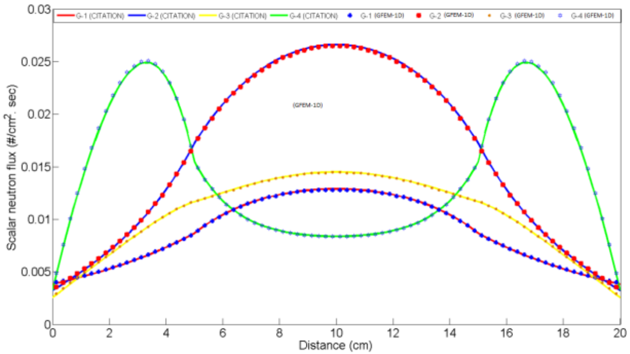
شرکت ساخت و راه‌اندازی نیروگاه‌های اتمی

مرکز محاسبات پیشرفته هسته‌ای

کد محاسباتی پخش نوترون یک‌بعدی به روش المان محدود گلرکین



گزارش فنی GFEM-1D

بسته اول– ویرایش ۱ - مهر ۱۳۹۱

ANC-TEC-DES-FG-100

فهرست مطالب

لیست شکل‌ها

لیست جدول‌ها

۱- چکیده

در این گزارش، نحوه حل معادله پخش نوترون برای هندسه تیغه‌ای با استفاده از روش المان محدود گلرکین برای مسایل از نوع جستجوی ضریب تکثیر مؤثر نوترونی و چشمه ثابت توضیح داده می‌شود. در ادامه، الحاقی معادله پخش نوترون با استفاده از روش توضیح داده شده حل می‌شود. در نهایت، نتایج حاصل از کد توسعه داده شده که GFEM-1D نامگذاری شده با نتایج حاصل از حل تحلیلی و یا کدهای کامپیوتری دیگری همچون CITATION، مورد راستی‌آزمایی قرار گرفته و صحت آنها بررسی می‌شود.

۲- کلیدواژه

روش المان محدود گلرکین، شار نوترونی، شار الحاقی.

۳- اختصارات

عبارت	عبارت اختصاری	توضیح
Finite Element Method	FEM	روش المان محدود
Galerkin Finite Element Method	GFEM	روش المان محدود گلرکین

۴- مقدمه

در این گزارش، در فصل ششم، نحوه حل معادله پخش نوترون یک‌گروهی با استفاده از روش گلرکین توضیح داده می‌شود. روش گلرکین یکی از روش‌های باقیمانده وزن یافته است که هدف آن، کمینه کردن خطا (انتگرال حاصلضرب تابع وزن در تابع باقیمانده) می‌باشد. در این روش، تابع وزن برابر پاسخ پیشنهادی بدون ضریب ثابت در نظر گرفته می‌شود.

در فصل هفتم، نحوه حل معادله پخش نوترون چندگروهی با استفاده از روش گلرکین توضیح داده می‌شود. گسسته‌سازی معادلات پخش نوترون چندگروهی با استفاده از روش عناصر محدود گلرکین انجام شده و سپس با حل هر یک از انتگرال‌ها روی عناصر موجود، ماتریس‌های محلی بدست می‌آیند. از سرهم‌بندی[۱] ماتریس‌های محلی حاصل، ماتریس سراسری بدست آورده می‌شود. دستگاه معادلات حاصل از نوع مقدارویژه بوده و با استفاده از روش تکرار قدرت حل می-

[2] Assembling

شود. در نتیجه این محاسبات، ضریب تکثیرمؤثر نوترونی و توزیع شار نوترونی در هر یک از گروه‌های انرژی بدست آورده می‌شود.

در فصل هشتم، راستی‌آزمایی محاسبات انجام شده و نتایج حاصل از نرم‌افزار GFEM-1D با نتایج داده شده در مراجع مقایسه می‌شود.

فصل دهم نیز به بحث و نتیجه‌گیری اختصاص یافته است.

۵- دامنه گزارش

نرم افزار GFEM-1D می‌تواند برای حل معادله پخش نوترون چندگروهی و الحاقی آن در هندسه تیغه‌ای یک‌بعدی به کار برده شود. در این گزارش، نتایج بدست آمده برای مسایل آزمون با مقادیر محاسبه شده از روش تحلیلی یا کدهای دیگر مقایسه شده و صحت محاسبات انجام شده تأیید می‌شود. محاسبات می‌تواند برای معادله پخش نوترون چندگروهی

انجام شود و هیچ نوع محدودیتی برای در نظر گرفتن پراکندگی از گروه‌های انرژی پایین به گروه‌های انرژی بالا وجود ندارد.

۶- حل معادله پخش نوترون یک‌گروهی-یک‌بعدی به روش المان محدود گلرگین

۶-۱- کلیاتی در مورد حل معادله پخش نوترون با استفاده از روش المان محدود

در این فصل، روش حل معادله پخش نوترون یک‌گروهی در هندسه تیغه‌ای یک‌بعدی با استفاده از روش گلرکین معرفی می‌شود. برای سادگی، در ابتدا محیط یک‌ناحیه‌ای در نظر گرفته می‌شود. معادله پخش نوترون در حالت چندگروهی بصورت (۶-۱) می‌باشد:

$$-D_g\nabla^2\phi_g(r)+\Sigma_{r,g}\phi_g(r)=\frac{\chi_g}{k_{eff}}\sum_{g^{'}=1}^{G}\nu\Sigma_{f,g^{'}}\phi_{g^{'}}(r)+\sum_{g^{'}=1}^{g-1}\Sigma_{g^{'}\to g}\phi_{g^{'}}(r)+S_g(r)\qquad g=1,2,...,G \quad (۶-۱)$$

در این رابطه، D_g ضریب پخش مربوط به گروه g، $\Sigma_{r,g}$ سطح مقطع ماکروسکوپی برداشت گروه g، $\Sigma_{f,g^{'}}$ سطح مقطع ماکروسکوپی شکافت گروه $g^{'}$، $\Sigma_{g^{'}\to g}$ سطح مقطع ماکروسکوپی پراکندگی از گروه $g^{'}$ به گروه g، $S_g(r)$

چشمه نوترون خارجی که دارای انرژی در محدوده گروه g بوده، k_{eff} ضریب تکثیرمؤثر نوترونی، $\phi_g(r)$ شار نوترونی گروه g و χ_g طیف نوترونی گروه g است.

با تعریف $K_g^2 = \frac{\Sigma_{rg}}{D_g}$ و تقسیم دو طرف معادله (۶-۱) بر D_g، معادله زیر بدست می‌آید:

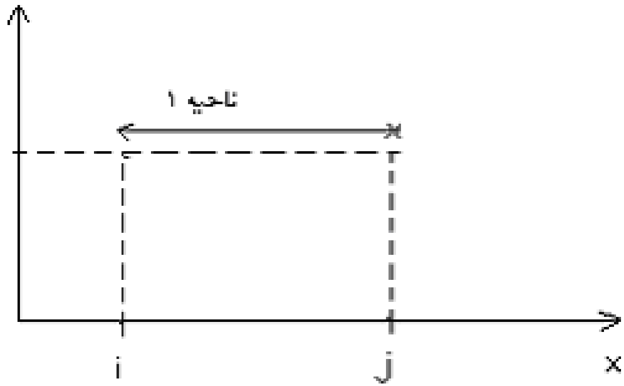
$$-\nabla^2\phi_g(r) + K_g^2\phi_g(r) = \frac{\chi_g}{k_{eff}D_g}\sum_{g'=1}^{G}\nu\Sigma_{f,g'}\phi_{g'}(r) + \frac{1}{D_g}\sum_{g'=1}^{g-1}\Sigma_{g'\to g}\phi_{g'}(r) + \frac{1}{D_g}S_g(r) \qquad (۶-۲)$$

با فرض یک گروه انرژی، معادله پخش نوترون برای تیغه یک‌بعدی در محیط غیر شکافت‌پذیر بصورت معادله (۶-۳) نوشته می‌شود:

$$-\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + K^2\phi(x) = \frac{S}{D} \qquad (۶-۳)$$

برای حل این معادله با استفاده از روش المان محدود لازم است که ابتدا تابع $\phi(x)$ در هر ناحیه با یک چندجمله‌ای تقریب زده شود. این چندجمله‌ای می‌تواند درجه یک (تقریب خطی) و یا چندجمله‌ای با درجات بالاتر باشد. در ادامه این بخش، از تقریب خطی استفاده می‌شود.

با استفاده از تقریب خطی، شار در هر المان محیط یک‌ناحیه‌ای نشان داد شده در شکل ۱، بصورت تابع خطی از مکان نوشته می‌شود:



شکل ۱: تیغه متشکل از یک المان

$$\phi^{(e)}(x) = a_1^{(e)} + a_2^{(e)}x \tag{۴-۶}$$

در رابطه (۶-۴)، اندیس بالا نشان دهنده شماره المان است که برای حالت کلی که ناحیه متشکل از چندین المان باشد، نوشته شده است. a_1 و a_2 ضرایب ثابتی هستند که در هر المان تعریف می‌شوند. اگر شار در نقاط $x_i^{(e)}$ و $x_j^{(e)}$ نوشته شود، ضرایب ثابت بصورت معادلات (۶-۵) و (۶-۶) بر حسب مقدار شار این نقاط محاسبه می‌شوند.

$$a_1^{(e)} = \frac{\phi_i^{(e)} x_j^{(e)} - \phi_j^{(e)} x_i^{(e)}}{x_j^{(e)} - x_i^{(e)}} \qquad (۶-۵)$$

$$a_2^{(e)} = \frac{\phi_j^{(e)} - \phi_i^{(e)}}{x_j^{(e)} - x_i^{(e)}} \qquad (۶-۶)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\phi^{(e)}(x) = \left(\frac{x_j^{(e)} - x}{x_j^{(e)} - x_i^{(e)}}\right)\phi_i^{(e)} + \left(\frac{x - x_i^{(e)}}{x_j^{(e)} - x_i^{(e)}}\right)\phi_j^{(e)} \qquad (۶-۷)$$

با تعریف $N_1^{(e)}(x)$ و $N_2^{(e)}(x)$ بصورت:

$$N_1^{(e)}(x)=\frac{x_j^{(e)}-x}{x_j^{(e)}-x_i^{(e)}} \tag{۸-۶}$$

$$N_2^{(e)}(x)=\frac{x-x_i^{(e)}}{x_j^{(e)}-x_i^{(e)}} \tag{۹-۶}$$

می‌توان $\phi^{(e)}(x)$ را بصورت رابطه (۶-۱۰):

$$\phi^{(e)}(x)=N_1^{(e)}\phi_i^{(e)}+N_2^{(e)}\phi_j^{(e)} \tag{۱۰-۶}$$

و یا بصورت برداری، همانند رابطه (۶-۱۱) نوشت:

$$\phi^{(e)}(x)=\underline{N}^{(e)T}\phi^{(e)} \tag{۱۱-۶}$$

مؤلفه‌های رابطه (۶-۱۱) بصورت معادلات (۶-۱۲) و (۶-۱۳) تعریف می‌شوند:

$$\underline{N}^{(e)} = [N_1^{(e)} \qquad N_2^{(e)}]^T \tag{۶-۱۲}$$

$$\phi^{(e)} = [\phi_i^{(e)} \quad \phi_j^{(e)}]^T \tag{۶-۱۳}$$

توجه شود که N_1 و N_2 در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$N_1(x_i) = 1, N_1(x_j) = 0 \tag{۶-۱۴}$$

$$N_2(x_i) = 0, N_2(x_j) = 1 \tag{۶-۱۵}$$

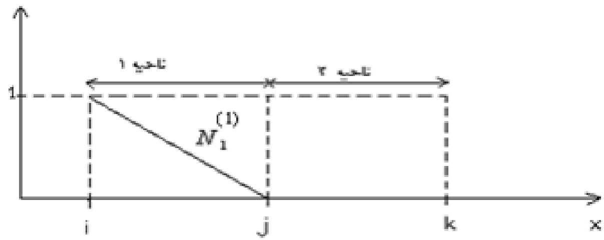
$$N_1(x) + N_2(x) = 1 \qquad , x_i \le x \le x_j \tag{۶-۱۶}$$

برای مسئله دو ناحیه‌ای، معادلات بالا بصورت روابط زیر تبدیل می‌شوند:

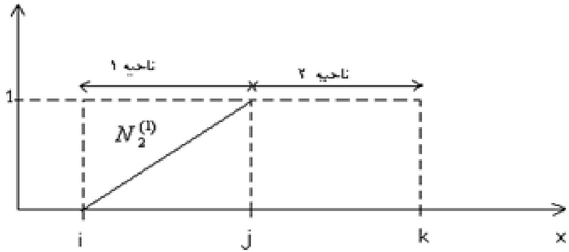
$$\phi^{(1)}(x) = N_1^{(1)}(x)\phi_i + N_2^{(1)}(x)\phi_j \,, x_i \le x \le x_j \qquad (۱۷-۶)$$

$$\phi^{(2)}(x) = N_1^{(2)}(x)\phi_j + N_2^{(2)}(x)\phi_k \,, x_j \le x \le x_k \qquad (۱۸-۶)$$

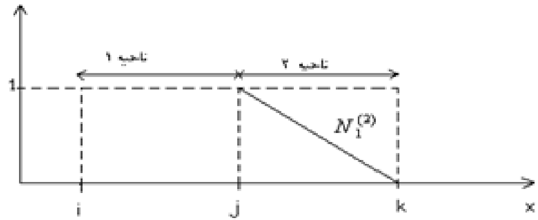
که $N_1^{(1)}$، $N_2^{(1)}$، $N_1^{(2)}$ و $N_2^{(2)}$ در شکل‌های ۲ تا ۶ رسم شده‌اند.



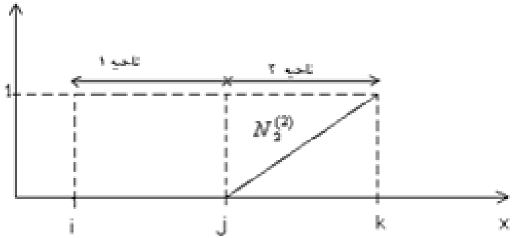
شکل ۲: مؤلفه اول تابع شکل محلی در المان اول



شکل ۳: مؤلفه دوم تابع شکل محلی در المان اول



شکل ۴: مؤلفه اول تابع شکل محلی در المان دوم



شکل ۵: مؤلفه دوم تابع شکل محلی در المان دوم

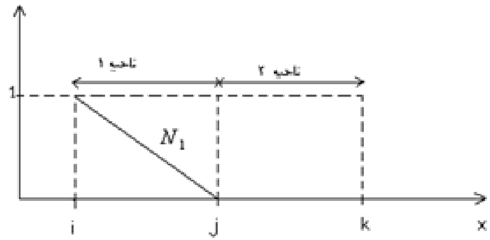
شار نوترونی در هر دو ناحیه بصورت کلی تر زیر:

$$\phi(x) = N_1(x)\phi_i + N_2(x)\phi_j + N_3(x)\phi_k \quad , x_i \le x \le x_k \tag{۶-۱۹}$$

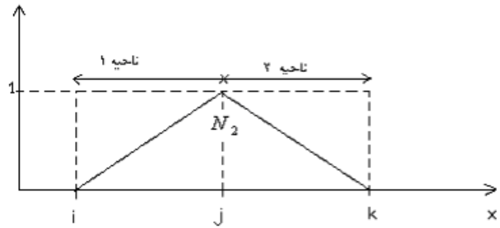
و یا بصورت برداری زیر نوشته می‌شود:

$$\phi(x) = \sum_{e=1}^{2} \underline{N}^{(e)T} \phi^{(e)} \tag{۶-۲۰}$$

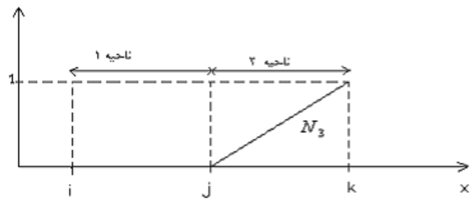
توابع شکل سراسری N_1، N_2 و N_3، بصورت شکل‌های ۶ تا ۸ نشان داده می‌شود:



شکل ۶: مؤلفه اول تابع شکل سراسری



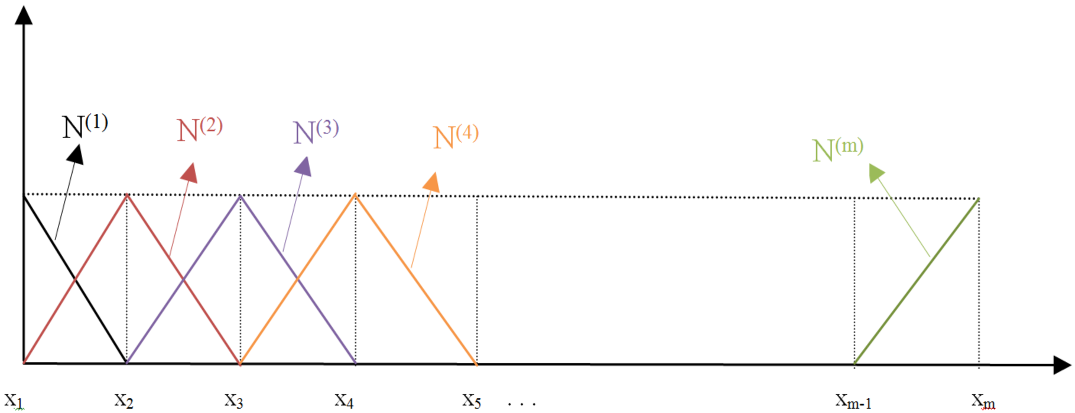
شکل ۷: مؤلفه دوم تابع شکل سراسری



شکل ۸: مؤلفه سوم تابع شکل سراسری

در حالت کلی، تابع شکل سراسری برای n گره بصورت معادله (۶-۲۱) نمایش داده می‌شود:

$$\phi(x) = \sum_{e=1}^{n} \underline{N}^{(e)T} \phi^{(e)} \tag{۶-۲۱}$$



شکل ۹: توابع شکل سراسری

۶-۲- حل معادله پخش نوترون یک‌گروهی-یک‌ناحیه‌ای

برای حل معادله پخش به روش گلرکین، ابتدا دو طرف معادله (۶-۳) در تابع وزن ضرب شده و سپس روی دامنـه تیغـه مورد نظر انتگرال گرفته می‌شود. تابع وزن $w(x)$ بصورت معادله (۶-۲۲) انتخاب می‌شود:

$$w(x) = W^T \underline{N}(x) \qquad (۶-۲۲)$$

W^T یک بردار ثابت غیر صفر و $\underline{N}(x)$، تابع شکل سراسری است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\int_{xi}^{xe} dx\ w(x)\left(-\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + K^2\phi(x)\right) = \int_{xi}^{xe} dx\, w(x)\frac{S(x)}{D} \qquad (۶-۲۳)$$

و یا:

$$\int_{xi}^{xe} dx\ w(x)(-\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}+K^2\phi(x)-\frac{S(x)}{D})=0 \qquad (۲۴-۶)$$

با جایگذاری معادله (۶-۲۲) در معادله (۶-۲۴)، می‌توان نوشت:

$$W^T\int_{xi}^{xe} dx\ \underline{N}(x)(-\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}+K^2\phi(x)-\frac{S(x)}{D})=0 \qquad (۲۵-۶)$$

چون W^T یک بردار غیر صفر است، معادله (۶-۲۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\int_{xi}^{xe} dx\ \underline{N}(x)(-\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}+K^2\phi(x)-\frac{S(x)}{D})=0 \qquad (۲۶-۶)$$

از طرفی روابط زیر وجود دارند:

$$-\underline{N}\frac{d^2}{dx^2}\phi = (\frac{d}{dx}\underline{N})(\frac{d}{dx}\phi) - \frac{d}{dx}(\underline{N}\frac{d}{dx}\phi) \tag{۶-۲۷}$$

با جایگذاری معادله (۶-۲۷) در (۶-۲۶)، معادله زیربدست می‌آید:

$$\sum_{e=1}^{E}[\int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx((\frac{d}{dx}\underline{N}^{(e)}(x)(\frac{d}{dx}\phi^{(e)}(x))) + K^{(e)2}\underline{N}^{(e)}(x)\phi^{(e)}(x) - \frac{1}{D^{(e)}}\underline{N}^{(e)}(x)S^{(e)}(x) - \frac{d}{dx}(\underline{N}^{(e)}(x)\frac{d}{dx}\phi^{(e)}(x)))] = 0 \tag{۶-۲۸}$$

همچنین، با جایگذاری $\phi^{(e)}(x) = \underline{N}^{(e)}(x)\phi^{(e)}$ در معادله (۶-۲۸)، معادله (۶-۲۹) حاصل می‌شود:

$$\sum_{e=1}^{E}[\int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx(\frac{d}{dx}\underline{N}^{(e)}(x))(\frac{d}{dx}\underline{N}^{(e)T}(x))\phi^{(e)}+K^{(e)2}\int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx\underline{N}^{(e)}(x)\underline{N}^{(e)T}(x)\phi^{(e)}-\frac{1}{D^{(e)}}\int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx\underline{N}^{(e)}(x)S^{(e)}(x)-$$
$$\int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx\frac{d}{dx}(\underline{N}^{(e)}(x)\frac{d}{dx}\underline{N}^{(e)T}(x)\phi^{(e)}))]=0 \quad (۶-۲۹)$$

در این روابط، $K^{(e)2}=\frac{\Sigma_a^{(e)}}{D^{(e)}}$ است که در آن $\Sigma_a^{(e)}$، سطح مقطع جذب در المان e و $D^{(e)}$ ضـریب پخـش نـوترونی در آن المان می‌باشد.

