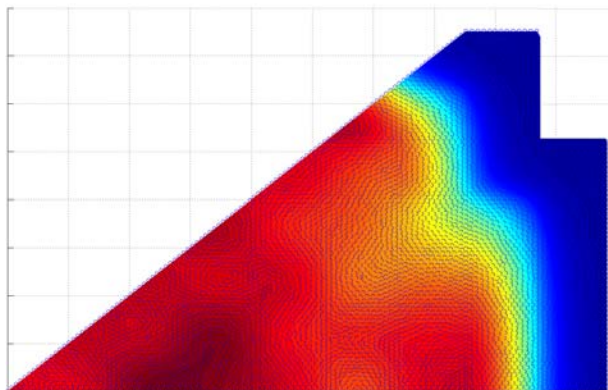


## کد محاسباتی دو بعدی پخش نوترون به روش المان محدود گلرکین



گزارش فنی GFEM-2D

بسته دوم - ویرایش ۰ - مهر ۱۳۹۱

ANC-TEC-DES-FG-200

## فهرست مطالب

- ۱- چکیده..... ۷
- ۲- کلیدواژه ..... ۸
- ۳- اختصارات ..... ۹
- ۴- مقدمه..... ۱۰
- ۵- دامنه گزارش ..... ۱۲
- ۶- حل عددی معادله پخش نوترون و الحاقی چندگروهی در یک محیط دو بعدی با استفاده از روش گلرکین..... ۱۴

۷- راستی آزمایی نتایج ..... ۳۶

۸- بحث و نتیجه گیری ..... ۶۰

۹- مراجع ..... ۶۱

## لیست شکل‌ها

- شکل ۱: تقسیم بندی هندسه مورد نظر به المان مثلثی ..... ۱۶
- شکل ۲: نگاهت از مختصات  $(X, Y)$  به مختصات  $(\zeta, \eta)$  ..... ۲۳
- شکل ۳: هندسه و شرایط مرزی مسئله بحرانیت ..... ۳۸
- شکل ۴: توزیع شار نوترونی سریع محاسبه شده برای مسئله بحرانیت ..... ۴۰
- شکل ۵: توزیع شار نوترونی حرارتی محاسبه شده برای مسئله بحرانیت ..... ۴۱
- شکل ۶: شکل هندسی راکتور BIBLIS-2D ..... ۴۳
- شکل ۷: توزیع شار نوترونی سریع محاسبه شده برای راکتور BIBLIS-2D ..... ۴۷
- شکل ۸: توزیع شار نوترونی حرارتی محاسبه شده برای راکتور BIBLIS-2D ..... ۴۸
- شکل ۹: مقایسه توزیع قدرت محاسبه شده با مقادیر مرجع برای راکتور BIBLIS-2D ..... ۴۹

- شکل ۱۰: شکل هندسی راکتور IAEA-2D ..... ۵۱
- شکل ۱۱: توزیع شار نوترونی سریع محاسبه شده برای راکتور IAEA-2D ..... ۵۴
- شکل ۱۲: توزیع شار نوترونی حرارتی محاسبه شده برای راکتور IAEA-2D ..... ۵۵
- شکل ۱۳: توزیع شار الحاقی سریع محاسبه شده برای راکتور BIBLIS-2D ..... ۵۸
- شکل ۱۴: توزیع شار الحاقی حرارتی محاسبه شده برای راکتور BIBLIS-2D ..... ۵۹

## لیست جدول‌ها

- جدول ۱: مشخصات هر یک از مواد در دو گروه انرژی برای مسئله بحرانیت ..... ۳۷
- جدول ۲: ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده برای مسئله بحرانیت ..... ۳۹
- جدول ۳: مشخصات راکتور BIBLIS-2D ..... ۴۴
- جدول ۴: ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده برای راکتور BIBLIS-2D ..... ۴۶
- جدول ۵: مشخصات راکتور IAEA-2D ..... ۵۲
- جدول ۶: ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده برای راکتور IAEA-2D ..... ۵۳
- جدول ۷: ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده برای راکتور BIBLIS-2D ..... ۵۷

