فقط در مرز بین دو ناحیه مقدار خطا اندکی بیشتر از سایر نقاط می‌باشد. جدول شماره ۷ نشان دهنده دقت بالا در محاسبه ضریب تکثیر مؤثر در مقایسه با مقدار مرجع می‌باشد.



شکل ۱۵: درصد خطای نسبی شار سریع در مقایسه با نتایج کد CITATION



شکل ۱۶: درصد خطای نسبی شار حرارتی در مقایسه با نتایج کد CITATION

در این مسئله اثر مربوط به پراکندگی رو به بالا را نیز می توان بررسی نمود. برای این منظور، مقدار پراکندگی از گروه ۲ به گروه ۱ را برابر  $\Sigma_{12} = 0.01$  قرار می دهیم و با استفاده از کد CITATION مقدار ضریب تکثیر مؤثر را بدست آورده و با مقدار ضریب تکثیر بدست آمده از کد GELES در جدول شماره ۸ مقایسه می کنیم.

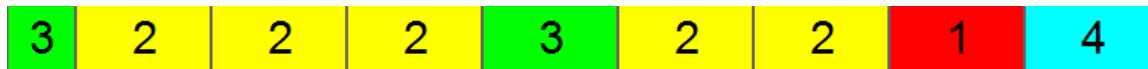
جدول شماره ۸: ضریب تکثیر محاسبه شده برای راکتور دو ناحیه ای با احتساب اثر پراکندگی رو به بالا

خطای نسبی (%)	ضریب تکثیر مؤثر (CITATION)	ضریب تکثیر مؤثر (GELES)
0.001	1.04089	1.04088

نتایج نشان دهنده وجود خطای ناچیز در محاسبات می باشد.

## ۱۱-۵- راکتور تیغه‌ای چند ناحیه‌ای و دو گروهی

در این مثال، یک راکتور تیغه‌ای چند ناحیه‌ای انتخاب شده است که شامل ۴ ماده مختلف با چینش زیر می‌باشد.

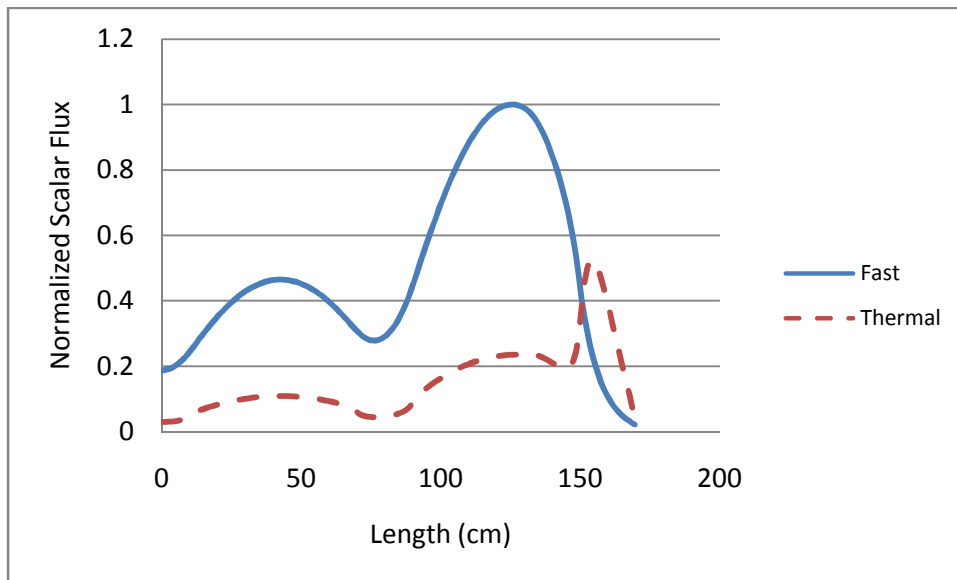


طول ناحیه اول ۱۰ سانتیمتر و طول نواحی دیگر ۲۰ سانتیمتر می‌باشد.

در سمت راست شرط مرزی برهنه و در سمت چپ شرط مرزی بازتابنده کامل اعمال شده است. سطح مقاطع و ضریب پخش مربوط به هر ماده در جدول شماره ۹ ذکر شده است. مقدار شار نرمالیزه شده بدست آمده برای دو گروه انرژی در شکل ۱۷ نمایش داده شده است.