انتگرال‌های معادله (۶-۲۹) بصورت جداگانه محاسبه می‌شوند ($x_i^{(e)}$ و $x_e^{(e)}$، به ترتیب نقاط ابتدایی و انتهایی المان e ام هستند). در هر المان، تابع شکل بصورت معادله (۶-۳۰) تعریف می‌شود:

$$\underline{N}^{(e)}(x)=[\frac{x_e-x}{x_e-x_i} \quad \frac{x-x_i}{x_e-x_i}] \tag{۶-۳۰}$$

جمله اول در رابطه (۶-۲۹) پس از انتگرالگیری بصورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{e=1}^{E}\int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx(\frac{d}{dx}\underline{N}^{(e)}(x))(\frac{d}{dx}\phi^{(e)}(x))=\sum_{e=1}^{E}\int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx(\frac{d}{dx}\underline{N}^{(e)}(x))(\frac{d}{dx}\underline{N}^{(e)T}(x))\phi^{(e)}=$$
$$\sum_{e=1}^{E}\int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx(\begin{bmatrix}-\frac{1}{\ell^{(e)}}\\ \frac{1}{\ell^{(e)}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\ell^{(e)}} & \frac{1}{\ell^{(e)}}\end{bmatrix}\phi^{(e)}=\sum_{e=1}^{E}\begin{bmatrix}\frac{1}{\ell^{(e)}} & -\frac{1}{\ell^{(e)}}\\ -\frac{1}{\ell^{(e)}} & \frac{1}{\ell^{(e)}}\end{bmatrix}\phi^{(e)}, \qquad \ell^{(e)}=x_e^{(e)}-x_i^{(e)} \tag{۶-۳۱}$$

عبارت دوم در معادله (۶-۲۹) بصورت معادله (۶-۳۲) در می‌آید:

$$\sum_{e=1}^{E} k^{(e)2} \int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx\, \underline{N}^{(e)}(x)\phi^{(e)}(x) = \sum_{e=1}^{E} k^{(e)2} \int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx(\frac{d}{dx}\underline{N}^{(e)}(x)\underline{N}^{(e)T}(x)\phi^{(e)} =$$

$$\sum_{e=1}^{E} k^{(e)2} \int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx(\begin{bmatrix} \frac{x_e^{(e)}-x}{\ell^{(e)}} \\ \frac{x-x_i^{(e)}}{\ell^{(e)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x_e^{(e)}-x}{\ell^{(e)}} & \frac{x-x_i^{(e)}}{\ell^{(e)}} \end{bmatrix} \phi^{(e)} = \sum_{e=1}^{E} k^{(e)2} \begin{bmatrix} \frac{\ell^{(e)}}{3} & \frac{\ell^{(e)}}{6} \\ \frac{\ell^{(e)}}{3} & \frac{\ell^{(e)}}{6} \end{bmatrix} \phi^{(e)} \qquad (۳۲-۶)$$

برای ساده‌سازی محاسبه عبارت سوم در رابطه (۶-۲۹)، مقدار ثابتی برای چشمه نوترون در نظر گرفته می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sum_{e=1}^{E} \frac{1}{D_g^{(e)}} \int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx\, \underline{N}^{(e)}(x) S_{0,g}^{(e)}(x) = \sum_{e=1}^{E} \frac{1}{D_g^{(e)}} S_{0,g}^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{\ell^{(e)}}{2} \\ \frac{\ell^{(e)}}{2} \end{bmatrix} \qquad (۳۳-۶)$$

و آخرین عبارت در معادله (۶-۲۹) نیز بصورت معادله (۶-۳۴) در می‌آید:

$$\sum_{e=1}^{E}\int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx \frac{d}{dx}\left(N_-^{(e)}(x)\frac{d}{dx}\phi^{(e)}(x)\right)=\int_{x_i}^{x_e} dx \frac{d}{dx}\left(N_-(x)\frac{d}{dx}\phi^{(e)}(x)\right) \qquad (۶-۳۴)$$

با جایگذاری تابع شکل در معادله (۶-۳۴) و انتگرالگیری، معادله (۶-۳۵) بدست می‌آید:

$$\underline{N}(x)\frac{d}{dx}\phi^{(e)}(x)\Big|_{x_i}^{x_e}=\left.\begin{bmatrix}N_1(x)\\N_2(x)\\.\\.\\.\\N_{n-1}(x)\\N_n(x)\end{bmatrix}\frac{d}{dx}\phi(x)\right|_{x=x_e}-\left.\begin{bmatrix}N_1(x)\\N_2(x)\\.\\.\\.\\N_{n-1}(x)\\N_n(x)\end{bmatrix}\frac{d}{dx}\phi(x)\right|_{x=x_i}=$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\.\\.\\.\\1\end{bmatrix}\frac{d}{dx}\phi(x)\Big|_{x=x_e}-\begin{bmatrix}1\\0\\.\\.\\.\\0\end{bmatrix}\frac{d}{dx}\phi(x)\Big|_{x=x_i}=\begin{bmatrix}-\frac{d}{dx}\phi(x)\Big|_{x=x_i}\\0\\.\\.\\.\\\frac{d}{dx}\phi(x)\Big|_{x=x_e}\end{bmatrix} \qquad (۶-۳۵)$$

برای شرط مرزی خلأ، $\phi=-2D\,a_n.\nabla\phi$ است که a_n بردار نرمال عمود بر سطح و a_x بردار واحد محور xها می‌باشد. برای تیغه یک‌بعدی، شرط مرزی خلأ بصورت $\phi(x)=-2D(a_n.a_x)\dfrac{d}{dx}\phi(x)$ بیان می‌شود. برای مرز بازتابنده کامل، مشتق شار در مرز برابر صفر خواهد شد ($\dfrac{d}{dx}\phi(x)=0$).

به عنوان مثال، اگر در $x=x_i$ شرط مرزی خلأ در نظر گرفته شود، از آنجا که در این مرز $a_n=-a_x$ می‌باشد، شرط مرزی سمت چپ بصورت $\phi(x)=-2D(a_n.a_x)\dfrac{d}{dx}\phi(x)$ یا $\phi(x)=2D\dfrac{d}{dx}\phi(x)$ می‌باشد و اگر شرط مرزی سمت راست، بازتابنده کامل باشد، رابطه $\dfrac{d}{dx}\phi=0$ برقرار می‌شود و بنابراین:

$$\begin{bmatrix} -\frac{d}{dx}\phi_g(x)\Big|_{x=x_i} \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ \frac{d}{dx}\phi_g(x)\Big|_{x=x_e} \end{bmatrix} \qquad (۶-۳۶)$$

بعد از محاسبه این ماتریسها برای همه المانها، باید آنها را سرهم‌بندی کرد.

طریقه سرهم‌بندی کردن

این مطلب با یک مثال نشان داده می‌شود. فرض کنید مطابق شکل ۱۰، یک تیغه به چهار ناحیه تقسیم شده باشد. بنابراین:

شکل ۱۰: تیغه یک بعدی متشکل از ۴ ناحیه

$$\phi = [\phi_1 \;\; \phi_2 \;\; \phi_3 \;\; \phi_4 \;\; \phi_5] \qquad (۳۷-۶)$$

$$N=\left[N_1\ \ N_2\ \ N_3\ \ N_4\ \ N_5\right]^T \tag{۳۸-۶}$$

ناحیه ۱ شامل گره‌های ۱ و ۲ می‌باشد و در این ناحیه می‌توان نوشت:

$$\underline{N}^{(1)}=\left[N_1^{(1)}\ \ N_2^{(1)}\ 0\ 0\ 0\right]^T \tag{۳۹-۶}$$

$$N_1^{(1)}=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}\qquad N_2^{(1)}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{۴۰-۶}$$

ناحیه ۲ شامل گره‌های ۲ و ۳ می‌باشد و در این ناحیه، معادلات (۶-۴۱) و (۶-۴۲) برقرار می‌باشند:

$$\underline{N}^{(2)}=\left[0\ \ N_1^{(2)}\ \ N_2^{(2)}\ \ 0\ 0\right]^T \tag{۴۱-۶}$$

$$N_1^{(2)}=\frac{x_3-x}{x_3-x_2},N_2^{(2)}=\frac{x-x_2}{x_3-x_2} \tag{۴۲-۶}$$

ناحیه ۳ شامل گره‌های ۳ و ۴ می‌باشد و در این ناحیه می‌توان نوشت:

$$\underline{N}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_1^{(3)} & N_2^{(3)} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{۴۳-۶}$$

$$N_1^{(3)} = \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3}, N_2^{(3)} = \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} \tag{۴۴-۶}$$

ناحیه ۴ شامل گره‌های ۴ و ۵ می‌باشد و در این ناحیه، معادلات زیر برقرار می‌باشند:

$$\underline{N}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_1^{(4)} & N_2^{(4)} \end{bmatrix}^T \tag{۴۵-۶}$$

$$N_1^{(4)} = \frac{x_5 - x}{x_5 - x_4}, N_2^{(4)} = \frac{x - x_4}{x_5 - x_4} \tag{۴۶-۶}$$

برای محاسبه انتگرال $\int_{x_3}^{x_4} dx\, \underline{N}\ \underline{N}^T$ در المان سوم می‌توان نوشت:

$$\int_{x_3}^{x_4} dx\underline{N}\underline{N}^T = \int_{x_3}^{x_4} dx\ \underline{N}^{(3)}\underline{N}^{T\,(3)} = \int_{x_3}^{x_4} dx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{N}_1^{(3)} \\ \underline{N}_2^{(3)} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{N}_1^{(3)} \\ \underline{N}_2^{(3)} \\ 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_5-x_4}{3} & \frac{x_5-x_4}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_5-x_4}{6} & \frac{x_5-x_4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell^{(3)}}{3} & \frac{\ell^{(3)}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell^{(3)}}{6} & \frac{\ell^{(3)}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۴۷-۶)$$

در صورت ساده تر، به عنوان مثال در ناحیه۳، بردار $\underline{N}^{(3)}$ را می‌توان بصورت معادله (۶-۴۸) نوشت:

$$\underline{N}^{(3)} = \left[N_1^{(3)} \;\; N_2^{(3)} \right]^T \qquad (۶-۴۸)$$

در این صورت معادله (۶-۴۹) بدست می‌آید:

$$\int_{x_3}^{x_4} dx \underline{N}\,\underline{N}^T = \int_{x_3}^{x_4} dx \; \underline{N}^{(3)} \underline{N}^{(3)T} = \int_{x_3}^{x_4} dx \begin{bmatrix} \underline{N}_1^{(3)} \\ \underline{N}_2^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{N}_1^{(3)} \\ \underline{N}_2^{(3)} \end{bmatrix}^T =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x_4 - x_3}{3} & \frac{x_4 - x_3}{6} \\ \frac{x_4 - x_3}{6} & \frac{x_4 - x_3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\ell^{(3)}}{3} & \frac{\ell^{(3)}}{6} \\ \frac{\ell^{(3)}}{6} & \frac{\ell^{(3)}}{3} \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}^{(3)} \qquad (۶-۴۹)$$

سایر ماتریس‌های محلی نیز مشابه ماتریس محلی $\underline{\underline{A}}^{(3)}$ تعریف می‌شوند. از سرهم‌بندی ماتریس‌های محلی، ماتریس سراسری بصورت معادله (۶-۵۰) تعریف می‌شود:

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{e=1}^{4} \underline{\underline{A}}^{(e)} = \sum_{e=1}^{4} \int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx \underline{N}^{(e)} \underline{N}^{(e)T} \qquad (۵۰-۶)$$

در مورد ماتریس‌های محلی، به عنوان مثال در مورد ماتریس محلی $\underline{\underline{A}}^{(3)}$ باید یادآوری کرد که چون المان سوم از گره‌های ۳ و ۴ تشکیل شده است، بایستی به موارد زیر توجه کرد:

المان $a_{1,1}^{(3)}$ ماتریس محلی $\underline{\underline{A}}^{(3)}$ با المان $a_{3,3}$ ماتریس جامع $\underline{\underline{A}}$ جمع می‌شود،

المان $a_{1,2}^{(3)}$ ماتریس محلی $\underline{\underline{A}}^{(3)}$ با المان $a_{3,4}$ ماتریس جامع $\underline{\underline{A}}$ جمع می‌شود،

المان $a_{2,1}^{(3)}$ ماتریس محلی $\underline{\underline{A}}^{(3)}$ با المان $a_{4,3}$ ماتریس جامع $\underline{\underline{A}}$ جمع می‌شود،

المان $a_{2,2}^{(3)}$ ماتریس محلی $\underline{\underline{A}}^{(3)}$ با المان $a_{4,4}$ ماتریس جامع $\underline{\underline{A}}$ جمع می‌شود.

و در حالت کلی اگر المان e شامل گره‌های m_1 و m_2 باشد:

المان $a_{1,1}^{(e)}$ ماتریس محلی $\underline{\underline{A}}^{(e)}$ با المان a_{m_1,m_1} ماتریس جامع $\underline{\underline{A}}$ جمع می‌شود،

المان $a_{1,2}^{(e)}$ ماتریس محلی $\underline{\underline{A}}^{(e)}$ با المان a_{m_1,m_2} ماتریس جامع $\underline{\underline{A}}$ جمع می‌شود،

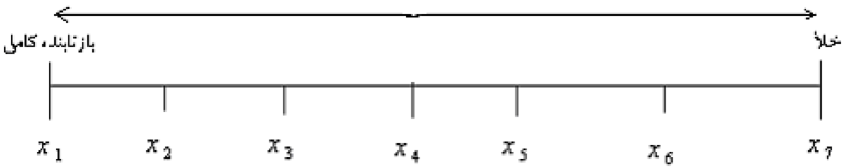
المان $a_{2,1}^{(e)}$ ماتریس محلی $\underline{\underline{A}}^{(e)}$ با المان a_{m_2,m_1} ماتریس جامع $\underline{\underline{A}}$ جمع می‌شود،

المان $a_{2,2}^{(e)}$ ماتریس محلی $\underline{\underline{A}}^{(e)}$ با المان a_{m_2,m_2} ماتریس جامع $\underline{\underline{A}}$ جمع می‌شود.

و بنابراین ماتریس $\underline{\underline{A}}$ بصورت معادله (۶-۵۱) تبدیل خواهد شد:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\ell^{(1)}}{3} & \frac{\ell^{(1)}}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\ell^{(1)}}{6} & \frac{\ell^{(1)}}{3}+\frac{\ell^{(2)}}{3} & \frac{\ell^{(2)}}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell^{(2)}}{6} & \frac{\ell^{(2)}}{3}+\frac{\ell^{(3)}}{3} & \frac{\ell^{(3)}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell^{(3)}}{6} & \frac{\ell^{(3)}}{3}+\frac{\ell^{(4)}}{3} & \frac{\ell^{(4)}}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\ell^{(4)}}{6} & \frac{\ell^{(4)}}{3} \end{bmatrix} \qquad (۵۱-۶)$$

در ادامه، با مرتب کردن انتگرال‌های موجود در معادله (۶-۲۹)، دستگاه معادلات مربوط به محاسبه شار نوترونی بدست می‌آید. برای اینکه هر دو شرط مرزی بازتابنده کامل و خلأ اعمال شود، یک تیغه را که دارای شرط مرزی بازتابنده کامل در سمت چپ و شرط مرزی خلأ در سمت راست است، در نظر گرفته شود. همان طور که در شکل ۱۱ نشان داده شده، تیغه از ۶ ناحیه تشکیل شده است. در ادامه، دستگاه معادلات برای این حالت بدست آورده می‌شود.



شکل ۱۱: تیغه یک بعدی متشکل از ۴ ناحیه

اولین انتگرال موجود در معادله (۶-۲۹) بصورت زیر می‌باشد:

$$\sum_{e=1}^{E}[\int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx\,(\frac{d}{dx}\underline{N}^{(e)}(x))(\frac{d}{dx}\underline{N}^{(e)T}(x))\,\phi^{(e)} =$$

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{\ell^{(1)}} & \frac{-1}{\ell^{(1)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\ell^{(1)}} & \frac{1}{\ell^{(1)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ell^{(1)}} & \frac{-1}{\ell^{(1)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\ell^{(1)}} & \frac{1}{\ell^{(1)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\ell^{(1)}} & \frac{-1}{\ell^{(1)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\ell^{(1)}} & \frac{1}{\ell^{(1)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \right.$$

$$
\left.
\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&\frac{1}{\ell^{(2)}}&\frac{-1}{\ell^{(2)}}&0&0\\
0&0&0&\frac{-1}{\ell^{(2)}}&\frac{1}{\ell^{(2)}}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&\frac{1}{\ell^{(2)}}&\frac{-1}{\ell^{(2)}}&0\\
0&0&0&0&\frac{-1}{\ell^{(2)}}&\frac{1}{\ell^{(2)}}&0\\
0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\frac{1}{\ell^{(2)}}&\frac{-1}{\ell^{(2)}}\\
0&0&0&0&0&\frac{-1}{\ell^{(2)}}&\frac{1}{\ell^{(2)}}
\end{bmatrix}
\right)\underline{\phi}_1 =
$$

$$
\left(
\begin{bmatrix}
\frac{1}{\ell^{(1)}}&\frac{-1}{\ell^{(1)}}\\
\frac{-1}{\ell^{(1)}}&\frac{1}{\ell^{(1)}}
\end{bmatrix}_2^1
+
\begin{bmatrix}
\frac{1}{\ell^{(1)}}&\frac{-1}{\ell^{(1)}}\\
\frac{-1}{\ell^{(1)}}&\frac{1}{\ell^{(1)}}
\end{bmatrix}_3^2
+
\begin{bmatrix}
\frac{1}{\ell^{(1)}}&\frac{-1}{\ell^{(1)}}\\
\frac{-1}{\ell^{(1)}}&\frac{1}{\ell^{(1)}}
\end{bmatrix}_4^3
+
\begin{bmatrix}
\frac{1}{\ell^{(2)}}&\frac{-1}{\ell^{(2)}}\\
\frac{-1}{\ell^{(2)}}&\frac{1}{\ell^{(2)}}
\end{bmatrix}_5^4
+
\begin{bmatrix}
\frac{1}{\ell^{(2)}}&\frac{-1}{\ell^{(2)}}\\
\frac{-1}{\ell^{(2)}}&\frac{1}{\ell^{(2)}}
\end{bmatrix}_6^5
+
\begin{bmatrix}
\frac{1}{\ell^{(2)}}&\frac{-1}{\ell^{(2)}}\\
\frac{-1}{\ell^{(2)}}&\frac{1}{\ell^{(2)}}
\end{bmatrix}_7^6
\right)\underline{\phi}_1 =
$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\ell^{(1)}} & \frac{-1}{\ell^{(1)}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\ell^{(1)}} & \frac{1}{\ell^{(1)}}+\frac{1}{\ell^{(1)}} & \frac{-1}{\ell^{(1)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\ell^{(1)}} & \frac{1}{\ell^{(1)}}+\frac{1}{\ell^{(1)}} & \frac{-1}{\ell^{(1)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\ell^{(1)}} & \frac{1}{\ell^{(1)}}+\frac{1}{\ell^{(2)}} & \frac{-1}{\ell^{(2)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\ell^{(2)}} & \frac{1}{\ell^{(2)}}+\frac{1}{\ell^{(2)}} & \frac{-1}{\ell^{(2)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\ell^{(2)}} & \frac{1}{\ell^{(2)}}+\frac{1}{\ell^{(2)}} & \frac{-1}{\ell^{(2)}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\ell^{(2)}} & \frac{1}{\ell^{(2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{1,2} \\ \phi_{1,3} \\ \phi_{1,4} \\ \phi_{1,5} \\ \phi_{1,6} \\ \phi_{1,7} \end{bmatrix} \quad (۵۲-۶)$$

در بردار شار نوترونی، اندیس اول مربوط به گروه انرژی (در حالت یک‌گروهی برابر ۱ است) و اندیس دوم شماره گره می‌باشد.