## ۱- چکیده

در این گزارش، معادلات مربوط به پخش نوترون چند گروهی و الحاقی آن در مختصات دو بعدی را بدست آورده و نحوه حل این معادلات با استفاده از روش گسسته‌سازی المان محدود گلرکین توضیح داده می‌شود. هندسه می‌تواند شامل هر نوع مرزی متشکل از خطوط راست (شش‌گوش و راست گوشه) باشد. برای گسسته‌سازی معادلات از المان مثلثی بی-سازمان که توسط نرم افزار گمبیت<sup>۱</sup> تولید شده، استفاده می‌شود. محاسبات جستجوی ضریب تکثیر با استفاده از روش تکرار قدرت انجام شده و در نتیجه آن، ضریب تکثیر مؤثر نوترونی و توزیع شار نوترونی محاسبه می‌شود. نتایج حاصل از

---

<sup>1</sup>Gambit

نرم افزار توسعه داده شده که GFEM-2D نامگذاری شده با نتایج حاصل از حل تحلیلی و یا کدهای کامپیوتری دیگری مورد راستی آزمایی قرار گرفته و صحت آنها بررسی می شود.

## ۲- کلیدواژه

توزیع شار نوترونی، شار الحاقی، المان مثلثی بی سازمان، روش گلرکین، گمبیت.



## ۳- اختصارات

توضیح	عبارت اختصاری	عبارت
روش المان محدود گلرکین	GFEM-2D	Galerkin Finite Element Method
درصد خطای نسبی	RPE	Relative Percent Error
راکتور آبی تحت فشار با هندسه چهارضلعی	PWR	Pressurized Water Reactor
راکتور آبی تحت فشار با هندسه شش ضلعی	WWER	Water Water Energy Reactor

## ۴- مقدمه

در این گزارش، ابتدا معادلات مربوط به پخش نوترون چندگروهی در مختصات دو بعدی را بدست آورده و سپس نحوه حل آن با استفاده از روش گلرکین در مختصات دو بعدی توضیح داده می‌شود. روش گلرکین یکی از روش‌های باقیمانده وزن یافته است که در هدف آن، کمینه کردن خطا (انتگرال حاصلضرب تابع وزن در تابع باقیمانده) می‌باشد. در این روش، تابع وزن همان پاسخ پیشنهادی بدون ضریب ثابت در نظر گرفته می‌شود. برای گسسته سازی از المان مثلثی بی-سازمان که توسط نرم‌افزار گمبیت تولید می‌شود، استفاده می‌گردد.

در فصل ششم، گسسته‌سازی معادلات پخش نوترون چندگروهی با استفاده از روش المان محدود گلرکین انجام شده و سپس با حل هر یک از انتگرال‌ها روی المان موجود، ماتریس‌های محلی بدست می‌آیند. از سرهم بندی<sup>۲</sup> ماتریس‌های محلی حاصل، ماتریس سراسری بدست آورده می‌شود. دستگاه معادلات حاصل از نوع مقدارویژه بوده و با استفاده از روش تکرار قدرت حل می‌شود. در نتیجه این محاسبات، ضریب تکثیر مؤثر نوترونی و توزیع شار نوترونی در هر یک از گروه‌های انرژی بدست آورده می‌شود.

در فصل هفتم، راستی آزمایی محاسبات انجام شده صورت گرفته و نتایج حاصل از نرم‌افزار GFEM-2D با نتایج داده شده در مراجع مقایسه شده است.

فصل هشتم نیز به بحث و نتیجه گیری اختصاص یافته است. در پیوست این گزارش، توضیحات مختصری درباره نحوه تولید المان مثلثی بی سازمان توسط نرم افزار گمبیت داده می شود.

## ۵- دامنه گزارش

نرم افزار GFEM-2D می تواند برای حل معادله پخش نوترون چندگروهی و الحاقی آن برای هر دو نوع راکتورهای PWR و VVER استفاده شود و این یکی از مزایای مهم این نرم افزار است. در این گزارش، مسائل آزمون شامل هر دو نوع راکتور بوده و صحت محاسبات انجام شده تأیید شده است. محاسبات می تواند برای معادله پخش نوترون چندگروهی

انجام شود و هیچ نوع محدودیتی برای در نظر گرفتن پراکندگی از گروه‌های انرژی پایین به گروه‌های انرژی بالا وجود ندارد.