جدول شماره ۹: ضرایب پخش و سطح مقاطع مربوط به راکتور چند ناحیه‌ای و دو گروهی

$v\Sigma_{f2}$	$\Sigma_{a2}$	$\Sigma_{a1}$	$\Sigma_{s1-2}$	$D_2$	$D_1$	نوع ماده
0.135	0.08	0.01	0.02	0.4	1.5	سوخت ۱
0.135	0.085	0.01	0.02	0.4	1.5	سوخت ۲
0.135	0.13	0.01	0.02	0.4	1.5	سوخت ۲ +میله کنترل
0.0	0.01	0.0	0.04	0.3	2.0	بازتابنده



شکل ۱۷: مقدار شار نرمالیزه شده سریع و حرارتی برای راکتور چند ناحیه‌ای

مقدار ضریب تکثیر محاسبه شده توسط برنامه با مقدار مرجع [۷] و مقدار بدست آمده توسط کد CITATION در جدول شماره ۱۰ مقایسه شده است که نشان دهنده خطای ناچیز در محاسبه ضریب تکثیر می باشد.

جدول شماره ۱۰: مقایسه ضریب تکثیر محاسبه شده برای راکتور چند ناحیه‌ای

خطای نسبی (%)	ضریب تکثیر مؤثر (CITATION)	ضریب تکثیر مؤثر (GELES)	ضریب تکثیر مؤثر (مرجع)
0.004	1.004819	1.004957	1.0050



## ۱۱-۶- محاسبه درجه همگرایی روش مورد استفاده

برای بررسی کارایی روش مورد استفاده باید صحت نتایج بررسی شود. یکی از روش‌های بررسی صحت روش بکار رفته محاسبه درجه همگرایی آن می‌باشد.

برای محاسبه درجه همگرایی ابتدا مقدار شار را برای یک مسئله دلخواه با تعداد کمی المان بدست آورده و سپس با استفاده از رابطه زیر مقدار خطای نسبی را بدست می‌آوریم.

$$\text{Relative error} = \left( \frac{\varphi_{cal} - \varphi_{exact}}{\varphi_{exact}} \right) = \epsilon_r \quad (4-11)$$

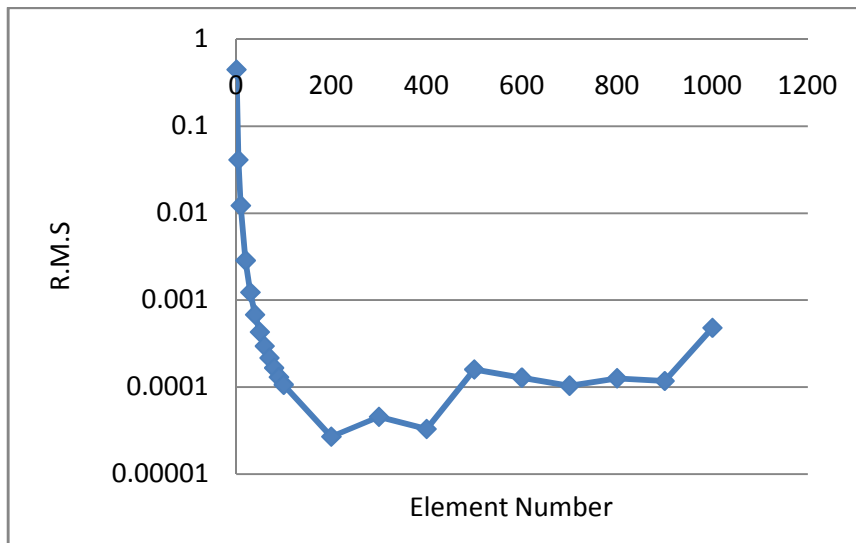
مقدار جواب دقیق در رابطه بالا می‌تواند جواب‌های تحلیلی یا جواب‌های مرجع باشد.

پس از محاسبه مقدار خطای نسبی در تمامی گره‌ها، مقدار ریشه میانگین مربعات خطا از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

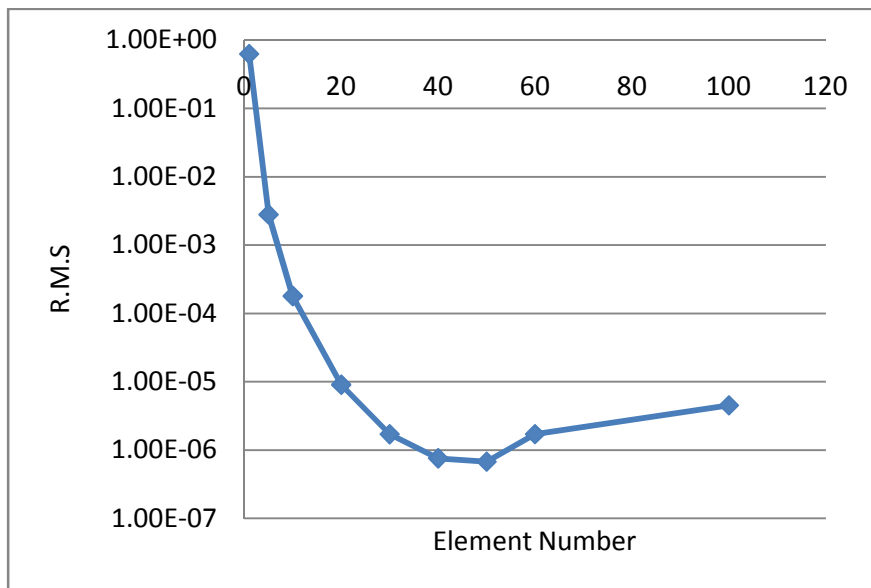
$$R.M.S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum \epsilon_r^2} \quad (5-11)$$