توجه کنید که به عنوان مثال ماتریس محلی $\begin{bmatrix} \frac{1}{\ell^{(1)}} & \frac{-1}{\ell^{(1)}} \\ \frac{-1}{\ell^{(1)}} & \frac{1}{\ell^{(1)}} \end{bmatrix}_4^3$ در واقع ماتریس داده شده در معادله (۶-۵۳) می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\ell^{(1)}} & \frac{-1}{\ell^{(1)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\ell^{(1)}} & \frac{1}{\ell^{(1)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۶-۵۳)$$

که دو عدد نوشته شده در کنار آن نشان دهنده این است که المان این ماتریس محلی در کجای ماتریس سراسری قرار می‌گیرند. برای محاسبه دومین انتگرال می‌توان نوشت:

$$K^{(e)2}\int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx\, \underline{N}^{(e)}(x)\, \underline{N}^{(e)T}(x)\,\phi^{(e)} =$$

$$\begin{bmatrix}
\frac{K^{(1)2}\ell^{(1)}}{3} & \frac{K^{(1)2}\ell^{(1)}}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{K^{(1)2}\ell^{(1)}}{6} & \frac{K^{(1)2}\ell^{(1)}}{3}+\frac{K^{(2)2}\ell^{(2)}}{3} & \frac{K^{(2)2}\ell^{(2)}}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{K^{(2)2}\ell^{(2)}}{6} & \frac{K^{(2)2}\ell^{(2)}}{3}+\frac{K^{(3)2}\ell^{(3)}}{3} & \frac{K^{(3)2}\ell^{(3)}}{6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{K^{(3)2}\ell^{(3)}}{6} & \frac{K^{(3)2}\ell^{(3)}}{3}+\frac{K^{(4)2}\ell^{(4)}}{3} & \frac{K^{(4)2}\ell^{(4)}}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{K^{(4)2}\ell^{(4)}}{6} & \frac{K^{(4)2}\ell^{(4)}}{3}+\frac{K^{(5)2}\ell^{(5)}}{3} & \frac{K^{(5)2}\ell^{(5)}}{6} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K^{(5)2}\ell^{(5)}}{6} & \frac{K^{(5)2}\ell^{(5)}}{3}+\frac{K^{(6)2}\ell^{(6)}}{3} & \frac{K^{(6)2}\ell^{(6)}}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K^{(6)2}\ell^{(6)}}{6} & \frac{K^{(6)2}\ell^{(6)}}{3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{1,2} \\ \phi_{1,3} \\ \phi_{1,4} \\ \phi_{1,5} \\ \phi_{1,6} \\ \phi_{1,7} \end{bmatrix}$$

(۵۴-۶)

انتگرال بیان‌کننده شرایط مرزی، از حل معادله (۶-۵۵) بدست می‌آید:

$$\sum_{e=1}^{6}\int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}} dx \frac{d}{dx}(\underline{N}^{(e)}(x)\frac{d}{dx}\phi^{(e)}(x)) = \int_{x_1}^{x_7} dx \frac{d}{dx}((\underline{N}(x)\frac{d}{dx}\phi(x)) =$$

$$(\underline{N}(x)\frac{d}{dx}\phi(x))_{x_1}^{x_7} = \underline{N}(x)\frac{d}{dx}\phi(x)\bigg|_{x=x_7} - \underline{N}(x)\frac{d}{dx}\phi(x)\bigg|_{x=x_1} \quad (۶-۵۵)$$

با جایگذاری $\underline{N}(x)$ در معادله (۶-۵۵)، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\frac{d}{dx}\phi(x)\Bigg|_{x=x_7}-\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\frac{d}{dx}\phi(x)\Bigg|_{x=x_1}=\begin{bmatrix}-\frac{d}{dx}\phi(x)\Big|_{x=x_1}\\0\\0\\0\\0\\0\\\frac{d}{dx}\phi(x)\Big|_{x=x_7}\end{bmatrix} \qquad (۵۶-۶)$$

با توجه به شرایط مرزی:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\phi(x)\Big|_{x=x_1}&=0\\ \frac{d}{dx}\phi(x)\Big|_{x=x_7}&=\frac{-\phi_7}{2D}\end{aligned} \qquad (۵۷-۶)$$

در نهایت، معادله (۶-۵۸) بدست می‌آید:

$$\int_{x_1}^{x_7} dx \frac{d}{dx}((\underline{N}(x)\frac{d}{dx}\phi(x)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\phi_7}{2D} \end{bmatrix} \qquad (۶-۵۸)$$

با مرتب کردن ماتریس‌های بدست آمده و با فرض اینکه طول تمام المانها برابر ℓ باشد، دستگاه معادلات بصورت معادله (۶-۵۹) بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \frac{K^2\ell}{3}+\frac{1}{\ell} & \frac{K^2\ell}{6}-\frac{1}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K^2\ell}{6}-\frac{1}{\ell} & \frac{2K^2\ell}{3}+\frac{2}{\ell} & \frac{K^2\ell}{6}-\frac{1}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K^2\ell}{6}-\frac{1}{\ell} & \frac{2K^2\ell}{3}+\frac{2}{\ell} & \frac{K^2\ell}{6}-\frac{1}{\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K^2\ell}{6}-\frac{1}{\ell} & \frac{2K^2\ell}{3}+\frac{2}{\ell} & \frac{K^2\ell}{6}-\frac{1}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{K^2\ell}{6}-\frac{1}{\ell} & \frac{2K^2\ell}{3}+\frac{2}{\ell} & \frac{K^2\ell}{6}-\frac{1}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K^2\ell}{6}-\frac{1}{\ell} & \frac{2K^2\ell}{3}+\frac{2}{\ell} & \frac{K^2\ell}{6}-\frac{1}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K^2\ell}{6}-\frac{1}{\ell} & \frac{K^2\ell}{3}+\frac{1}{\ell}+\frac{1}{2D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{1,2} \\ \phi_{1,3} \\ \phi_{1,4} \\ \phi_{1,5} \\ \phi_{1,6} \\ \phi_{1,7} \end{bmatrix} = \frac{S\ell}{D} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (۵۹-۶)$$

با حل دستگاه به فرم $A\phi = B$ که در بالا تعریف شده، شار در هر نقطه بدست می‌آید.

در حالت کلی، برای ناحیه متشکل از N المان، ماتریس ضرایب A دارای ابعاد $(N+1)\times(N+1)$است و با حل دستگاه معادلات مربوطه، شار نوترونی در هر نقطه محاسبه می‌شود.

۷- حل معادله پخش نوترون چندگروهی و الحاقی آن به روش المان محدود گلرکین

تئوری روش المان محدود در فصل ششم توضیح داده شد. اساس کار برای حل معادله پخش نوترون با استفاده از روش گلرکین، بسط شار نوترونی بر حسب توابع پایه است که در اینجا این توابع پایه بصورت خطی در نظر گرفته می‌شوند. همان طور که در فصل ششم توضیح داده شد، برای حل معادله پخش نوترون در حالت یک‌گروهی-یک‌ناحیه‌ای، طرفین معادله پخش نوترون را در تابع وزن ضرب کرده و سپس انتگرال گرفته می‌شود. روش کار در مورد مسئله چندناحیه‌ای نیز مانند حالت یک‌ناحیه‌ای است، با این تفاوت که در اینجا، به علت اینکه مقدار ثابت پخش در ناحیه‌های مختلف متفاوت می‌باشد، محاسبات بدون تقسیم کردن طرفین معادله پخش بر ثابت پخش انجام می‌شود.

در اینجا دو نوع محاسبات چشمه ثابت و محاسبات جستجوی ضریب تکثیر مؤثر نوترونی در نظر گرفته می‌شوند. ابتدا، به حل معادلات در حالت یک‌گروهی پرداخته شده و در ادامه، معادلات چندگروهی حل می‌شوند.

۷-۱- محاسبات چشمه ثابت

محاسبات چشمه ثابت برای محیط غیر شکافت‌پذیر و یا محیط شکافت‌پذیر با ضریب تکثیرمؤثر کوچکتر از یک انجام می‌شود. در اینجا، حالت کلی که در آن محیط شکافت پذیر است، در نظر گرفته می‌شود. برای حل معادله پخش نوترون به روش گلرکین، تابع وزنی مطابق معادله (۷-۱) که از لحاظ وابستگی مکانی، همانند تابع پایه انتخاب شده در نظر گرفته می‌شود. ابتدا دو طرف معادله را در تابع وزن (۷-۱) ضرب کرده و سپس روی دامنه موردنظر انتگرال گرفته می‌شود:

$$W(x) = W^T \underline{N}(x) \tag{۷-۱}$$

معادله پخش نوترون یک‌گروهی در یک محیط تکثیرپذیر بصورت معادله (۷-۲) خواهدبود:

$$-D\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \Sigma_a \phi(x) = \nu\Sigma_f \phi(x) + S(x) \tag{۷-۲}$$

با ضرب تابع وزن در طرفین معادله (۷-۲) و سپس انتگرالگیری، معادله (۷-۳) بدست خواهد آمد:

$$\int_{x_i}^{x_e} dx W(x)(-D\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}+\Sigma_a\phi(x)-\nu\Sigma_f\phi(x)-S(x))=\int_{x_i}^{x_e} dx W(x)\times 0=0 \qquad (۷-۳)$$

که x_i نقطه ابتدایی و x_e نقطه انتهایی دامنه موردنظر است. با جایگذاری معادله (۷-۱) در رابطه فوق، معادله زیر بدست می‌آید:

$$\int_{x_i}^{x_e} dx W^T \underline{N}(x)(-D\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}+\Sigma_a\phi(x)-\nu\Sigma_f\phi(x)-S(x))=\int_{x_i}^{x_e} dx W(x)\times 0=0 \qquad (۷-۴)$$

چون W^T یک بردار غیر صفر است، می‌توان معادله (۷-۴) را به شکل زیر هم نوشت:

$$\int_{x_i}^{x_e} dx \underline{N}(x)(-D\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}+\Sigma_a\phi(x)-\nu\Sigma_f\phi(x)-S(x))=\int_{x_i}^{x_e} dx W(x)\times 0=0 \qquad (۷-۵)$$

با استفاده از معادله زیر:

$$\phi(x)=\underline{N}(x)\underline{\phi}$$

$$\frac{d}{dx}\underline{N}(x)(\frac{d}{dx}\phi(x))=(\frac{d}{dx}\underline{N}(x))(\frac{d}{dx}\phi(x))+\underline{N}(x)\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} \qquad (۶-۷)$$

$$-\underline{N}(x)\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}=(\frac{d}{dx}\underline{N}(x))(\frac{d}{dx}\phi(x))-\frac{d}{dx}\underline{N}(x)(\frac{d}{dx}\phi(x))$$

و جایگذاری آن در معادله (۷-۵)، معادله (۷-۷) بدست می‌آید:

$$\sum_{e=1}^{E}[\int_{x_i^{(e)}}^{x_e^{(e)}}dx((D^{(e)}\frac{d}{dx}\underline{N}^{(e)}(x)(\frac{d}{dx}\underline{N}^{T(e)}(x))\underline{\phi}^{(e)}+\Sigma_a^{(e)}\underline{N}^{(e)}(x)\underline{N}^{T(e)}(x)\underline{\phi}^{(e)}-\underline{N}^{(e)}(x)S^{(e)}(x)\underline{\phi}^{(e)}-$$

$$\nu^{(e)}\Sigma_f^{(e)}\underline{N}^{(e)}(x)\underline{\phi}^{(e)}-D^{(e)}\frac{d}{dx}(\underline{N}^{(e)}(x)\frac{d}{dx}\underline{N}^{T(e)}(x))\underline{\phi}^{(e)})]=0 \qquad (۷-۷)$$

در این رابطه، $\phi^{(e)}$، بردار شار نوترونی است که مولفه‌های آن بیانگر شار نوترونی در هر یک از نقاط المان مـوردنظر مـی-باشد. با حل هر یک از انتگرال‌های بالا، دستگاه معادلات نهایی برای محاسبه شار نوترونی بدست می‌آید.

۷-۲- محاسبات جستجوی ضریب تکثیر مؤثر نوترونی

در محاسبات جستجوی ضریب تکثیرمؤثر نوترونی، دستگاه معادلات مطابق معادله (۷-۸) از نوع مقدارویژه است و برای حل آن از روش‌تکرار قدرت استفاده می‌شود. در این نوع محاسبات، علاوه بر شار نوترونی، ضریب تکثیرمؤثر نوترونی نیز محاسبه می‌شود.

$$A\phi = \frac{1}{k_{eff}} F\phi \qquad (۸-۷)$$

مراحل انجام محاسبات جستجوی ضریب تکثیر مؤثر نوترونی بصورت زیر می‌باشد:

۱- ابتدا یک حدس اولیه برای بردار شار نوترونی و ضریب تکثیر مؤثر نوترونی زده می‌شود. در این صورت طرف دوم بصورت یک بردار معلوم $S^{(n)}=\frac{1}{k_{eff}}F\phi^{(n)}$ در می‌آید که در آن، $\phi^{(n)}$بردار شار نوترونی در تکرار n و F ماتریس ضرایب در طرف دوم دستگاه معادلات بالا است.

۲- با حل معادله $A\phi^{(n+1)}=S^{(n)}$، مقدار جدیدی برای شار نوترونی بدست می‌آید:

$$\phi^{(n+1)}=A^{-1}S^{(n)} \qquad (۷-۹)$$

۳- مقدار جدید ضریب تکثیرمؤثر نوترونی از معادله (۷-۱۰) بدست می‌آید:

$$k_{eff}{}^{(n+1)}=\frac{1}{k_{eff}{}^{(n)}}\frac{F\phi^{(n+1)}}{F\phi^{(n)}} \qquad (۷-۱۰)$$

۴- معیارهای همگرایی برای شار نوترونی و ضریب تکثیرمؤثر نوترونی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left|\frac{\phi^{(n+1)}-\phi^{(n)}}{\phi^{(n)}}\right|<\varepsilon_1 \qquad (۱۱\text{-}۷)$$

$$\left|\frac{k_{eff}^{(n+1)}-k_{eff}^{(n)}}{k_{eff}^{(n)}}\right|<\varepsilon_2 \qquad (۱۲\text{-}۷)$$

در صورت ارضای شرط همگرایی، محاسبات خاتمه پیدا کرده و در غیر این صورت، محاسبات از مرحله ۱ ادامه پیدا می‌کند.

در حالت چندگروهی، معادلات بصورت جفت شده در می‌آیند که حالت کلی این معادلات با در نظر گرفتن چشمه نوترون خارجی برای هر گروه انرژی و پراکندگی به گروه‌های انرژی بالاتر بصورت معادله (۷-۱۳) می‌باشد:

$$-D_1\frac{d^2\phi_1(x)}{dx^2}+\Sigma_{rem,1}\phi_1(x)=\frac{\chi_1}{k_{eff}}[\nu_1\Sigma_{f,1}\phi_1(x)+\ldots+\nu_G\Sigma_{f,G}\phi_G(x)]+\Sigma_{s,2\to1}\phi_2(x)+\ldots+\Sigma_{s,G\to1}\phi_G(x)+S_1(x)$$

$$-D_2\frac{d^2\phi_2(x)}{dx^2}+\Sigma_{rem,2}\phi_2(x)=\frac{\chi_2}{k_{eff}}[\nu_1\Sigma_{f,1}\phi_1(x)+\ldots+\nu_G\Sigma_{f,G}\phi_G(x)]+\Sigma_{s,1\to2}\phi_1(x)+\ldots+\Sigma_{s,G\to2}\phi_G(x)+S_2(x)$$

.

.

.

$$-D_G\frac{d^2\phi_G(x)}{dx^2}+\Sigma_{rem,G}\phi_G(x)=\frac{\chi_G}{k_{eff}}[\nu_1\Sigma_{f,1}\phi_1(x)+\ldots+\nu_G\Sigma_{f,G}\phi_G(x)]+\Sigma_{s,1\to G}\phi_1(x)+\ldots+\Sigma_{s,G-1\to G}\phi_{G-1}(x)+S_G(x)$$

(۱۳-۷)

χ_i، طیف نوترونهای حاصل از شکافت است که در گروه انرژی i قرار می‌گیرد و دارای خاصیت زیر می‌باشد:

$$\sum_{i=1}^{G}\chi_i=1 \qquad (۱۴-۷)$$

در معادلات (۷-۱۳)، سطح مقطع برداشت بصورت معادله (۷-۱۵) تعریف می‌شود:

$$\Sigma_{rem,i} = \Sigma_{a,i} + \sum_j \Sigma_{s,i\to j} \tag{۷-۱۵}$$

که در آن، $\Sigma_{s,i\to j}$ سطح مقطع پراکندگی از گروه i به گروه j است.

جهت انجام محاسبات جستجوی ضریب تکثیر مؤثر نوترونی بدون در نظر گرفتن چشمه خارجی ثابت، باید نکات زیر را در نظر گرفت:

۱- ماتریس ضرایب برای هر گروه انرژی مشابه ماتریس ضرایب A در حالت یک‌گروهی می‌باشد.

۲- در حالت چندگروهی، در طرف دوم معادله پخش نوترون، جمله پراکندگی از سایر گروه‌های انرژی به گروه انرژی موردنظر وجود دارد. برای مثال، در معادله اول، برای جمله $\Sigma_{s,2\to 1}\phi_2(x)$، انتگرال مربوطه بدون در نظر گرفتن ضرایب شار نوترونی بصورت زیر می‌باشد:

$$\int \Sigma_{s2\to 1}(x)\,\underline{N}(x)\,\underline{N}^{T}(x)=$$

$$\begin{bmatrix}
\frac{\Sigma_{s21}^{(1)}\ell^{(1)}}{3} & \frac{\Sigma_{s21}^{(1)}\ell^{(1)}}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{\Sigma_{s21}^{(1)}\ell^{(1)}}{6} & \frac{\Sigma_{s21}^{(1)}\ell^{(1)}}{3}+\frac{\Sigma_{s21}^{(1)}\ell^{(1)}}{3} & \frac{\Sigma_{s21}^{(1)}\ell^{(1)}}{6} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{\Sigma_{s21}^{(1)}\ell^{(1)}}{6} & \frac{\Sigma_{s21}^{(1)}\ell^{(1)}}{3}+\frac{\Sigma_{s21}^{(1)}\ell^{(1)}}{3} & \frac{\Sigma_{s21}^{(2)}\ell^{(2)}}{6} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{\Sigma_{s21}^{(1)}\ell^{(1)}}{6} & \frac{\Sigma_{s21}^{(1)}\ell^{(1)}}{3}+\frac{\Sigma_{s21}^{(2)}\ell^{(2)}}{3} & \frac{\Sigma_{s21}^{(2)}\ell^{(2)}}{6} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{\Sigma_{s21}^{(2)}\ell^{(2)}}{6} & \frac{\Sigma_{s21}^{(2)}\ell^{(2)}}{3}+\frac{\Sigma_{s21}^{(2)}\ell^{(2)}}{3} & \frac{\Sigma_{s21}^{(2)}\ell^{(2)}}{6} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Sigma_{s21}^{(2)}\ell^{(2)}}{6} & \frac{\Sigma_{s21}^{(2)}\ell^{(2)}}{3}+\frac{\Sigma_{s21}^{(2)}\ell^{(2)}}{3} & \frac{\Sigma_{s21}^{(2)}\ell^{(2)}}{6}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Sigma_{s21}^{(2)}\ell^{(2)}}{6} & \frac{\Sigma_{s21}^{(2)}\ell^{(2)}}{3}
\end{bmatrix} \qquad (۱۶-۷)$$

ماتریس بالا $C_{s,2\to 1}$ نامگذاری می‌شود. ماتریس‌های مشابهی نیز برای سایر جمله‌های پراکندگی بدست می‌آید که $C_{s,j\to i}$ نامیده می‌شود. در طرف دوم معادله پخش هر یک از گروه‌های انرژی، مجموع حاصلضرب‌های ماتریس‌های مشابه ماتریس بالا در بردار شار نوترونی مربوطه ظاهر می‌شود که می‌توان آنرا بصورت زیر نوشت:

$$CF(i)=\sum_{\substack{j\neq i}}^{G} C_{s,j\rightarrow i}\times\begin{bmatrix}\phi_{j,1}\\ \phi_{j,2}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \phi_{j,N+1}\end{bmatrix} \qquad (۱۷-۷)$$

۳- ماتریس مربوط به جمله‌های شکافت هر گروه انرژی نیز مشابه حالت یک‌گروهی است که در بردار شار نوترونی مربوط به آن گروه ضرب می‌شود. برای انجام محاسبات از روش تکرار که شامل مراحل زیر می‌باشد، استفاده می‌شود:

۱- در ابتدا، یک مقدار اولیه برای شار نوترونی در تمام گروه‌های انرژی و ضریب تکثیرمؤثر نوترونی زده می-شود که در نتیجه آن طرف دوم آن بصورت چشمه ثابت در می‌آید. در اینجا بردار واحد برای شار هر گروه انرژی و ضریب تکثیر مؤثر واحد به عنوان حدس اولیه در نظر گرفته می‌شود.

۲- با تقسیم جمله معادل چشمه برای هر گروه انرژی ($S_j^{(n)}$) بر ماتریس ضرایب مربوط به آن گروه، A_j بردار جدید شار در هر گروه انرژی بدست می‌آید:

$$\phi_j^{(n+1)} = A_j^{-1} S_j^{(n)} \tag{۱۸-۷}$$

۳- مقدار ضریب تکثیر مؤثر نوترونی از معادله (۷-۱۹) محاسبه می‌شود:

$$k_{eff}^{(n+1)} = \frac{1}{k_{eff}^{(n)}} \frac{\sum_{j=1}^{G} \nu_j \Sigma_{fj} \phi_j^{(n+1)}}{\sum_{j=1}^{G} \nu_j \Sigma_{fj} \phi_j^{(n)}} \tag{۱۹-۷}$$

۴- با مقادیر جدید بدست آمده برای بردارهای شار نوترونی و ضریب تکثیرمؤثر نوترونی، مراحل ۱ تا ۳ تکرار می‌شوند.