۶- حل عددی معادله پخش نوترون و الحاقی چندگروهی در یک محیط دو بعدی با استفاده از روش

گلرکین

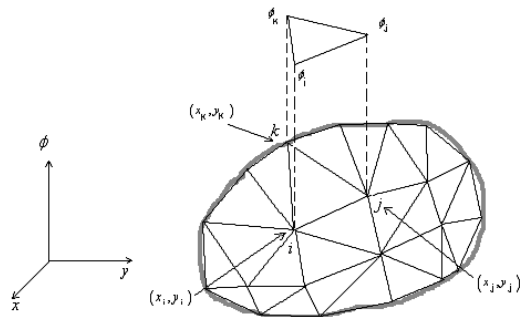
۶-۱- گسسته‌سازی معادله پخش نوترونی به روش گلرکین

همان طور که در گزارش‌های حالت یک بعدی توضیح داده شد اساس کار روش‌های باقیمانده وزن یافته، کمینه کردن انتگرال حاصلضرب باقیمانده در تابع وزن می‌باشد. در روش گلرکین، تابع وزن به صورت جواب تقریبی حدس زده شده برای توزیع شار نوترونی در نظر گرفته می‌شود، با این تفاوت که ضریب ثابت استفاده شده برابر یک است. معادله پخش چندگروهی را مطابق رابطه (۶-۱) در نظر بگیرید.

$$-D_g \nabla^2 \phi_g(r) + \Sigma_{r,g} \phi_g(r) = \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{f=1}^G \nu \Sigma_{f,g} \phi_f(r) + \sum_{g=1}^{g-1} \Sigma_{g \rightarrow g} \phi_g(r) + S_g(r) \quad g = 1, 2, \dots, G \quad (1-6)$$

در این رابطه،  $D_g$  ضریب پخش مربوط به گروه  $g$ ،  $\Sigma_{r,g}$  سطح مقطع ماکروسکوپی برداشت گروه  $g$ ،  $\Sigma_{f,g'}$  سطح مقطع ماکروسکوپی شکافت گروه  $g'$ ،  $\Sigma_{g' \rightarrow g}$  سطح مقطع ماکروسکوپی پراکندگی از گروه  $g'$  به گروه  $g$ ،  $S_g(r)$  چشمه نوترونی خارجی که دارای انرژی در محدوده گروه  $g$  بوده،  $k_{eff}$  ضریب تکثیر مؤثر نوترونی،  $\phi_g(r)$  توزیع شار نوترونی گروه  $g$  و  $\chi_g$  طیف نوترونی گروه  $g$  است.

برای حل معادله پخش نوترون در مختصات دو بعدی لازم است که ابتدا ناحیه مورد نظر به المان کوچکتر تقسیم شود که این المان می‌تواند سه ضلعی، چهار ضلعی و یا انواع دیگری باشد. المان مورد استفاده در اینجا از نوع سه ضلعی درجه ۱ می‌باشند، شکل ۱ را در نظر بگیرید که به المان مثلثی تقسیم شده است.



شکل ۱: تقسیم بندی هندسه مورد نظر به المان مثلثی

یکی از مثلث های این صفحه (المان  $e$ ) را در نظر بگیرید. تابع تقریبی که بتواند توزیع شار نوترونی را درون مثلث تقریب بزند به صورت رابطه (۲-۶) است:

$$\phi^{(e)}(x, y) = \beta_1^{(e)} + \beta_2^{(e)} x + \beta_3^{(e)} y \quad (۲-۶)$$



برای بدست آوردن  $\beta_1^{(e)}$ ،  $\beta_2^{(e)}$  و  $\beta_3^{(e)}$ ، مقدار  $\phi^{(e)}$  به ازای مختصات مربوطه اش جایگذاری می شود:

$$\phi_i = \beta_1^{(e)} + \beta_2^{(e)} x_i + \beta_3^{(e)} y_i \quad (۳-۶)$$

$$\phi_j = \beta_1^{(e)} + \beta_2^{(e)} x_j + \beta_3^{(e)} y_j \quad (۴-۶)$$

$$\phi_k = \beta_1^{(e)} + \beta_2^{(e)} x_k + \beta_3^{(e)} y_k \quad (۵-۶)$$

از حل معادلات (۳-۶)، (۴-۶) و (۵-۶) نتیجه می شود:

$$\beta_1^{(e)} = \frac{\phi_i(x_j y_k - y_j x_k) + \phi_j(x_j y_i - y_j x_i) + \phi_k(x_i y_j - y_i x_j)}{2\Delta^{(e)}} \quad (۶-۶)$$

$$\beta_2^{(e)} = \frac{\phi_i(y_j - y_k) + \phi_j(y_k - y_i) + \phi_k(y_i - y_j)}{2\Delta^{(e)}} \quad (۷-۶)$$

$$\beta_3^{(e)} = \frac{\phi_i(x_k - x_i) + \phi_j(x_i - x_k) + \phi_k(x_j - x_i)}{2\Delta^{(e)}} \quad (۸-۶)$$