حال مجدداً مسئله را با افزایش تعداد المان‌ها حل نموده و مقدار جدید ریشه میانگین مربعات خطا را محاسبه می‌کنیم. پس از چندین بار افزایش تعداد المان‌ها نمودار مقادیر ریشه مربعات خطا را بر حسب تعداد المان‌ها رسم شده است. مقدار درجه همگرایی شیب نمودار لگاریتمی ریشه میانگین مربعات خطا بر حسب لگاریتم تعداد المان‌ها می‌باشد.

برای بررسی درجه همگرایی این روش از مثال داده شده در بخش ۱۱-۲ استفاده شده است، زیرا مقادیر تحلیلی برای شار در این مسئله موجود است. مسئله به ازای تعداد مختلفی المان خطی و درجه دوم حل شده و نمودار مقادیر ریشه مربعات خطا بر حسب تعداد المان‌ها در شکل‌های ۱۸ و ۱۹ رسم شده است.



شکل ۱۸: نمودار مقادیر ریشه میانگین مربعات خطا بر حسب تعداد المانها (المان خطی)

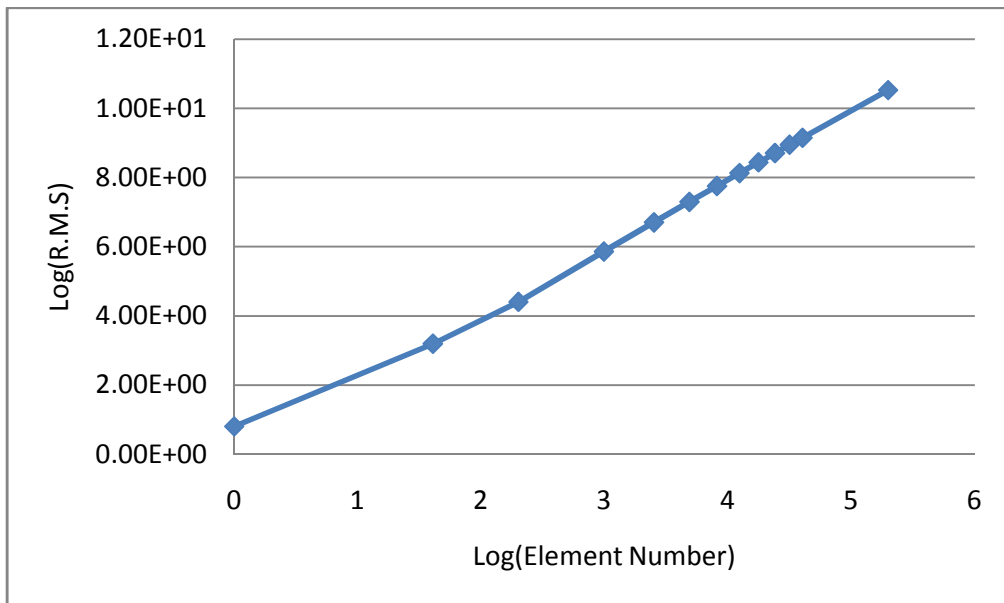


شکل ۱۹: نمودار مقادیر ریشه میانگین مربعات خطا بر حسب تعداد المانها (المان درجه دوم)