۵- معیار همگرایی برای شار نوترونی هر گروه انرژی بصورت زیر تعریف می‌شود که این معیار باید برای تمام گروه‌های انرژی برقرار شود:

$$\left| \frac{\phi_j^{(n+1)} - \phi_j^{(n)}}{\phi_j^{(n)}} \right| < \varepsilon_1 \qquad (۷-۲۰)$$

شرط همگرایی برای ضریب تکثیرمؤثر نوترونی با معادله (۷-۱۲) تعریف می‌شود. در صورت برقراری معیارهای همگرایی، محاسبات خاتمه پیدا می‌کند و در غیر این صورت، محاسبات به مرحله ۶ می‌رود.

۶- مقادیر جدید شار نوترونی و ضریب تکثیرمؤثر نوترونی در مرحله ۴ استفاده می‌شود و مراحل ۴ تا ۸ تکرار می‌شوند.

۷-۳- حل الحاقی معادله پخش نوترون

با در نظر گرفتن ترانهاده ماتریس متناظر موجود در معادله پخش، الحاقی معادله پخش نوترون بدست می‌آید. به عنوان مثال، اگر ماتریس معادله پخش دوگروهی بدون در نظر گرفتن پراکندگی به گروه‌های بالاتر در یک‌بعد در نظر گرفته شود، دستگاه معادلات (۷-۲۱) بدست می‌آید که در آن فرض شده است تمامی نوترونهای حاصل از شکافت در محدوده انرژی گروه اول واقع شده باشند.

$$\begin{bmatrix} -D_1 \frac{d^2}{dx^2} + \Sigma_{rem,1} & 0 \\ -\Sigma_{s1\to 2} & -D_2 \frac{d^2}{dx^2} + \Sigma_{a2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{k_{eff}} \begin{bmatrix} \nu_1 \Sigma_{f1} & \nu_2 \Sigma_{f2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{bmatrix} \qquad (۷-۲۱)$$

اگر از طرفین معادله (۷-۲۱) ترانهاده گرفته شود، فرم الحاقی معادله پخش نوترون بصورت معادله (۷-۲۲) بدست می‌آید:

آید:

$$\begin{bmatrix} -D_1\dfrac{d^2}{dx^2}+\Sigma_{rem1} & -\Sigma_{s1\to 2} \\ 0 & -D_2\dfrac{d^2}{dx^2}+\Sigma_{a2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1^+(x)\\ \phi_2^+(x)\end{bmatrix}=\frac{1}{k_{eff}^+}\begin{bmatrix}\nu_1\Sigma_{f1} & 0\\ \nu_2\Sigma_{f2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1^+(x)\\ \phi_2^+(x)\end{bmatrix} \tag{۷-۲۲}$$

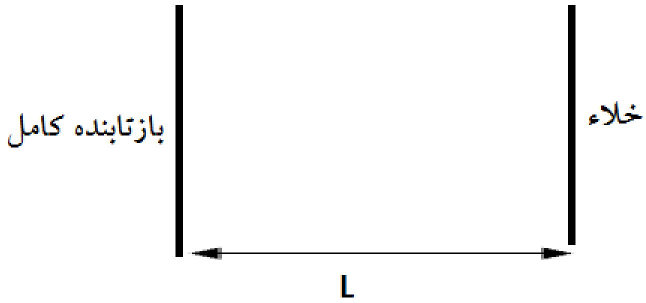
برای حل معادله (۷-۲۲) و یا فرم کلی‌تر آن که با در نظر گرفتن پراکندگی به گروه‌های انرژی بالاتر بدست می‌آید، مشابه روش مستقیم عمل کرده و شار الحاقی در هر گروه انرژی و ضریب تکثیر مؤثر الحاقی محاسبه می‌شود. ضریب تکثیر مؤثر الحاقی در واقع برابر ضریب تکثیر مؤثر نوترونی روش مستقیم می‌باشد که در اینجا با استفاده از روش تکرار قدرت در روش غیر مستقیم محاسبه شده است.

۸- راستی آزمایی نتایج

در این فصل، در ابتدا درجه همگرایی روش گلرکین محاسبه شده و در ادامه، جهت تأیید صحت محاسبات انجام شده، تعدادی مسایل آزمون در نظر گرفته شده و نتایج حاصل از کد توسعه داده شده که آن را GFEM-1D نامگذاری کرده با نتایج حاصل از حل تحلیلی و یا کد CITATION مقایسه شده است.

۸-۱- آزمایش درجه همگرایی روش گلرکین

برای محاسبه درجه همگرایی روش گلرکین، یک تیغه مطابق شکل ۱۲ را در نظر بگیرید. در راستی‌آزمایی ۱ که در ادامه توضیح داده می‌شود، نتایج حاصل از محاسبات تحلیلی و GFEM-1D آورده شده است.

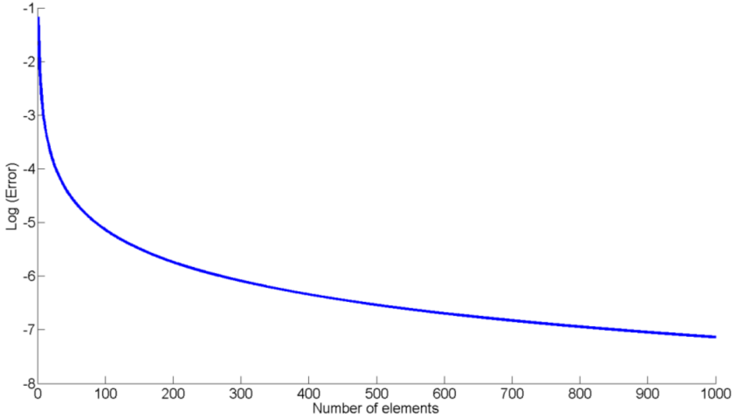


شکل ۱۲: شکل هندسی مسئله آزمون

برای بررسی خطا بر حسب تعداد المان، خطای نسبی بصورت زیر تعریف می‌شود:

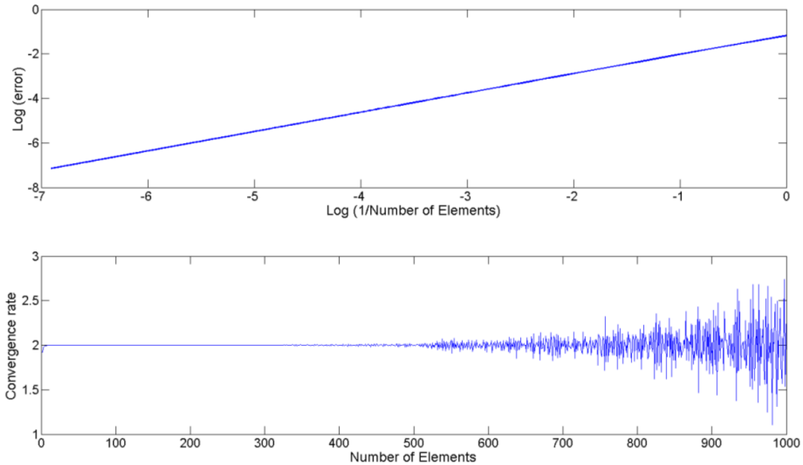
Relative Error= (FEM solution – Exact solution)/ Exact solution (۱-۸)

در شکل ۱۳، لگاریتم خطای بدست آمده از معادله (۸-۱) بر حسب تعداد المان رسم شده است. در این شکل، بیشینه خطای محاسبه شده برای هر المان در نظر گرفته شده است.



شکل ۱۳: لگاریتم خطا بر حسب تعداد المان

همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد المان، خطا کاهش می‌یابد. با رسم نمودار لگاریتم خطا بر حسب لگاریتم معکوس تعداد المان، نمودار حاصل بصورت خط راستی خواهد بود که شیب آن نرخ همگرایی را نشان می‌دهد. همان طور که در شکل ۱۴ نشان داده شده است، نرخ همگرایی روش المان محدود، مقدار ۲ می‌باشد. با افزایش تعداد المان به بیش از ۴۰۰ المان، خطای گرد شدگی بیشتر مشهود بوده و باعث نوسانات می‌شود.



شکل ۱۴: نمودار لگاریتم خطا بر حسب لگاریتم معکوس تعداد المان(شکل بالا)- نمودار نرخ همگرایی بر حسب تعداد المان (شکل پایین).

۸-۲- مسایل چشمه ثابت

۸-۲-۱- چشمه نوترونی با توزیع ثابت نسبت به مکان در یک محیط تیغه‌ای یک‌ناحیه‌ای

جهت راستی‌آزمایی محاسبات مربوط به چشمه نوترون ثابت نسبت به مکان در یک محیط یک‌ناحیه‌ای، مثال ۸-۱ بررسی می‌شود.

مثال ۸-۱:

چشمه ثابت نسبت به مکان که دارای قدرت S می‌باشد را در نظر بگیرید. مسئله می‌تواند برای هر یک از شرایط مرزی خلأ و بازتابنده کامل در هر دو مرز تکرار شود. در ادامه نتایج برای حالتی که این ناحیه از سمت راست دارای شرایط مرزی خلأ و از سمت چپ دارای شرایط مرزی بازتابنده کامل می‌باشد (شکل ۱۲)، آورده شده است.

برای راستی‌آزمایی مسئله دارای چشمه نوترون واحد نسبت به مکان، حل تحلیلی آن موجود می‌باشد. مطابق شکل ۱۲، این ناحیه از طرف راست دارای شرایط مرزی خلأ و از چپ دارای شرایط مرزی بازتابنده کامل می‌باشد.

معادله پخش بصورت زیر تعریف می‌شود که در آن، L طول پخش می‌باشد.

$$\frac{-d^2\phi(x)}{dx^2}+\frac{\Sigma_a}{D}\phi(x)=S/D \qquad L^2=\frac{D}{\Sigma_a} \qquad (۲-۸)$$

حل معادله (۸-۲) در بازه $[0,L_0]$، با شرایط مرزی خلأ در $x=L_0$ و بازتابنده کامل در $x=0$ بصورت زیر می‌باشد:

$$\phi(x)=A_0\exp(-x/L)+A_1\exp(x/L)+\frac{S}{\Sigma_a} \qquad (۳-۸)$$

ضرایب ثابت در معادله (۸-۳)، بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$J_{net} = -D\frac{d\phi}{dx}\Big|_{x=0} = -D(-A_0 + A_1)/L = 0 \qquad (۴-۸)$$

در نتیجه:

$$A_0 = A_1 \qquad (۵-۸)$$

و بنابراین:

$$\phi(x) = A_0 \cosh(x/L) + \frac{S}{\Sigma_a} \qquad (۶-۸)$$

بدست می‌آید. با استفاده از شرط مرزی $J_{in} = 0$ در $x = L_0$، معادله (۷-۸) بدست می‌آید:

$$J_{in} = \frac{\phi(x)}{4} + \frac{D}{2}\frac{d\phi(x)}{dx}\bigg|_{x=L} = \frac{A_0}{4}\cosh(L_0/L) + \frac{S}{4\Sigma_a} + \frac{D}{2L}A_0\sinh(L_0/L) = 0 \qquad (۷-۸)$$

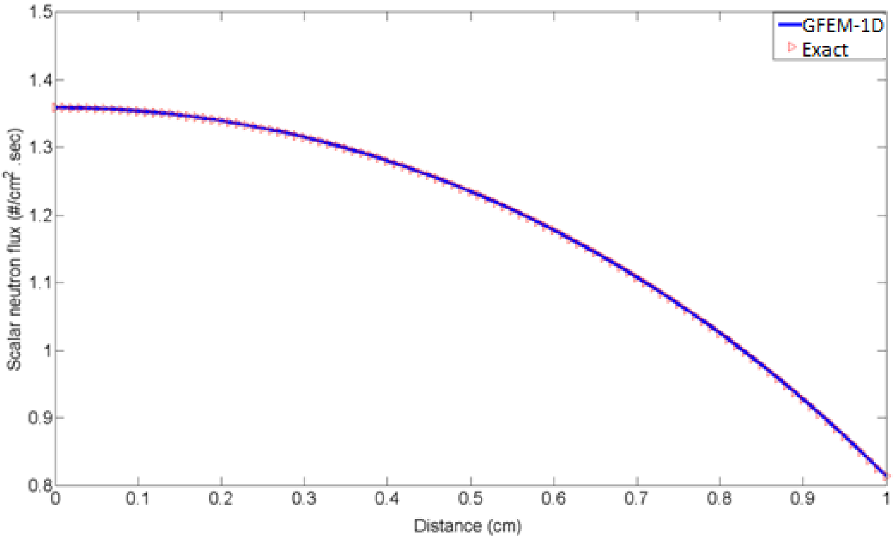
و بنابراین A_0 بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A_0 = \frac{-S}{\Sigma_a(\cosh(L_0/L)+2D\sinh(L_0/L)/L} \quad (۸-۸)$$

و $\phi(x)$ بصورت زیر بدست می‌آید:

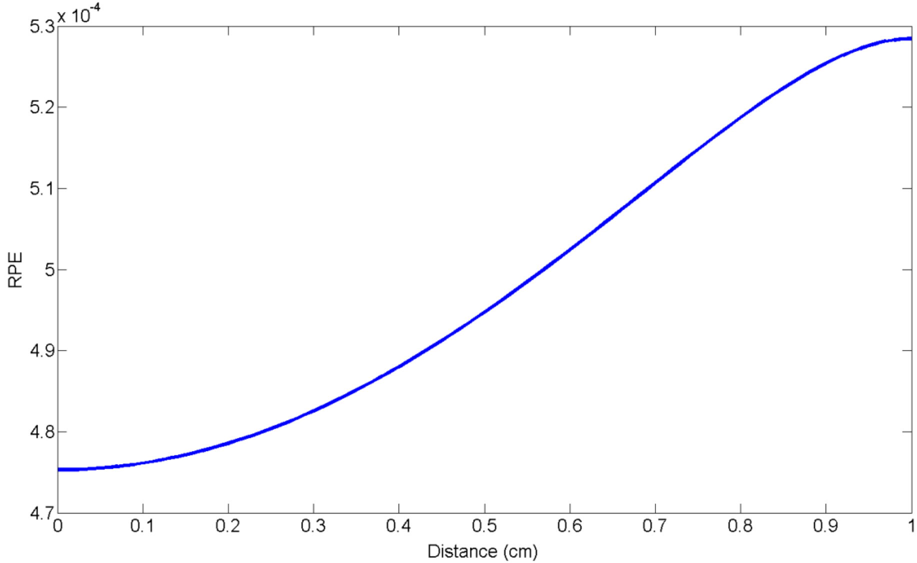
$$\phi(x) = \frac{S}{\Sigma_a}(1-\frac{\cosh(x/L)}{\cosh(L_0/L)+2D\sinh(L_0/L)/L}) \quad (۹-۸)$$

در شکل‌های زیر، شار نوترونی حاصل از حل تحلیلی و المان محدود برای ضخامت‌های ۱ و ۱۰ سانتیمتر در محیط‌های مختلف، نمایش داده شده است. همچنین درصد خطای نسبی که از حاصلضرب ۱۰۰٪ در معادله (۸-۱) محاسبه می‌شود، برای هر یک از حالتها رسم شده است.

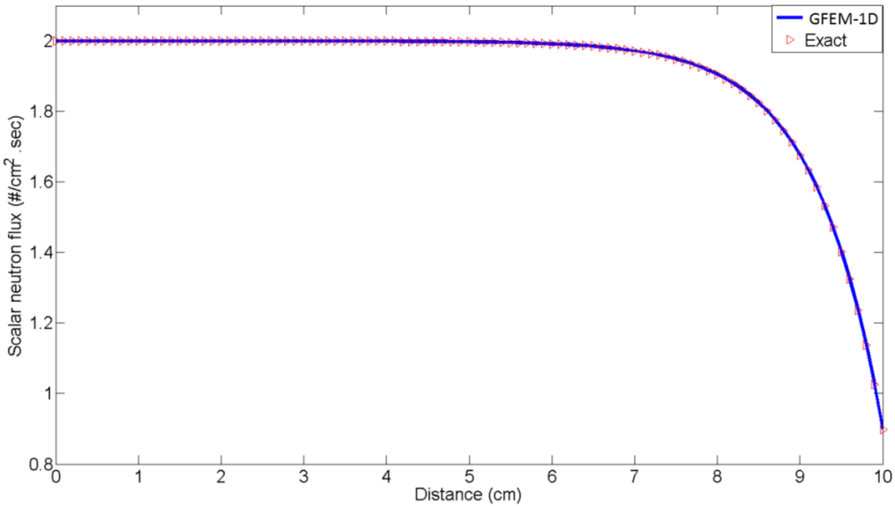


شکل ۱۵: مقایسه شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و حل تحلیلی برای تیغه به ضخامت ۱ سانتیمتر با مشخصات

$$\Sigma_a = 0.5, \Sigma_s = 0.5, S = 1$$

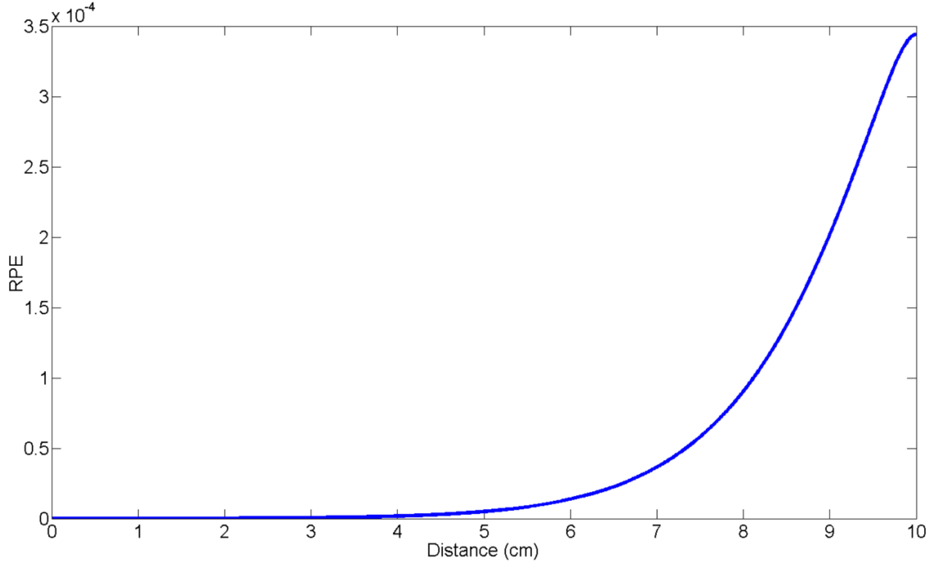


شکل ۱۶: درصد خطای نسبی برای تیغه به ضخامت ۱ سانتیمتر با مشخصات $\Sigma_a = 0.5, \Sigma_s = 0.5, S = 1$

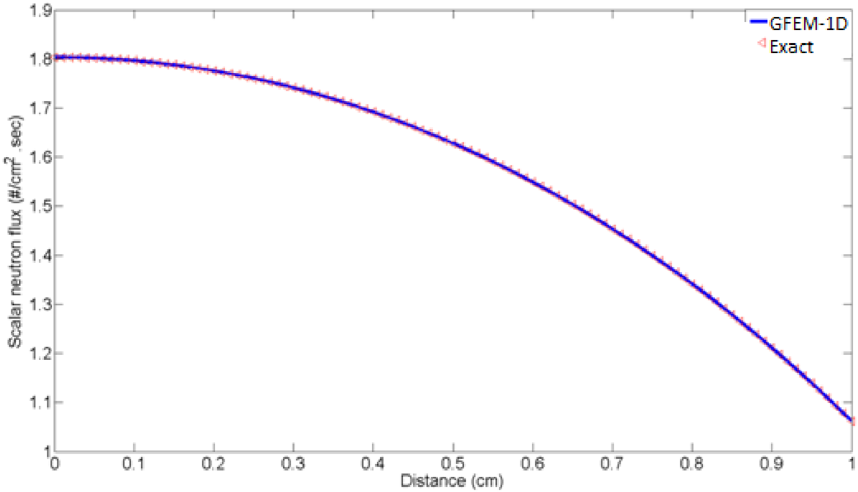


شکل ۱۷: مقایسه شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و حل تحلیلی برای تیغه به ضخامت ۱۰ سانتیمتر با مشخصات

$$\Sigma_a = 0.5, \Sigma_s = 0.5, S = 1$$

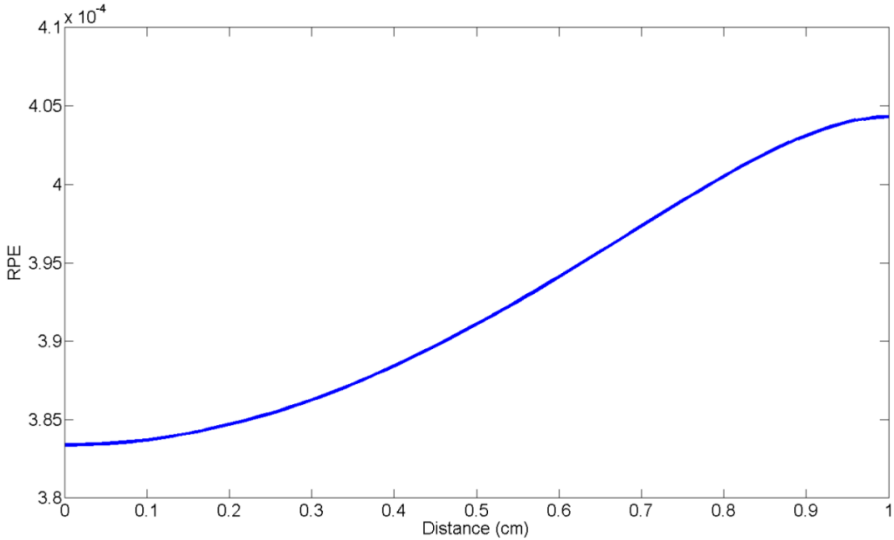


شکل ۱۸: درصد خطای نسبی برای تیغه به ضخامت ۱۰ سانتیمتر با مشخصات $\Sigma_a = 0.5, \Sigma_s = 0.5, S = 1$