با تعریف  $2\Delta^{(e)}$  به صورت رابطه (۹-۶):

$$2\Delta^{(e)} = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (۹-۶)$$

و با جایگذاری  $\beta^{(e)}$  ها در معادله (۲-۶)، رابطه زیر بدست می آید:

$$\phi^{(e)}(x, y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta^{(e)}} \phi_i + \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2\Delta^{(e)}} \phi_j + \frac{a_k + b_k x + c_k y}{2\Delta^{(e)}} \phi_k \quad (۱۰-۶)$$

$$a_i = x_j y_k - y_j x_k; b_i = y_j - y_k; c_i = x_k - x_j \quad (۱۱-۶)$$

$$a_j = x_k y_i - y_k x_i; b_j = y_k - y_i; c_j = x_i - x_k \quad (۱۲-۶)$$

$$a_k = x_i y_j - y_i x_j; b_k = y_i - y_j; c_k = x_j - x_i \quad (۱۳-۶)$$

پس اگر تعریف شود:

$$L_n^{(e)}(x, y) = \frac{a_n + b_n x + c_n y}{2\Delta^{(e)}}; \quad n = i, j, k \quad (۱۴-۶)$$

می‌توان  $\phi^{(e)}(x, y)$  در هر المان را بصورت معادله (۱۵-۶) نوشت:

$$\phi^{(e)}(x, y) = N_i^{(e)}(x, y)\phi_i + N_j^{(e)}(x, y)\phi_j + N_k^{(e)}(x, y)\phi_k \quad (۱۵-۶)$$

و در مورد کل ناحیه شکل ۱ می توان نوشت:

$$\phi(x, y) = \underline{N}^T \underline{\phi} \quad (۱۶-۶)$$

که بردار  $\underline{N}$  در هر المان با توجه به شماره گره‌های المان و مختصات آنها (گره‌ها) تعیین می‌شود.

در مورد بردار  $\underline{N}$  باید به این نکات مهم توجه شود:

اول اینکه

$$N_i^{(e)}(x, y) + N_j^{(e)}(x, y) + N_k^{(e)}(x, y) = 1 \quad (۱۷-۶)$$

و دوم اینکه در این ناحیه می‌توان نوشت:

$$x^{(e)}(x, y) = x_i N_i^{(e)}(x, y) + x_j N_j^{(e)}(x, y) + x_k N_k^{(e)}(x, y) \quad (۱۸-۶)$$

$$y^{(e)}(x, y) = y_i N_i^{(e)}(x, y) + y_j N_j^{(e)}(x, y) + y_k N_k^{(e)}(x, y) \quad (۱۹-۶)$$

بنابراین برای سادگی، بردار  $\underline{N}$  در حالت محلی بصورت معادله (۲۰-۶) نوشته می‌شود:

$$\underline{N}^{(e)} = [N_1^{(e)} \quad N_2^{(e)} \quad N_3^{(e)}]^T \quad (۲۰-۶)$$

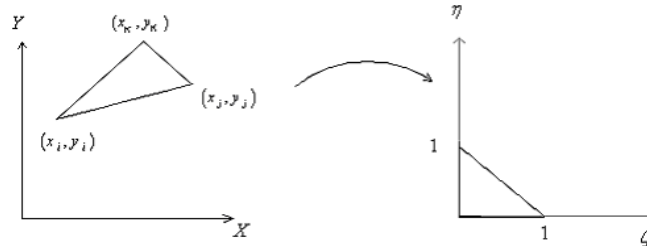
و  $\underline{N}^{(e)} \underline{N}^{(e)T}$  در حالت محلی بصورت معادله (۲۱-۶) تبدیل می‌شود:

$$\underline{N}^{(e)} \underline{N}^{(e)T} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} N_1^{(e)} & N_1^{(e)} N_2^{(e)} & N_1^{(e)} N_3^{(e)} \\ N_2^{(e)} N_1^{(e)} & N_2^{(e)} N_2^{(e)} & N_2^{(e)} N_3^{(e)} \\ N_3^{(e)} N_1^{(e)} & N_3^{(e)} N_2^{(e)} & N_3^{(e)} N_3^{(e)} \end{bmatrix} \quad (۲۱-۶)$$