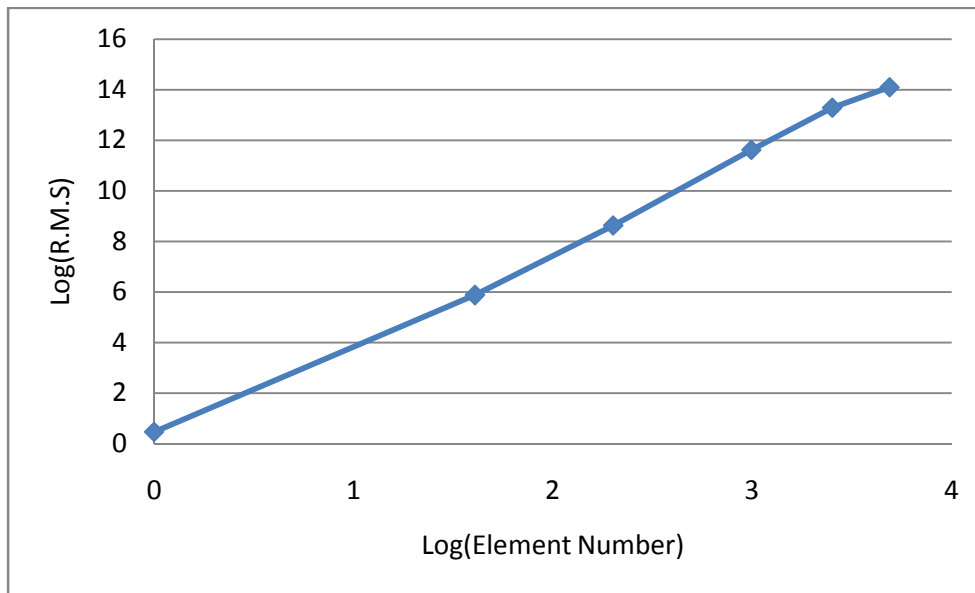
همانطور که از شکل‌های فوق مشاهده می‌شود افزایش تعداد المان‌ها باعث کاهش خطا می‌شود اما از یک مقدار به بعد افزایش تعداد المان‌ها باعث افزایش خطا در این روش می‌شود.

این خطا می‌تواند در اثر نوع متغیرهای بکار رفته در برنامه که متغیرهای اعشاری هستند، بوجود آید که با افزایش دقت این متغیرها به اعشاری مضاعف تا حدودی این خطا کاهش می‌یابد. ممکن است خطا در اثر تعریف نوع تابع بکار رفته در حل مسئله باشد که در این حالت نیاز به یک المان‌بندی بهینه برای حل مسئله مورد نظر است.

در ادامه این نمودارها به صورت لگاریتمی در شکل‌های ۲۰ و ۲۱ رسم می‌شوند تا درجه همگرایی روش مربوطه ارائه شوند.



شکل ۲۰: نمودار محاسبه درجه همگرایی (المان خطی)



شکل ۲۱: نمودار محاسبه درجه همگرایی (المان درجه دوم)

## ۱۲- نتیجه گیری

در این پروژه معادلات پخش چند گروهی با استفاده از تقریب کلاسیک در اصل حداقل مربعات حل گردید. این روش دارای مزایای فراوانی از جمله اعمال آسان شرایط مرزی در داخل اصل وردشی، ساده بودن شکل معادلات در مختصات کروی و استوانه‌ای و نیز استفاده از تقریب‌های دیگر که منجر به حل نودال برای معادله پخش می‌شود، می‌باشد.

راستی‌آزمایی این روش نشان از صحت و دقت بالای نتایج دارد و فقط مقداری خطا در مرزهای داخلی بین نواحی دیده می‌شود که با استفاده از تقریب هیبرید می‌توان این مشکل را مرتفع نمود.

برنامه نوشته شده با نام GELES قابلیت حل عددی معادله پخش چند گروهی را برای سیستم‌های چند ناحیه‌ای، در هندسه‌های یک بعدی فراهم می‌کند.



در ادامه کار می‌توان این اصل را برای هندسه‌های دو بعدی نیز تعمیم داد که با توجه به شکل این اصل وردشی پیش‌بینی می‌شود الگوریتم ساده‌تری برای حل در دو بعد بدست آید.

### ۱۳- مراجع

1. Ackroyd, R.T. (1997). 'Finite element methods for particle transport applications to reactor and radiation physics. research studies press Ltd., England.
2. Magri, F. (1974). Variational Formulation for Every Linear Equation. Int'l J. Eng. Sci., 12, pp. 537-549.
3. Synge, J.L., (1957). The Hypercircle method in mathematical physics. Cambridge University press, England.
4. Prenter, P.M. (1975). Splines and Variational methods. Wiley, New York.
5. Smith, P. (1985). 'Convexity methods in variational calculus'. Research studies press, Taunton, U.K. and Wiley, New York.
6. McConnel, A.J. (1951). The hypercircle method of approximation for a system of partial differential equations of second order. Proc. R. Irish Acad., 54, A pp. 263-290.

7. Ackroyd, R.T., (1986). A finite element methods for diffusion theory embracing nodal and difference methods, Prog. Nucl. Energy 18, 7-20.
8. Ackroyd, R.T., (1987). A least-squares principle unifying finite element, finite difference and nodal methods for diffusion theory, Prog. Nucl. Energy 19, 137-172.
9. Zienkiewicz, O. C., Taylor R. L., (2000). The finite element meyhod. Vol. 1 (The Basis), 5th Ed., Butterworth-Heinemann.
10. Rao S. S., (2004). The finite element method in engineering, 4th Ed., Elsevier Science & Technology.