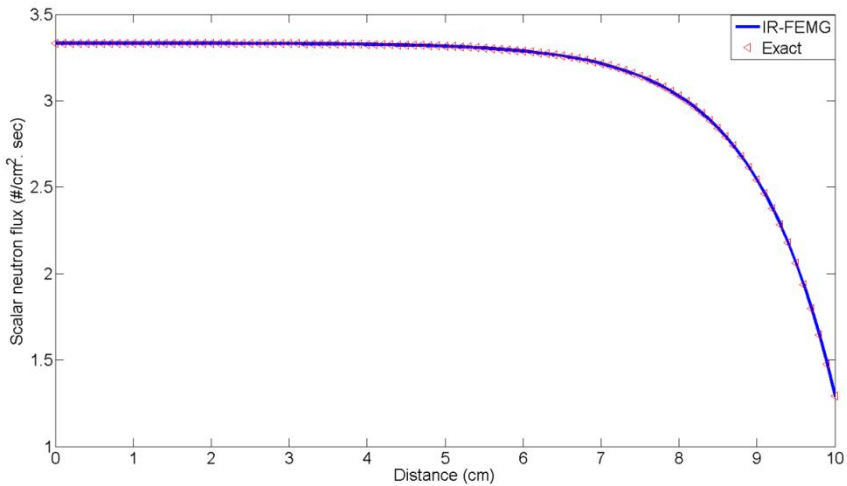


شکل ۱۹: مقایسه شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و حل تحلیلی برای تیغه به ضخامت ۱ سانتیمتر با مشخصات

$$\Sigma_a = 0.3, \Sigma_s = 0.7, S = 1$$

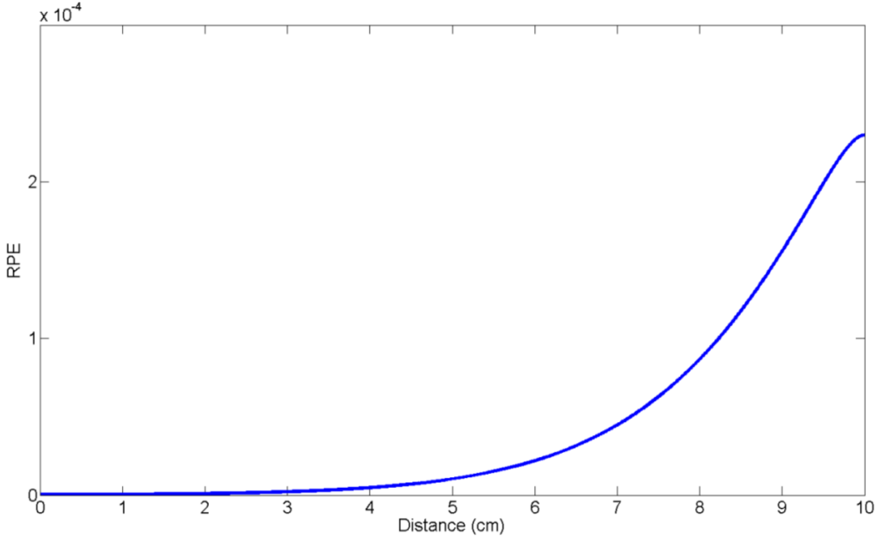


شکل ۲۰: درصد خطای نسبی برای تیغه به ضخامت ۱ سانتیمتر با مشخصات $\Sigma_a = 0.3, \Sigma_s = 0.7, S = 1$

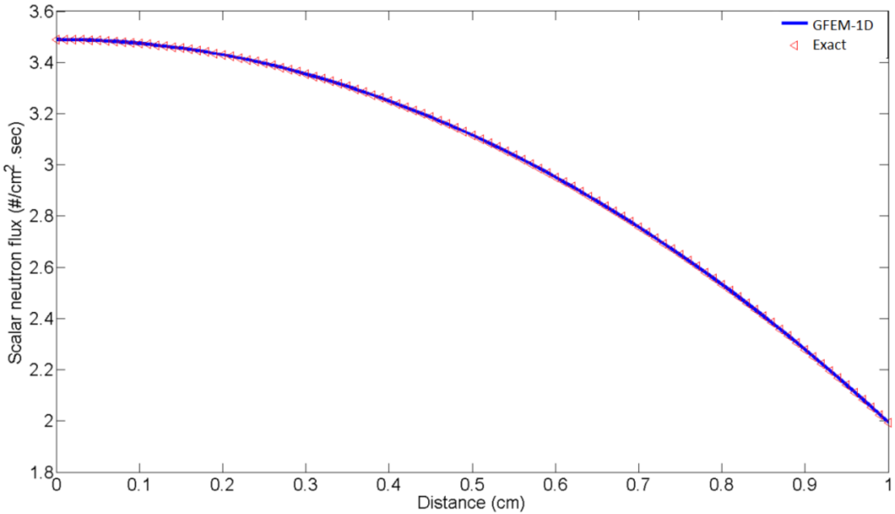


شکل ۲۱: مقایسه شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و حل تحلیلی برای تیغه به ضخامت ۱۰ سانتیمتر با مشخصات

$$\Sigma_a = 0.3, \Sigma_s = 0.7, S = 1$$

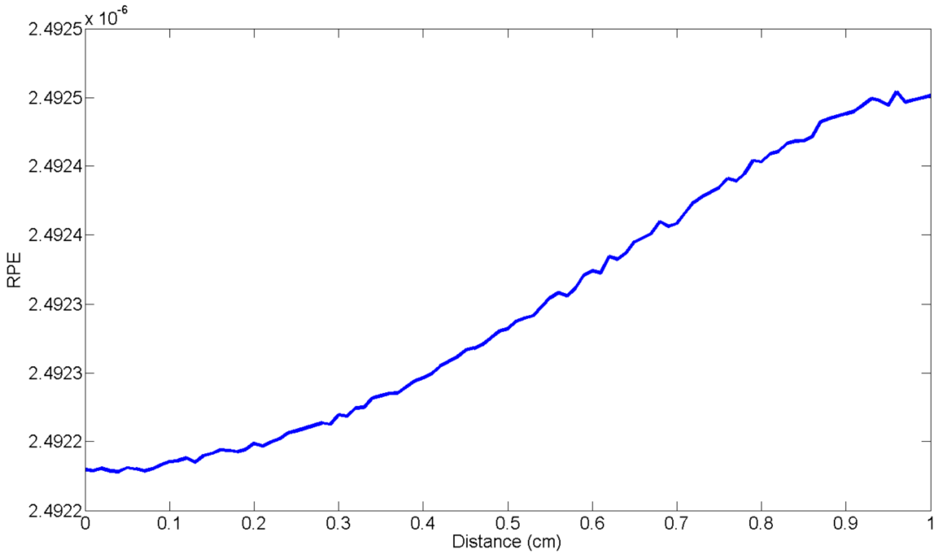


شکل ۲۲: درصد خطای نسبی برای تیغه به ضخامت ۱۰ سانتیمتر با مشخصات $\Sigma_a = 0.3, \Sigma_s = 0.7, S = 1$

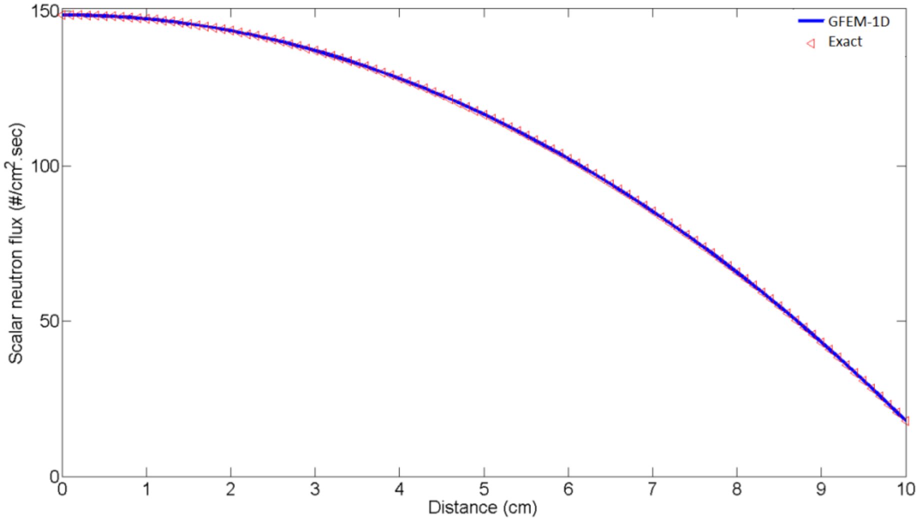


شکل ۲۳: مقایسه شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و حل تحلیلی برای تیغه به ضخامت ۱ سانتیمتر با مشخصات

$$\Sigma_a = 0.001, \Sigma_s = 0.999, S = 1$$

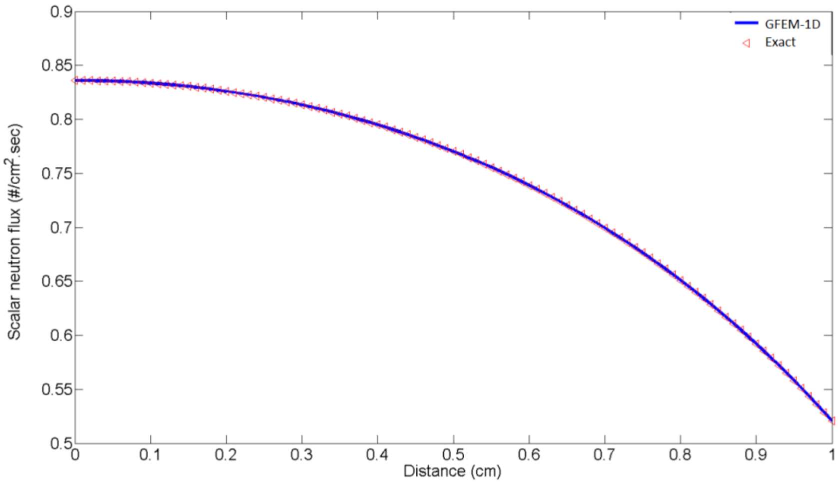


شکل ۲۴: درصد خطای نسبی برای تیغه به ضخامت ۱ سانتیمتر با مشخصات $\Sigma_a = 0.001, \Sigma_s = 0.999, S = 1$

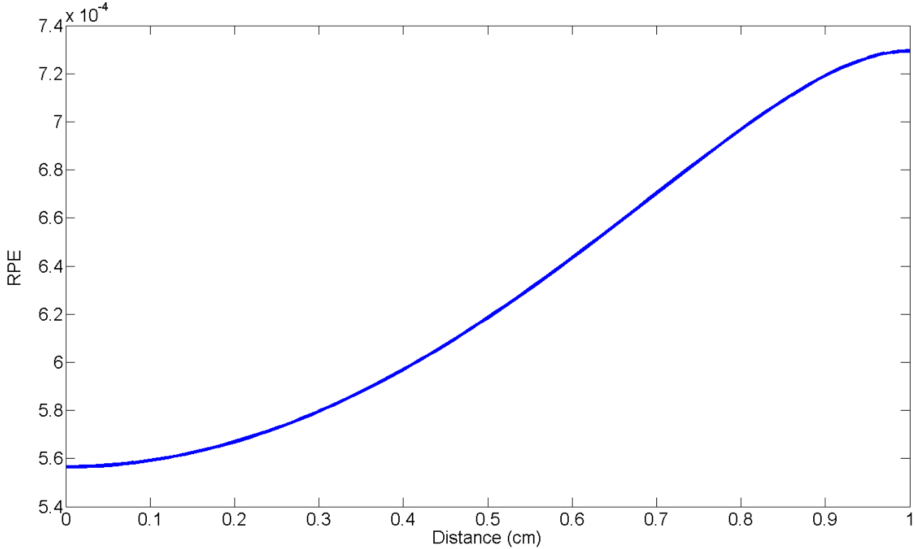


شکل ۲۵: مقایسه شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و حل تحلیلی برای تیغه به ضخامت ۱۰ سانتیمتر با مشخصات

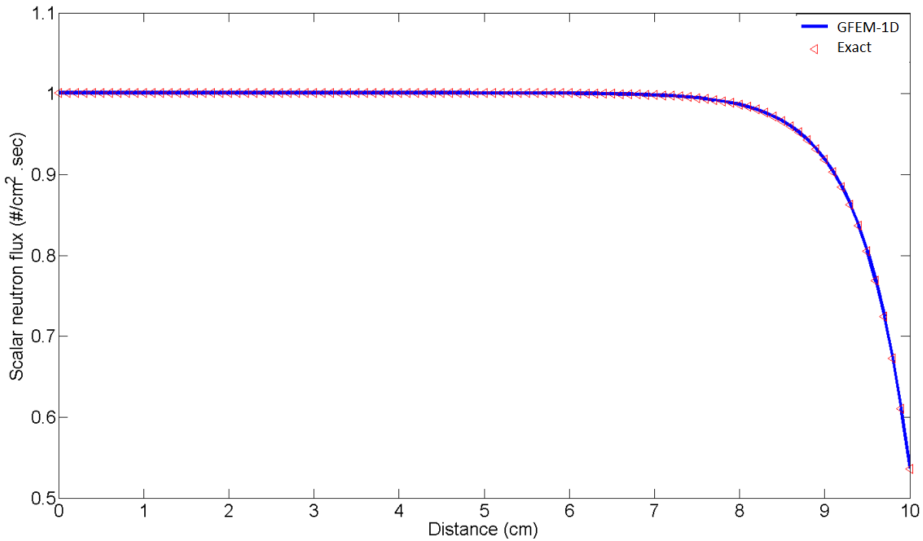
$$\Sigma_a = 0.001, \Sigma_s = 0.999, S = 1$$



شکل ۲۶: مقایسه شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و حل تحلیلی برای تیغه به ضخامت ۱ سانتیمتر با مشخصات $\Sigma_a = 0.999, \Sigma_s = 0.001, S = 1$

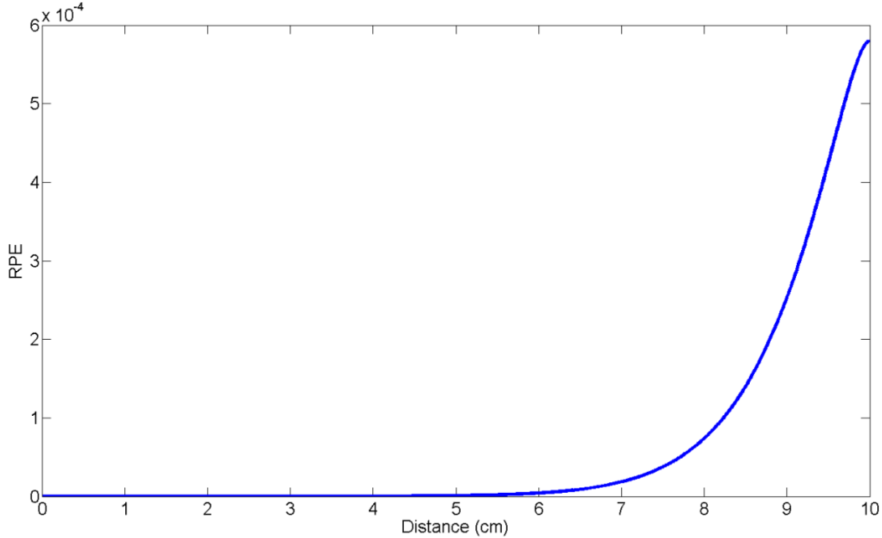


شکل ۲۷: درصد خطای نسبی برای تیغه به ضخامت ۱ سانتیمتر با مشخصات $\Sigma_a = 0.999, \Sigma_s = 0.001, S = 1$



شکل ۲۸: مقایسه شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و حل تحلیلی برای تیغه به ضخامت ۱۰ سانتیمتر با مشخصات

$$\Sigma_a = 0.999, \Sigma_s = 0.001, S = 1$$



شکل ۲۹: درصد خطای نسبی برای تیغه به ضخامت ۱۰ سانتیمتر با مشخصات $\Sigma_a = 0.999, \Sigma_s = 0.001, S = 1$

همانطور که از شکل‌های بالا مشخص است، اختلاف بین شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و حل تحلیلی خیلی کم است. این اختلاف در مرز با شرط مرزی $J_{in}=0$، بیشتر از مرز با شرط مرزی بازتابنده کامل می‌باشد.

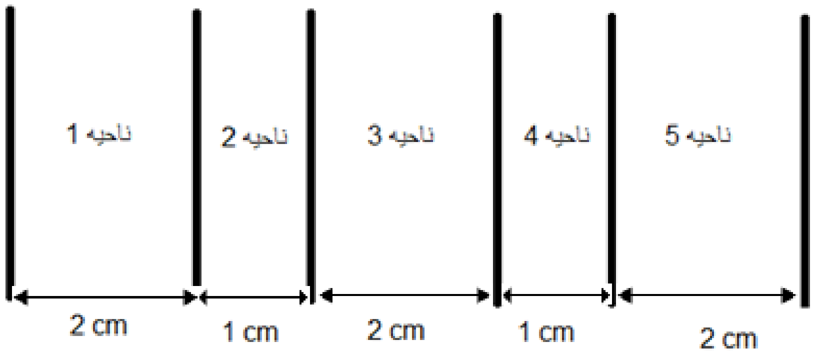
۸-۲-۲- چشمه نوترونی با توزیع ثابت نسب به مکان در محیط چند ناحیه‌ای

در قسمت قبل، درستی محاسبات انجام شده با چشمه نوترون ثابت در یک محیط یک‌ناحیه‌ای مورد تأیید قرار گرفت. در اینجا، برای بررسی این نوع محاسبات در یک محیط چند ناحیه‌ای، مثال ۸-۲ آورده شده است.

مثال ۸-۲:

برای راستی‌آزمایی نتایج محاسبات چشمه ثابت در محیط تیغه‌ای چند ناحیه‌ای، تست خلأ که یکی از تست‌های معتبر مربوط به این محاسبات است، در نظر گرفته می‌شود. وجود نواحی جاذب کامل، خلأ و سایر نواحی در این تست بر اعتبار

آن افزوده است. شکل ۳۰، نواحی مختلف و ضخامت آنها را نشان می‌دهد. همچنین، مشخصات نواحی مختلف در جدول ۱ داده شده است.

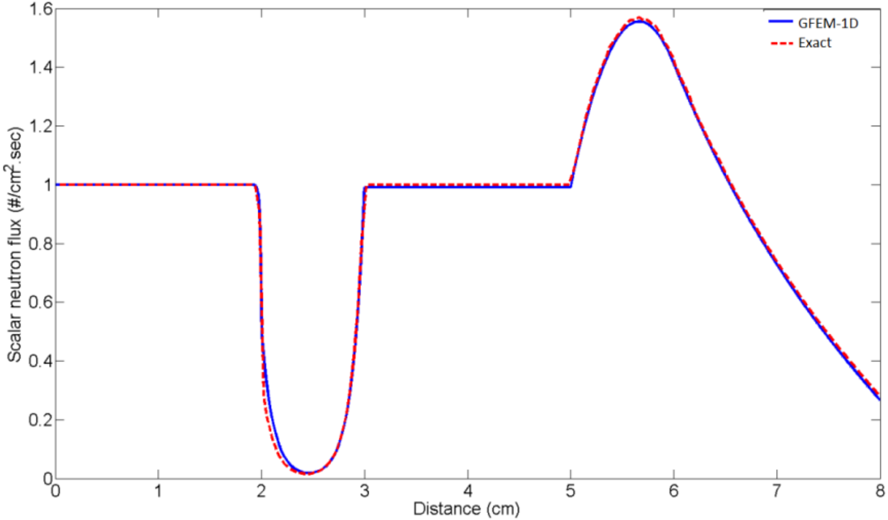


شکل ۳۰: نواحی مختلف استفاده شده در تست خلأ

جدول ۱: مشخصات نواحی مختلف استفاده شده در تست خلأ

ناحیه	طول (سانتیمتر)	$\Sigma_a(cm^{-1})$	$\Sigma_t(cm^{-1})$	S
۱	۲/۰	۵۰/۰	۵۰/۰	۵۰/
۲	۱/۰	۵/۰	۵/۰	۰/۰
۳	۲/۰	$۱۰^{-۶}$	$۱۰^{-۶}$	۰/۰
۴	۱/۰	۰/۱	۱/۰	۱/۰
۵	۲/۰	۰/۱	۱/۰	۰/۰

محاسبات چشمه ثابت برای این محیط با استفاده از کد GFEM-1D انجام شده است. نتایج حاصل با نتایج کد CITATION مقایسه شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و CITATION در اکثر نقاط به غیر از مرز ناحیه ۱ و ۲ تطابق خوبی دارند. در مرز این دو ناحیه، اختلاف بین شار نوترونی حاصل از دو کد، کمی مشهودتر است.



شکل ۳۱: شار نوترونی حاصل از محاسبات

۸-۲-۳- چشمه نوترونی نقطه‌ای (دارای توزیع دیراک)

محاسبات برای مسئله آزمون بالا در حالتی که چشمه خارجی دیگر یک چشمه ثابت نسبت به مکان نیست، تکرار می-شود. در این حالت چشمه خارجی دارای توزیع دیراک می‌باشد.

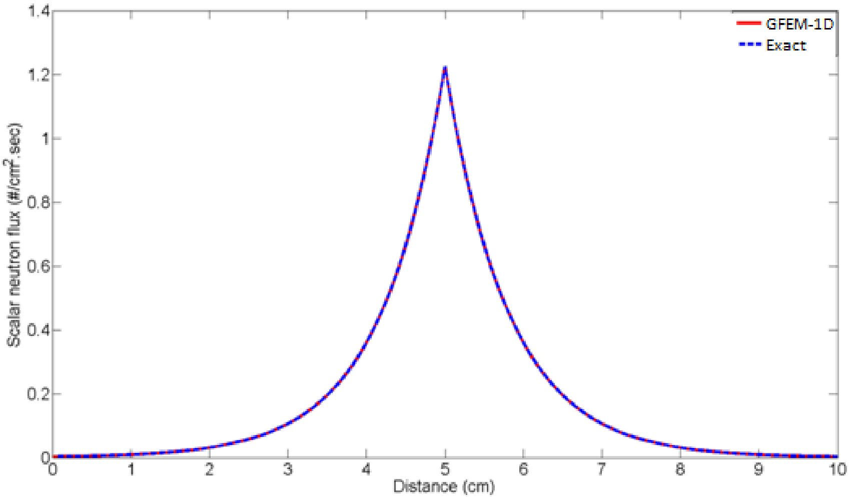
مثال ۸-۳:

برای مثال یک تیغه به ضخامت ۱۰ سانتیمتر که شرایط مرزی هر دو طرف آن خلأ می‌باشد و محیط دارای مشخصات $\Sigma_a = \Sigma_s = 0.5$ است را در نظر بگیرید. یک چشمه به شدت S=1 در مکان x_0=5 cm قرار گرفته است. همان طور که مشخص است جواب تحلیلی معادله پخش برای یک محیط بی‌نهایت، بصورت معادله (۸-۱۰) می‌باشد:

$$\phi(x) = \frac{S\,L}{2D}\exp(-|x - x_0|/L) \qquad (۸\text{-}۱۰)$$

در این رابطه،L طول پخش است که بصورت $L = \sqrt{\dfrac{D}{\Sigma_a}}$ تعریف می‌شود.

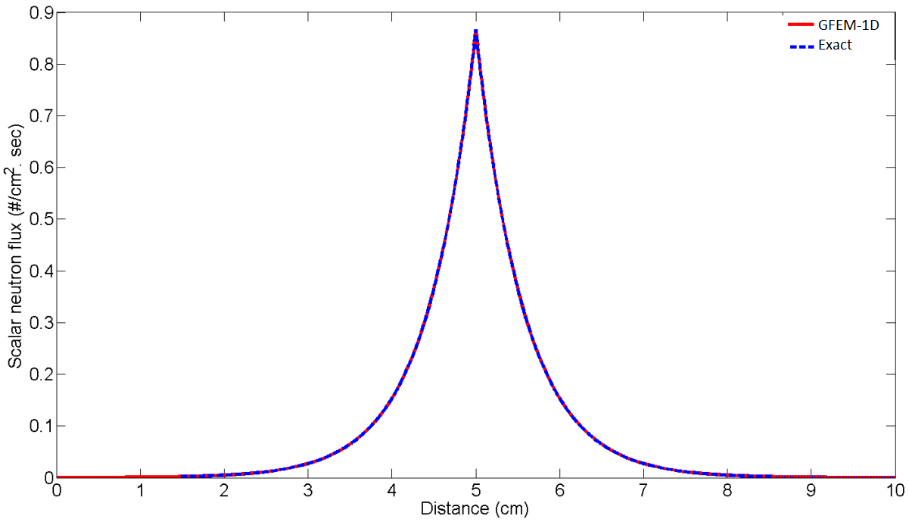
برای تیغه به ضخامت ۱۰ سانتیمتر، چون بزرگتر از چند پویش آزاد متوسط است، معادله (۸-۱۰) اعتبار دارد. در شکل ۳۲، شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و حل تحلیلی مقایسه شده است.



شکل ۳۲: مقایسه شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و حل تحلیلی برای تیغه به ضخامت ۱۰ سانتیمتر با مشخصات

$$\Sigma_a = 0.5, \Sigma_s = 0.5$$

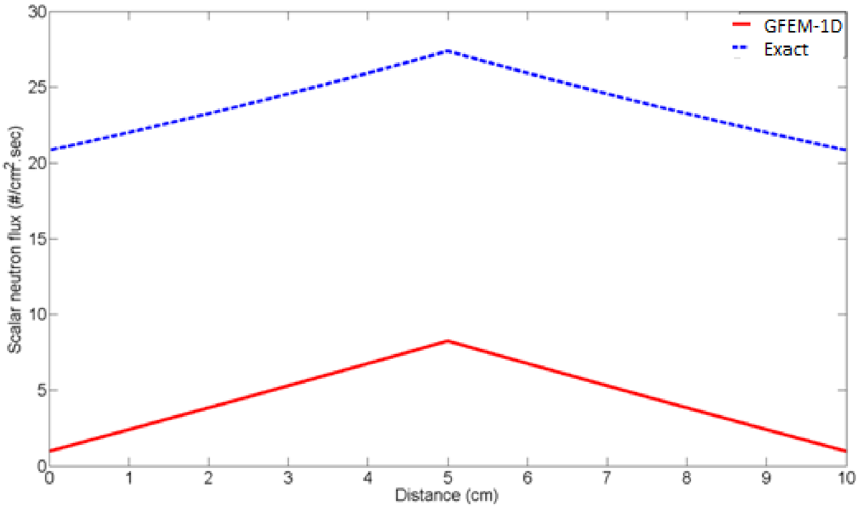
برای محیط با مشخصات $\Sigma_a = 0.999\ cm^{-1}$ و $\Sigma_s = 0.001\ cm^{-1}$ شار نوترونی در شکل ۳۳ نشان داده شده است. برای این محیط نیز چون پویش آزاد متوسط جذب تقریباً برابر ۱ سانتیمتر است، شار نوترونی حاصل از GFEM-1D با پاسخ محیط بی‌نهایت یکی می‌باشد.



شکل ۳۳: مقایسه شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و حل تحلیلی برای تیغه به ضخامت ۱۰ سانتیمتر با مشخصات

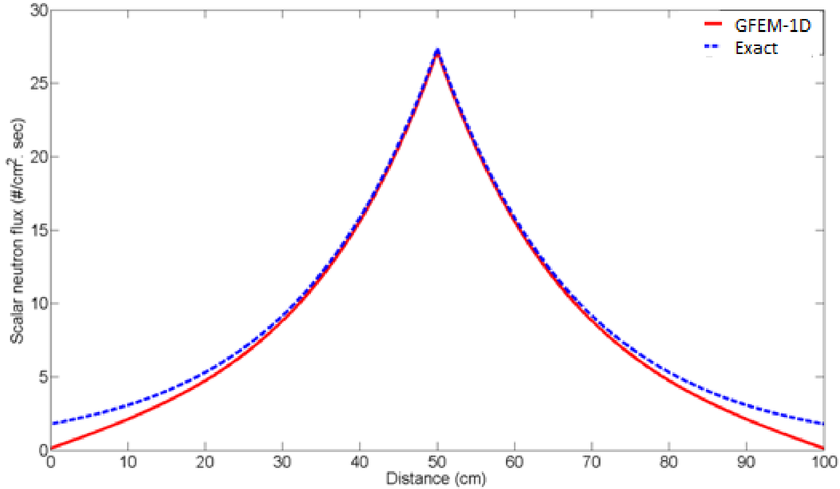
$$\Sigma_a = 0.999, \Sigma_s = 0.001$$

از آنجایی که برای محیط با مشخصات $\Sigma_a = 0.001 cm^{-1}$ و $\Sigma_s = 0.999 cm^{-1}$، پویش آزاد متوسط جذب برابر ۱۰۰۰ سانتیمتر می‌باشد، دیگر تیغه به ضخامت ۱۰ سانتیمتر را نمی‌توان به عنوان محیط بی‌نهایت در نظر گرفت. برای اینکه پاسخ تحلیلی برای یک محیط بی‌نهایت با پاسخ کد GFEM-1D، برابر باشد، بایستی ضخامت تیغه بیشتر از ۱۰۰۰باشد. همان طور که در شکل‌های ۳۴ تا ۳۶ نشان داده شده است، برای تیغه‌های به ضخامت ۱۰، ۱۰۰ و ۵۰۰ سانتیمتر، پاسخ روش المان محدود با پاسخ تحلیلی همخوانی ندارد، ولی مطابق شکل ۳۷، برای تیغه با ضخامت ۱۰۰۰ سانتیمتر، پاسخ‌ها همخوانی خوبی دارند.



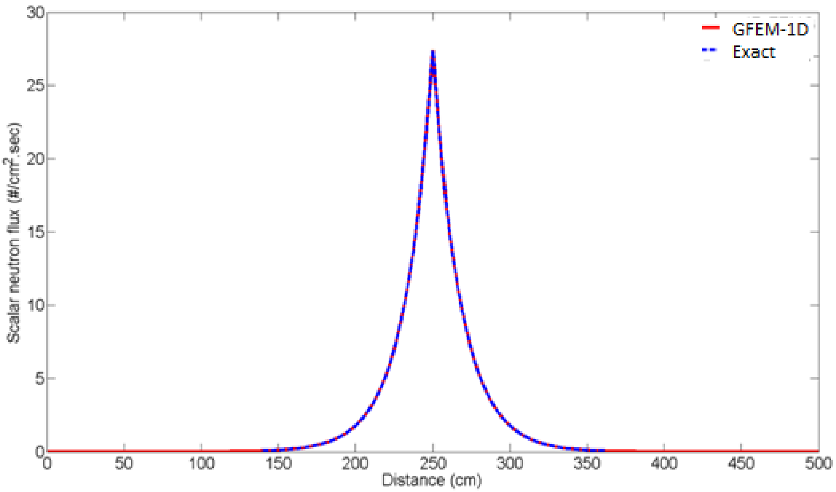
شکل ۳۴: مقایسه شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و حل تحلیلی برای تیغه به ضخامت ۱۰ سانتیمتر با مشخصات

$$\Sigma_a = 0.001, \Sigma_s = 0.999$$



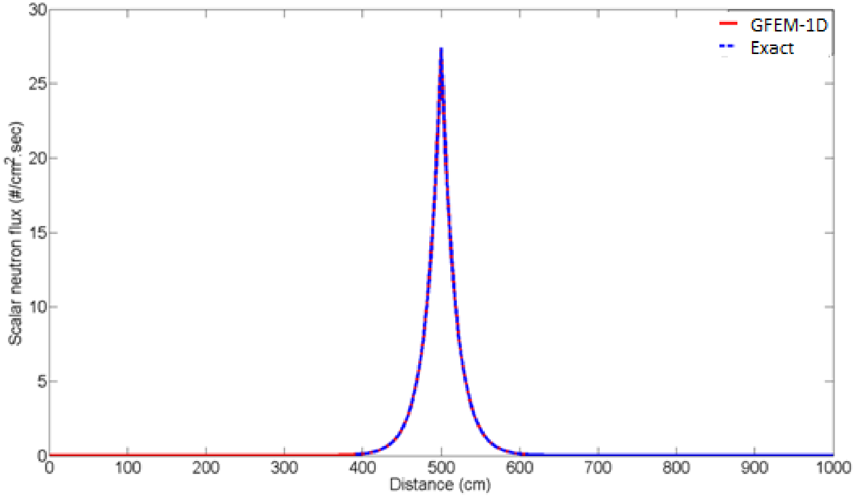
شکل ۳۵: مقایسه شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و حل تحلیلی برای تیغه به ضخامت ۱۰۰ سانتیمتر با مشخصات

$$\Sigma_a = 0.001, \Sigma_s = 0.999$$



شکل ۳۶: مقایسه شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و حل تحلیلی برای تیغه به ضخامت ۵۰۰ سانتیمتر با مشخصات

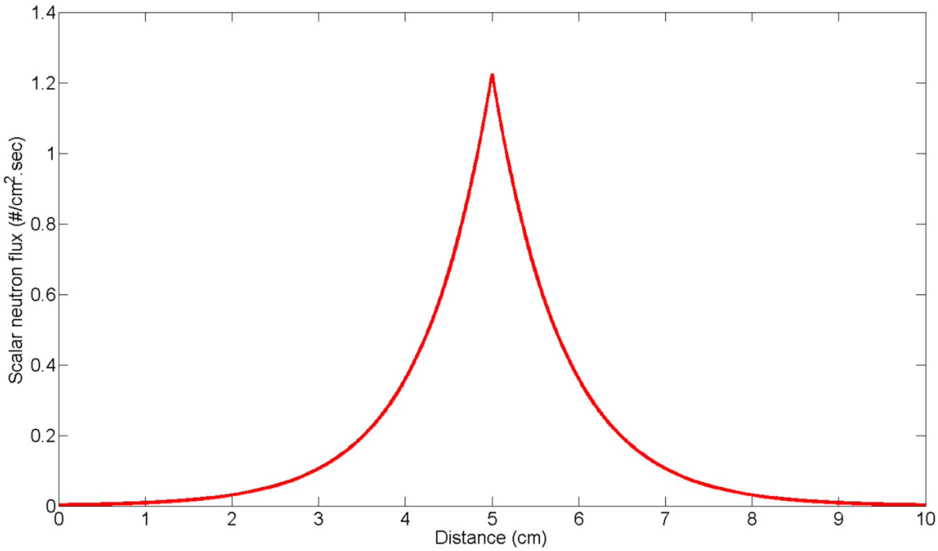
$$\Sigma_a = 0.001, \Sigma_s = 0.999$$



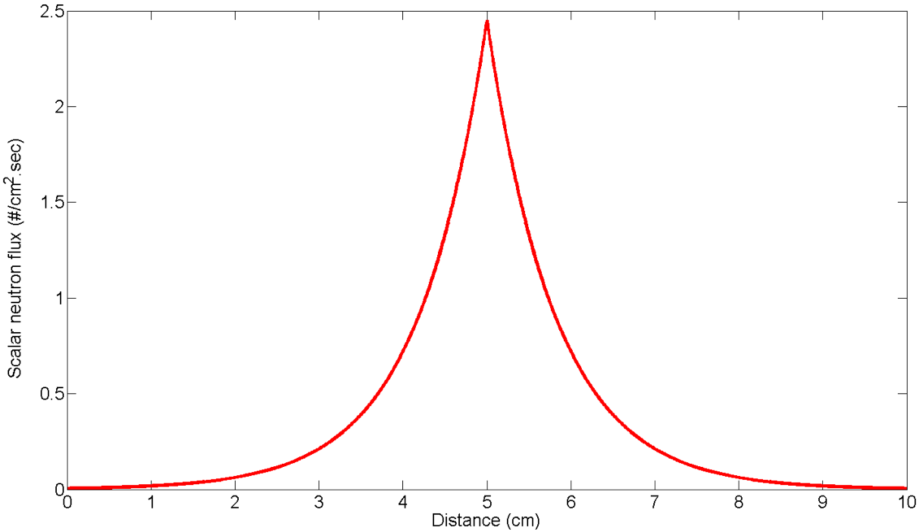
شکل ۳۷: مقایسه شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و حل تحلیلی برای تیغه به ضخامت ۱۰۰۰ سانتیمتر با مشخصات مشخصات $\Sigma_a = 0.001, \Sigma_s = 0.999$

مثال ۸-۴:

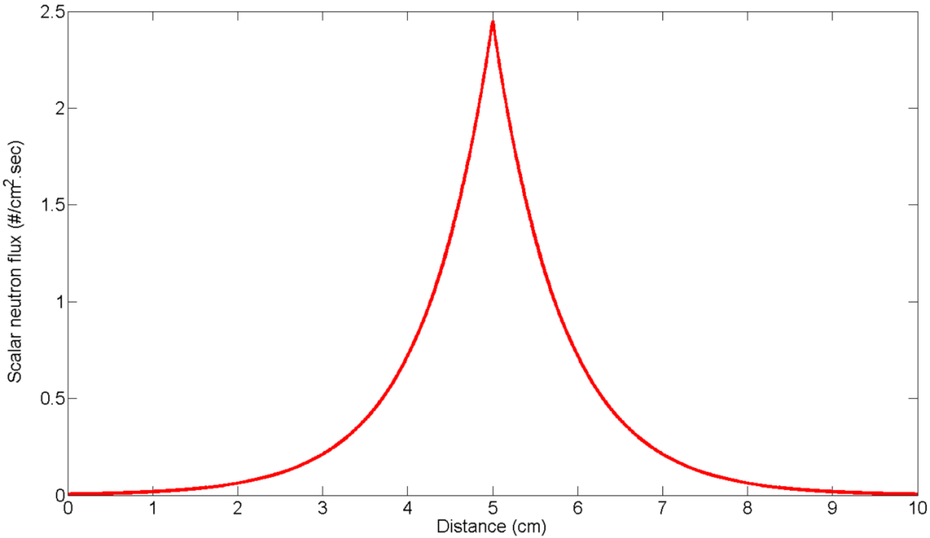
آزمون راستی‌آزمایی دیگری که می‌توان در نظر گرفت، تعین وابستگی شار نوترونی به قدرت چشمه می‌باشد. برای مثال، تیغه‌ای به ضخامت $L = 10cm$ در محیطی با مشخصات $\Sigma_a = 0.5$، $\Sigma_t = 0.5$ و شرایط مرزی خلأ در هر دو طرف آن که دارای چشمه خارجی با قدرت واحد در $x = 10cm$ است، در نظر گرفته شود. شار نوترونی حاصل بصورت شکل ۳۸ خواهد بود. اگر قدرت چشمه، دو برابر شود، شار نوترونی مطابق شکل ۳۹ خواهد شد. اگر دو چشمه نوترونی با قدرت $S = 1$ در $x = 5cm$ قرار داده شوند، شار نوترونی بصورت شکل ۴۰ نمایش داده خواهد شد. همانطور که انتظار می‌رود، زمانی که قدرت چشمه نوترونی، دو برابر می‌شود، مقدار شار نوترونی نیز دو برابر می‌شود. همچنین شار نوترونی حاصل از یک چشمه خارجی با قدرت $S = 2$، معادل شار نوترونی حاصل از دو چشمه نوترونی با قدرت $S = 1$ است.



شکل ۳۸: شار نوترونی حاصل برای تیغه دارای چشمه نوترون با قدرت S=1 در x=5

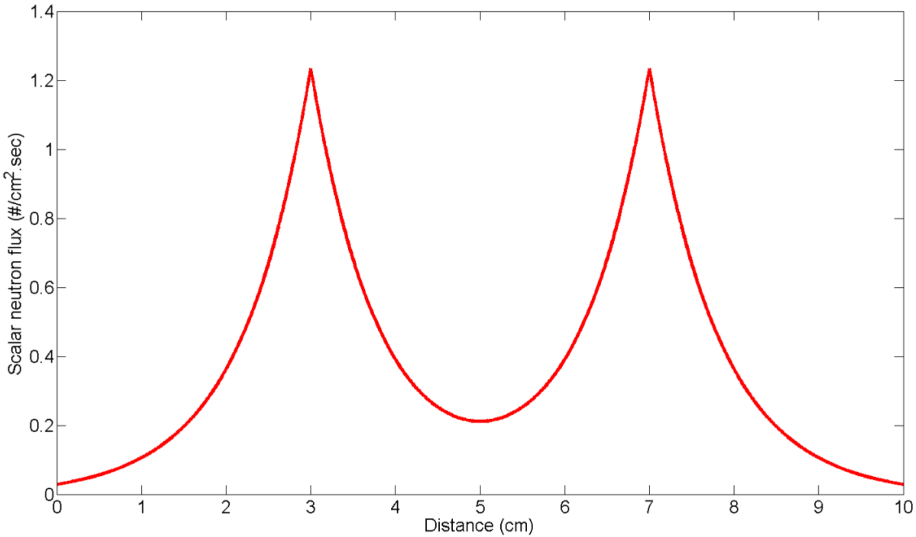


شکل ۳۹: شار نوترونی حاصل برای تیغه دارای چشمه نوترون با قدرت S=2 در x=5



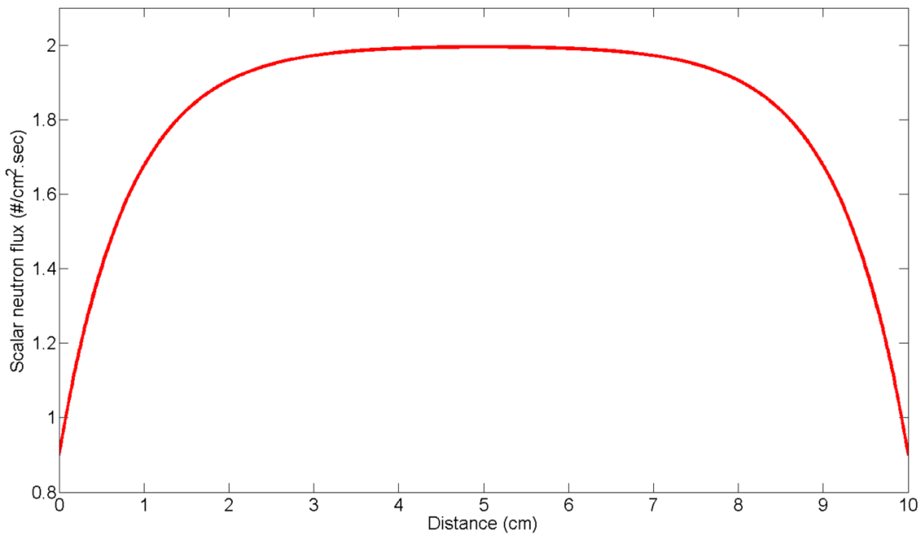
شکل ۴۰: شار نوترونی حاصل برای تیغه دارای دو چشمه نوترون با قدرت S=1 در x=5

اگر در بیش از یک نقطه چشمه نوترونی وجود داشته باشد، طبق قضیه جمع شارها، شار در هر نقطه برابر مجموع شار ناشی از نقاط مختلف می‌باشد. در شکل ۴۱، شار نوترونی حاصل از دو چشمه خارجی با قدرت S=1 که در مکان‌های x=3 و x=7 قرار گرفته، نشان داده شده است.



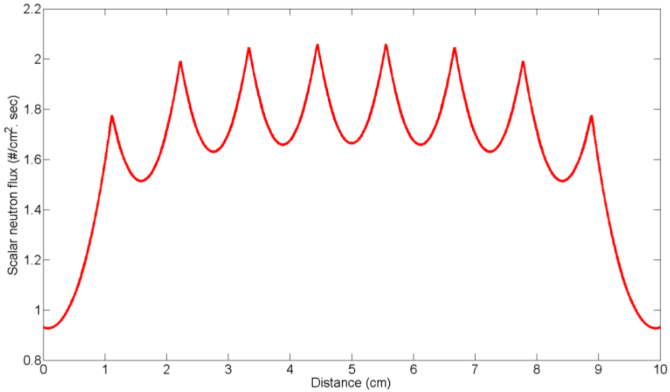
شکل ۴۱: شار نوترونی حاصل برای تیغه دارای دو چشمه نوترون با قدرت S=1 واقع در مکان‌های x=3 و x=7

اگر یک چشمه نوترونی با قدرت ثابت S در فاصله L در نظر گرفته شود، انتظار می‌رود شکل شار نوترونی حاصل از این چشمه با شکل شار نوترونی حاصل از n چشمه نوترون (زمانی که تعداد n زیاد باشد) با قدرت S'= SL/n معادل باشد. در شکل ۴۲، شار نوترونی حاصل از چشمه نوترون با قدرت S=1 و L=10 و شرایط مرزی خلأ در هر دو طرف برای محیط با مشخصات $\Sigma_a = 0.5$ و $\Sigma_t = 0.5$، نمایش داده شده است.



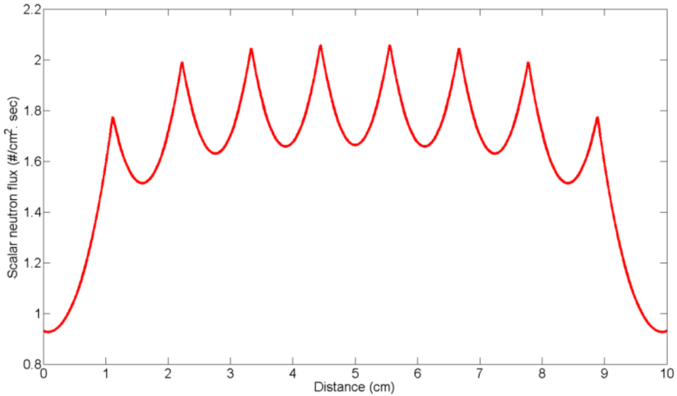
شکل ۴۲: شار نوترونی حاصل برای تیغه دارای چشمه نوترون ثابت با قدرت S=1 در فاصله L

در شکل ۴۳، شار نوترونی حاصل از ۱۰ چشمه نوترون که بصورت متقارن قرار گرفته‌اند و دارای شدت S’=1*10/10=1 می‌باشند، نمایش داده شده است.

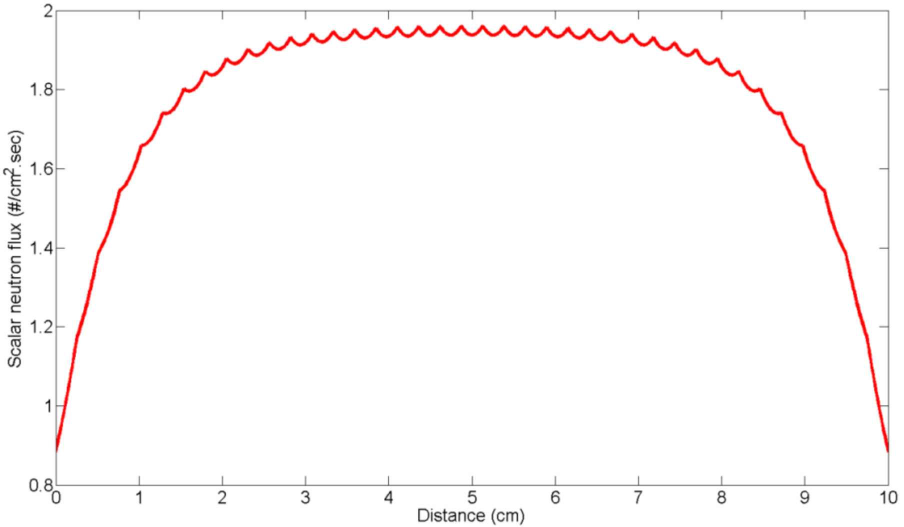


شکل ۴۳: شار نوترونی حاصل برای تیغه دارای ۱۰ چشمه نوترون با قدرت S=1

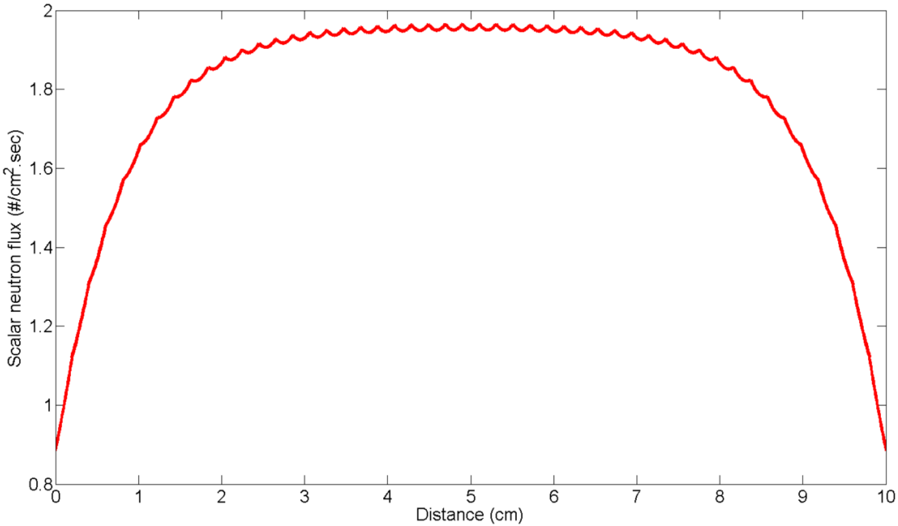
در شکل ۴۴، شار نوترونی حاصل از ۲۰ چشمه نوترونی که بصورت متقارن قرار گرفته‌اند و دارای شدت S’=1*10/10=0.5 می‌باشند، نمایش داده شده است.



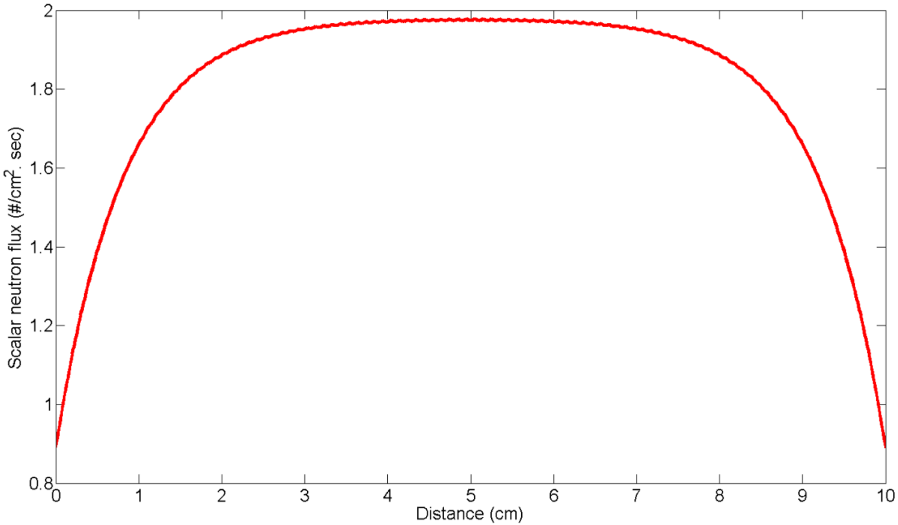
شکل ۴۴: شار نوترونی حاصل برای تیغه دارای ۲۰ چشمه نوترون با قدرت S=0.5



شکل ۴۵: شار نوترونی حاصل برای تیغه دارای ۴۰ چشمه نوترون با قدرت S=0.25



شکل ۴۶: شار نوترونی حاصل برای تیغه دارای ۵۰ چشمه نوترون با قدرت S=0.2

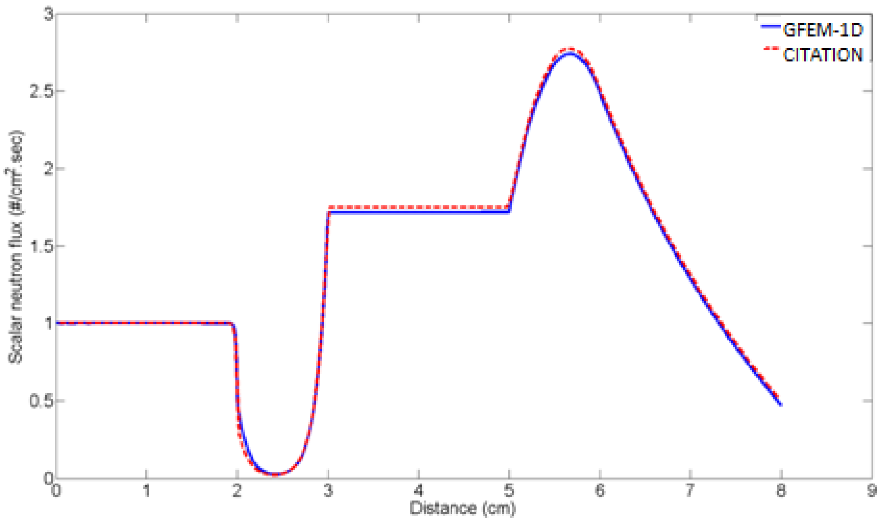


شکل ۴۷: شار نوترونی حاصل برای تیغه دارای ۱۰۰ چشمه نوترون با قدرت S=0.1

همان طور که از شکل‌های بالا مشخص است، با در نظر گرفتن S’ = S L/n، زمانی که تعداد چشمه‌های نوترون افزایش می‌یابد، شار نوترونی حاصل با شار نوترونی ناشی از چشمه ثابت با قدرت S، معادل می‌باشد.

مثال ۸-۵:

مثال تست خلأ که مشخصات آن در جدول ۱ داده شده را در نظر بگیرید. با این تفاوت که فرض می‌شود محیط ۴ شکافت پذیر است و $\nu\Sigma_f = 0.3$ باشد. در شکل ۴۸، شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و CITATION با هم مقایسه شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، شار نوترونی حاصل از دو نرم‌افزار در اکثر نقاط تطابق خوبی با همدیگر دارند و تنها اختلاف اندکی در برخی نقاط، از جمله محیط شکافت پذیر وجود دارد.



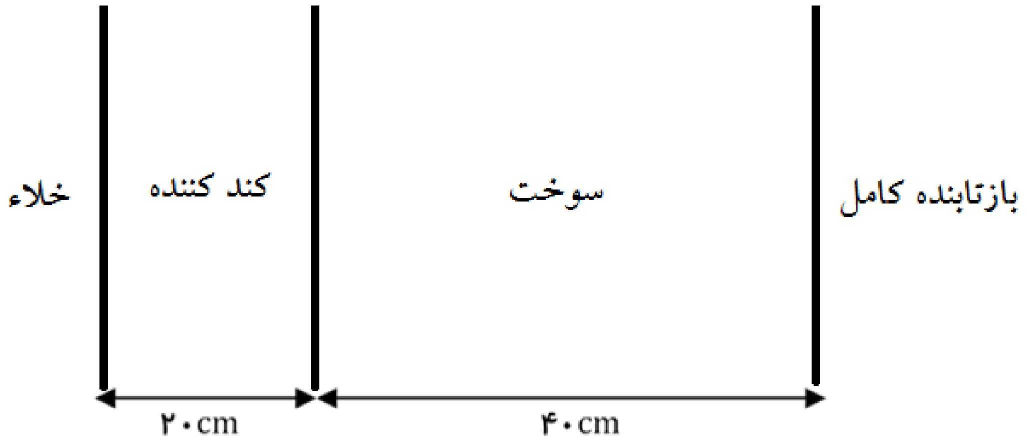
شکل ۴۸: مقایسه شار نوترونی محاسبه شده

۸-۳- مسایل جستجوی ضریب تکثیر مؤثر نوترونی

نوع دیگر از محاسبات در محیط‌های شکافت پذیر، مسایل جستجوی ضریب تکثیرمؤثر نوترونی است که در ادامه با چند مثال توضیح داده می‌شوند.

مثال ۸-۶:

تیغه یک‌بعدی که از دو ناحیه سوخت و کندکننده مطابق شکل ۴۹ تشکیل شده و دارای مشخصات داده شده در جدول ۲ است، در نظر گرفته شود.

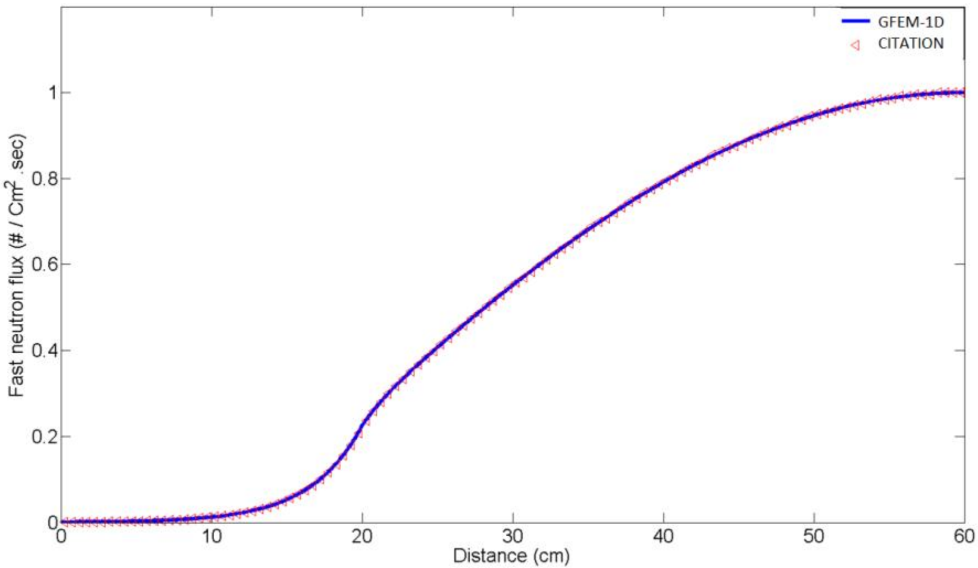


شکل ۴۹: هندسه قلب راکتور دو گروهی با کند کننده حاشیه‌ای

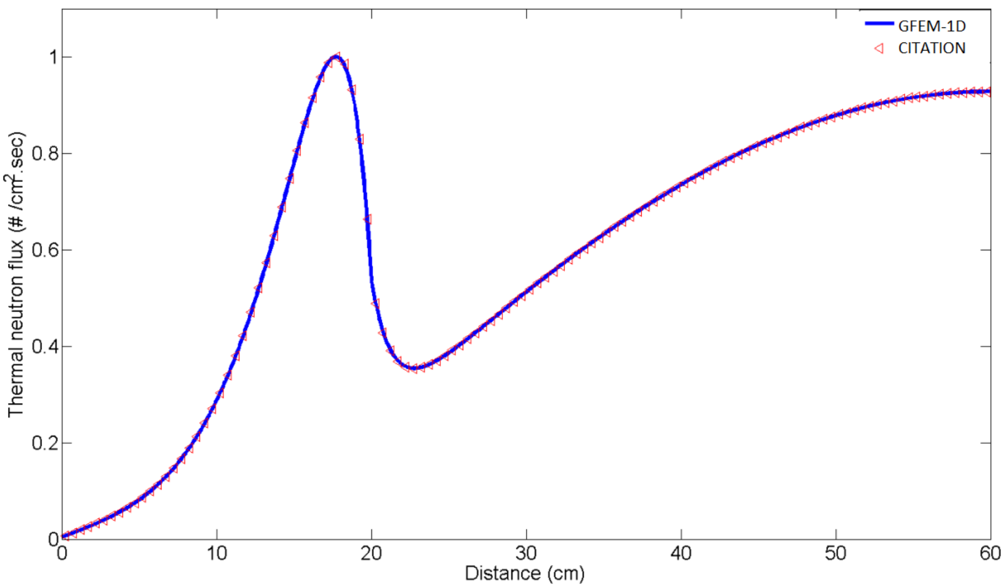
جدول ۲: مشخصات هر یک از دو نواحی در دو گروه انرژی

گروه انرژی	ماده	$\Sigma_{T,g}(cm^{-1})$	$\Sigma_{S,g\to g}(cm^{-1})$	$\Sigma_{S,g\to g+1}(cm^{-1})$	$\nu\Sigma_{f,g}(cm^{-1})$
اول	سوخت	۰/۲۲۲۲۲	۰/۱۵۹۹۲	۰/۰۶۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰
	کند کننده	۰/۲۷۷۷۸	۰/۱۷۶۷۸	۰/۱۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰
دوم	سوخت	۰/۸۳۳۳۳	۰/۶۳۳۳۳	۰/۰۰۰۰۰	۰/۲۱۸۰۰
	کند کننده	۲/۲۲۲۲۲	۲/۲۰۲۲۲	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰

در شکل‌های ۵۰ و ۵۱، نمودار شار نوترونی سریع و حرارتی نشان داده شده است. شار نوترونی حاصل از GFEM-1D با شار نوترونی حاصل از CITATION مقایسه شده است. در جدول ۳، مقدار ضریب تکثیر مؤثر نوترونی بدست آمده از GFEM-1D با مقدار حاصل از CITATION و مرجع دیگر مقایسه شده است. نتایج حاصل، توافق خوبی با همدیگر دارند.



شکل ۵۰: شار نوترونی سریع نرمالیزه شده

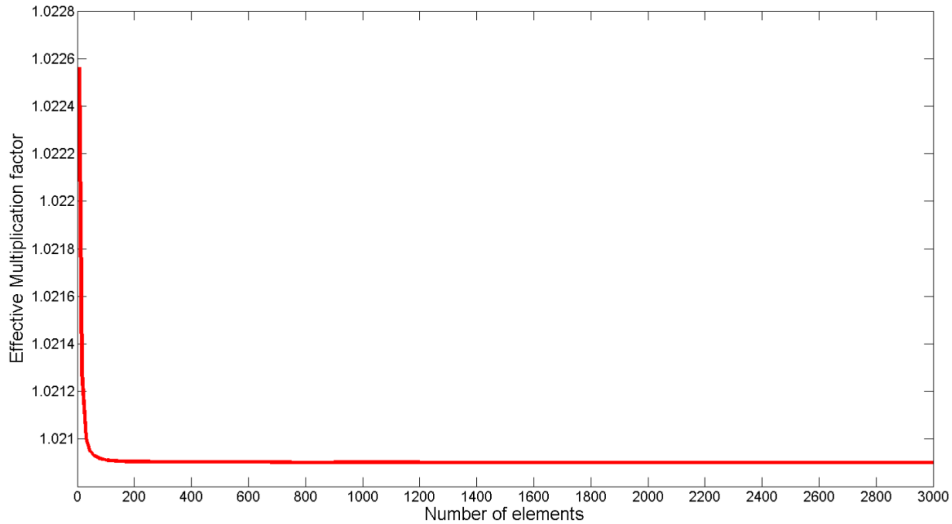


شکل ۵۱: شار نوترونی حرارتی نرمالیزه شده

جدول ۳: مقایسه ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده

CITATION	Kang & Hansen	GFEM-1D
۱/۰۲۰۸۸	۱/۰۲۰۹۰	۱/۰۲۰۹۰

آنالیز حساسیت مقدار ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده به تعداد المان نیز بررسی شده است. همان طور که در شکل ۵۲ مشاهده می‌شود، برای تعداد المان بیشتر از ۵۰ (المان با اندازه تقریبی کمتر از ۱ سانتیمتر)، ضریب تکثیرمؤثر نوترونی تقریباً ثابت بوده و تغییر چندانی نکرده است.



شکل ۵۲: تغییرات ضریب تکثیرمؤثر نوترونی محاسبه شده بر حسب تعداد المان

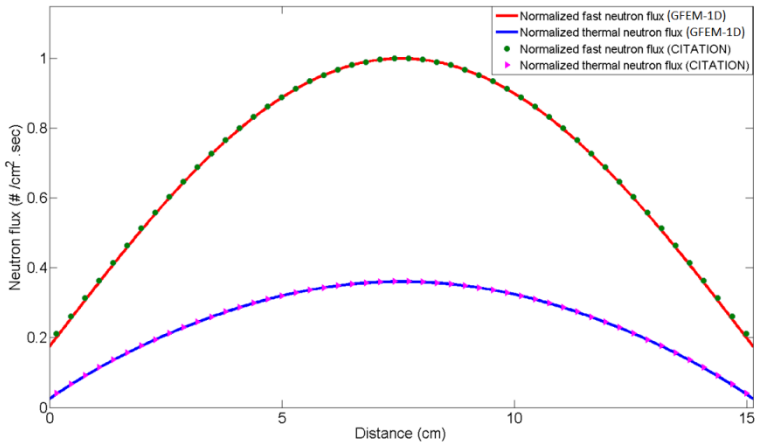
مثال ۸-۷:

تیغه به ضخامت ۱۵/۱۳۳۷۰۷ با مشخصات داده شده در جدول ۴ را در نظر بگیرید.

جدول ۴: مشخصات هر یک از دو نواحی در دو گروه انرژی

گروه انرژی	$\Sigma_{T,g}(cm^{-1})$	$\Sigma_{S,g\to g}(cm^{-1})$	$\Sigma_{S,g\to g+1}(cm^{-1})$	$\nu\Sigma_{f,g}(cm^{-1})$
۱	۰/۶۵۶۹۶	۰/۶۲۵۶۸	۰/۰۲۹۲۲۷	۰/۰۰۲۶۲۱
۲	۲/۵۲۰۲۵	۲/۴۴۳۸۳	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۱۲۶۵۸۰

شکل شار نوترونی سریع و حرارتی نرمالیزه شده در هریک از گروه‌های انرژی در شکل ۵۳ نمایش داده شده است. شار نوترونی حاصل از کد GFEM-1D با شار نوترونی حاصل از CITATION مقایسه شده است.



شکل ۵۳: مقایسه شار نوترونی سریع و حرارتی نرمالیزه شده

در جدول ۵، ضریب تکثیرمؤثر نوترونی محاسبه شده با مقدار محاسبه شده با CITATION مقایسه شده است. همانطور که دیده می‌شود، برای تعداد المان ۱۰۰، مقدار ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده از GFEM-1D و CITATION برابر می‌باشد.

جدول ۵: مقادیر ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده

تعداد المان	CITATION	GFEM-1D
۵۰	۰/۹۸۸۴۱	۰/۹۸۸۱۴
۱۰۰	۰/۹۸۸۲۳	۰/۹۸۸۲۳
۲۰۰	۰/۹۸۸۲۷	۰/۹۸۸۲۵

مثال ۸-۸:

محیط متشکل از سه ناحیه (بازتابنده آب-قلب راکتور-بازتابنده آب) را در نظر بگیرید. پراکندگی در هر دو ناحیه بازتابنده و قلب راکتور بصورت پراکندگی مستقیم[۲] با سطح مقطع‌های داده شده در جداول ۶ و ۷ می‌باشد. ضخامت بازتابنده آب، ۵ سانیمتر و ضخامت قلب راکتور، ۱۰ سانتیمتر می‌باشد.

[2] Direct coupling

جدول ۶: مشخصات قلب راکتور

شماره گروه	$\nu\Sigma_f(cm^{-1})$	$\Sigma_a(cm^{-1})$	$\Sigma_{s,g\to g+1}(cm^{-1})$	$\Sigma_{s,g\to g}(cm^{-1})$	$\Sigma_t(cm^{-1})$	χ_i
۱	۰/۰۰۹۶	۰/۰۰۵۰	۰/۰۸۳۰	۰/۰۶۶۲	۰/۱۵۴۲	۰/۵۷۵
۲	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۲۸	۰/۰۵۸۴	۰/۲۴۵۵	۰/۳۰۶۷	۰/۴۲۵
۳	۰/۰۱۷۷	۰/۰۳۰۶	۰/۰۶۴۵	۰/۴۳۲۵	۰/۵۲۷۶	۰/۰۰۰۰
۴	۰/۱۸۵۱	۰/۱۲۱۰	۰/۰۰۰۰	۰/۸۱۹۸	۰/۹۴۰۸	۰/۰۰۰۰

جدول ۷: مشخصات بازتابنده

شماره گروه	$\nu\Sigma_f(cm^{-1})$	$\Sigma_a(cm^{-1})$	$\Sigma_{s,g\to g+1}(cm^{-1})$	$\Sigma_{s,g\to g}(cm^{-1})$	$\Sigma_t(cm^{-1})$
۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۹۴۱	۰/۰۰۹۱	۰/۱۰۳۲
۲	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۱۳۵۳	۰/۲۱۷۱	۰/۳۵۲۴
۳	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۱۱	۰/۱۳۸۷	۰/۴۱۴۶	۰/۵۵۴۴
۴	۰/۰۰۰۰	۰/۰۱۹۱	۰/۰۰۰۰	۲/۲۷۹	۲/۲۹۸۱

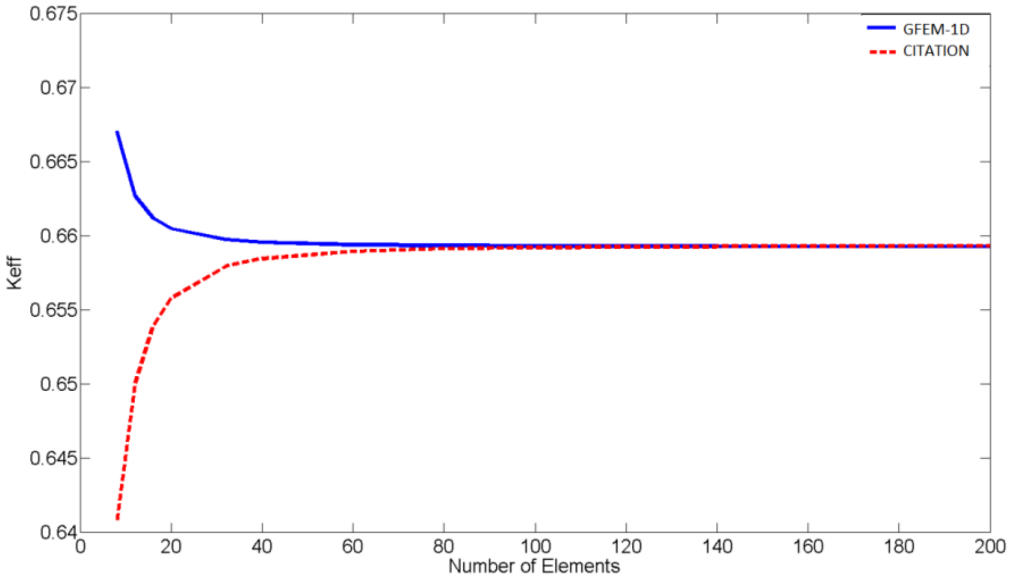
نتایج حاصل از GFEM-1D با نتایج کد کامپیوتری CITATION مقایسه شده است. در جدول ۸، مقدار ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده از این دو کد مقایسه شده است. مقایسه نتایج، بیانگر تطابق خوب ضریب تکثیر مؤثر نوترونی

محاسبه شده است. محاسبات انجام شده با GFEM-1D و CITATION برای المان به طول ۰/۲۵ سانتیمتر انجام شده است.

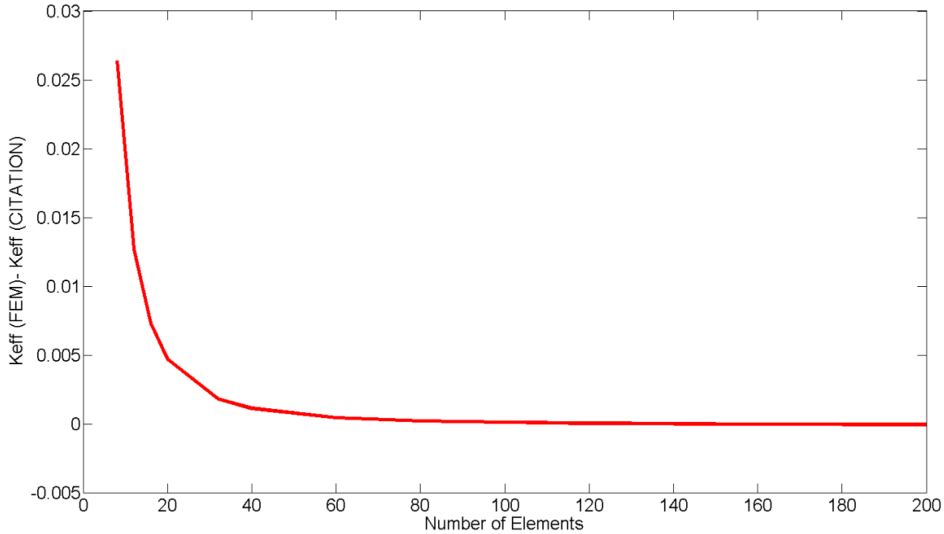
جدول ۸: مقادیر ضریب تکثیرمؤثر نوترونی

GFEM-1D	CITATION
۰/۶۵۹۵۴	۰/۶۵۹۳۶

در شکل ۵۴، ضریب تکثیرمؤثر محاسبه شده برای تعداد المان مختلف نشان داده شده است. در شکل ۵۵، اختلاف بین ضریب تکثیرمؤثر محاسبه شده از GFEM-1D و CITATION نمایش داده شده است.

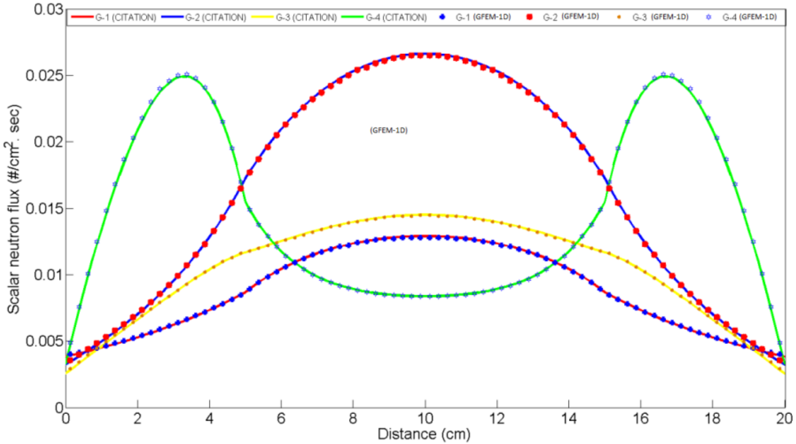


شکل ۵۴: مقایسه مقدار ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده



شکل ۵۵: اختلاف ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده از GFEM-1D و CITATION

در شکل ۵۶، شار نوترونی حاصل از GFEM-1D و CITATION در چهار گروه انرژی موجود با همدیگر مقایسه شده است.



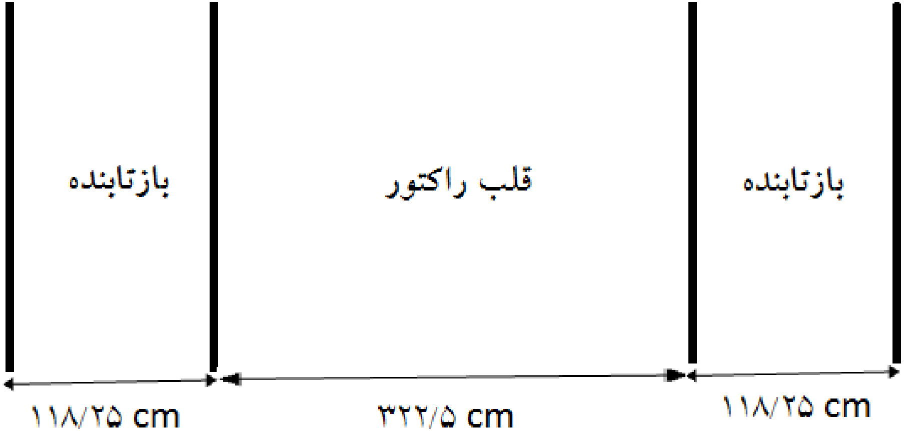
شکل ۵۶: مقایسه شار نوترونی محاسبه شده در گروه‌های انرژی مختلف

۸-۴- محاسبه شار الحاقی

در ادامه، یک مثال برای تأیید صحت محاسبات غیر مستقیم (محاسبات شار الحاقی) آورده شده است. طریقه انجام محاسبات، همانند محاسبات مستقیم بوده و برای محاسبه ضریب تکثیرمؤثر الحاقی از روش تکرار قدرت استفاده شده است.

مثال ۸-۹:

تیغه یک بعدی نشان داده شده در شکل ۵۷، دارای ضخامت قلب راکتور ۳۲۲/۵ سانتیمتر و ضخامت بازتابنده ۱۱۸/۲۵ سانتیمتر با مشخصات داده شده در جداول ۹ و ۱۰ می‌باشد.



شکل ۵۷: شکل هندسی مثال ۸-۹

جدول ۹: مشخصات قلب راکتور

شماره گروه	$\nu\Sigma_f(cm^{-1})$	$\Sigma_a(cm^{-1})$	$\Sigma_{s,g\rightarrow g+1}(cm^{-1})$	$D(cm)$
۱	۰/۰۰۵۷	۰/۰۱۱۵	۰/۰۱۵۱	۱/۴۳۷۶
۲	۰/۱۴۲۵	۰/۱۰۱۹	۰/۰۰۰۰	۰/۳۷۲۳

جدول ۱۰: مشخصات بازتابنده

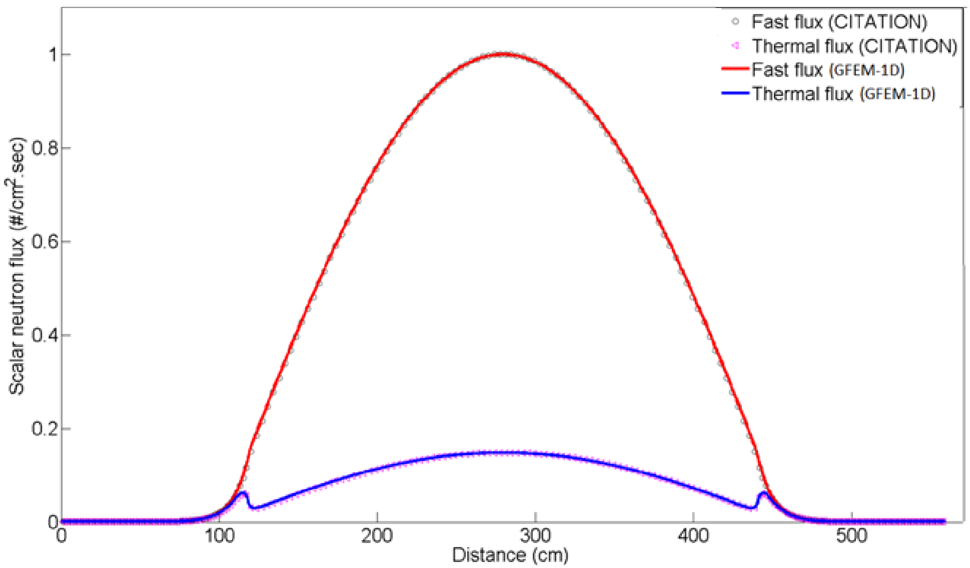
شماره گروه	$\nu\Sigma_f(cm^{-1})$	$\Sigma_a(cm^{-1})$	$\Sigma_{s,g\rightarrow g+1}(cm^{-1})$	$D(cm)$
۱	۰/۰۰۰۰	−۰/۰۰۹۸	۰/۰۲۳۸	۱/۳۱۱۶
۲	۰/۰۰۰۰	۰/۰۲۸۴	۰/۰۰۰۰	۰/۲۶۲۴

در جدول ۱۱، مقدار ضریب تکثیرمؤثر محاسبه شده از روش مستقیم و الحاقی با ضریب تکثیرمؤثر حاصل از CITATION مقایسه شده است. همان طور که مشاهد می‌شود، ضریب تکثیرمؤثر محاسبه شده به روش مستیم و الحاقی تقریباً یکسان می‌باشند و تطابق خوبی با مقدار محاسبه شده با کد CITATION دارند.

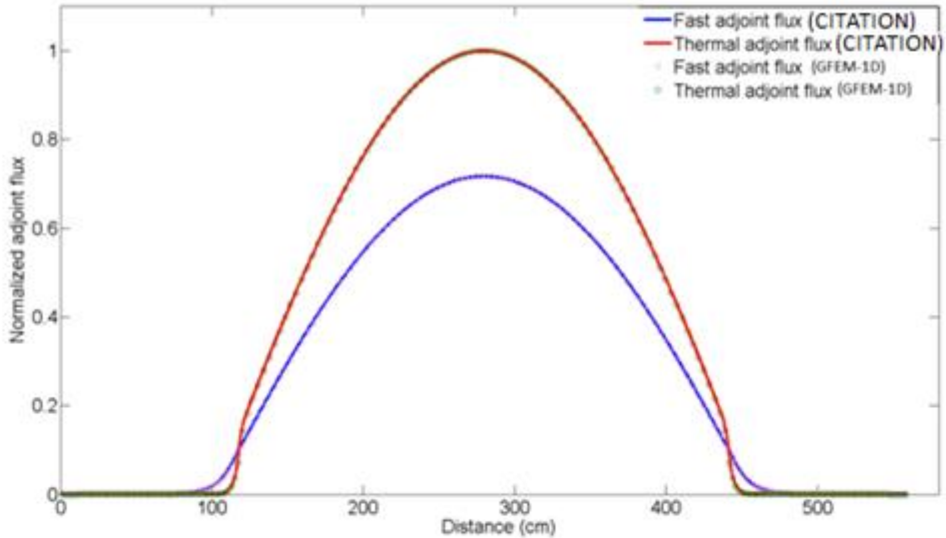
جدول ۱۱: مقایسه ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده

CITATION	GFEM-1D (محاسبات مستقیم)	GFEM-1D (محاسبات الحاقی)
۱/۰۰۲۵۴۳	۱/۰۰۲۵۴۱	۱/۰۰۲۵۴۲

در شکل ۵۸، شار نوترونی سریع و حرارتی نرمالیزه شده حاصل از کد GFEM-1D و کد CITATION مقایسه شده است. همچنین، در شکل ۵۹، شار الحاقی سریع و حرارتی نرمالیزه شده حاصل از کد GFEM-1D و کد CITATION مقایسه شده است. با دقت در این شکل‌ها می‌توان استنباط کرد که شار نوترونی و الحاقی محاسبه شده از GFEM-1D تطابق خوبی با نتایج حاصل از CITATION دارند.



شکل ۵۸: مقایسه شار نوترونی سریع و حرارتی



شکل ۵۹: مقایسه شار الحاقی سریع و حرارتی

۹- بحث و نتیجه‌گیری

در این پروژه، مراحل انجام محاسبات لازم برای بدست آوردن شار نوترونی، شار الحاقی در گروه‌های انرژی مختلف و ضریب تکثیر مؤثر نوترونی و الحاقی آن با استفاده از روش گلرکین در یک محیط تیغه‌ای توضیح داده شد. برای راستی-آزمایی نتایج حاصل از کد توسعه داده شده (GFEM-1D)، از روش‌های مختلفی همچون مقایسه با پاسخ تحلیلی و یا نتایج حاصل از کد CITATION استفاده شد. در نتیجه این مقایسه‌ها، صحت نتایج بدست آمده مورد تأیید قرار گرفت.

۱۰- مراجع

1. Ackroyd, R.T. “Finite Element Methods for particle transport applications to reactor and radiation physics”. Research Studies Press, ISBN 0-86380-181-1, 1997.
2. Babuska, I., Guo, B.Q. “The h-p version of the finite element method: basis theory and applications”. Advances in Engineering Software, Vol. 15, pp. 3-4, 1992.
3. Tabarraei, A andSukumar, N. “Extended Finite Element Method on Polygonal and Quadtree Meshes”. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 197, pp. 425–438, 2008.
4. Hesthaven, J., Gottlieb, S and Gottlieb, D. “Spectral methods for time-dependent problems”. Cambridge UP, Cambridge, UK, 2007.
5. Li, S., Liu, W.K. “Meshfree Particle Methods”. Berlin: Springer Verlag. ISBN 3-540-22256-1, 2004.
6. Sloan, S. “Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming”. Int. J. Num. Anal. Meth. In Geomech, Vol. 12, pp. 61–77, 1988.