اکنون به بررسی جزئیات حل معادله پخش در حالت دو بعدی پرداخته می‌شود. مهمترین چیزی که در حل معادله پخش به آن نیاز است حل انتگرال‌هایی بصورت معادله (۶-۲۲) است:

$$\iint_{\Omega^{(e)}} \underline{N}^{(e)} \underline{N}^{(e)T} d\Omega \quad (۶-۲۲)$$

که در اینجا منظور از  $\Omega^{(e)}$ ، مساحت المان  $e$  می‌باشد. برای حل این انتگرال باید ابتدا ناحیه مثلثی مورد نظر در شکل ۱ به شکل ساده‌تری، که در شکل ۲ آمده است، نگاشته شود.



شکل ۲: نگاشت از مختصات  $(X, Y)$  به مختصات  $(\zeta, \eta)$

فرض کنید که مثلث نشان داده شده در شکل ۱ تحت نگاشتی به مثلث نشان داده شده در مختصات  $(\zeta, \eta)$  در شکل ۲ نگاشت شده است. در این صورت توابع شکل در مثلث جدید بصورت معادلات (۲۳-۶) تا (۲۵-۶) بیان می‌شوند:

$$L_1^{(e)} = 1 - \zeta^{(e)} - \eta^{(e)} \quad (۲۳-۶)$$

$$L_2^{(e)} = \zeta^{(e)} \quad (۲۴-۶)$$

$$L_3^{(e)} = \eta^{(e)} \quad (۲۵-۶)$$

که  $\zeta^{(e)}$  و  $\eta^{(e)}$  در عبارات فوق تابعی از مکان می‌باشند، یا به عبارتی:

$$\zeta^{(e)} = \zeta^{(e)}(x, y) \quad (۲۶-۶)$$

$$\eta^{(e)} = \eta^{(e)}(x, y) \quad (۲۷-۶)$$

پس می‌توان نوشت:

$$x^{(e)}(\zeta(x, y), \eta(x, y)) = \sum_{i=1}^3 x_i^{(e)} L_i^{(e)} = x_i^{(e)}(1 - \zeta^{(e)} - \eta^{(e)}) + x_j^{(e)} \zeta^{(e)} + x_k^{(e)} \eta^{(e)} \quad (۲۸-۶)$$



$$y^{(e)}(\zeta(x, y), \eta(x, y)) = \sum_{i=1}^3 y_i^{(e)} L_i^{(e)} = y_i^{(e)}(1 - \zeta^{(e)} - \eta^{(e)}) + y_j^{(e)} \zeta^{(e)} + y_k^{(e)} \eta^{(e)} \quad (29-6)$$

با توجه به معادله  $N_k^{(e)}(x, y) = 1 - N_i^{(e)}(x, y) - N_j^{(e)}(x, y)$  و مساوی قرار دادن معادلات (28-6) و (29-6) با معادلات (18-6) و (19-6) رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\zeta^{(e)}(x, y) = \frac{1}{2\Delta^{(e)}} [(y_3^{(e)} - y_1^{(e)})(x - x_1^{(e)}) + (x_1^{(e)} - x_3^{(e)})(y - y_1^{(e)})] \quad (30-6)$$

$$\eta^{(e)}(x, y) = \frac{1}{2\Delta^{(e)}} [(y_1^{(e)} - y_2^{(e)})(x - x_1^{(e)}) + (x_2^{(e)} - x_1^{(e)})(y - y_1^{(e)})] \quad (31-6)$$

همچنین از دو معادله اخیر می‌توان براحتی نتیجه گرفت که:

$$L_1^{(e)} = 1 - \zeta^{(e)} - \eta^{(e)} = N_1^{(e)} \quad (۳۲-۶)$$

$$L_2^{(e)} = \zeta^{(e)} = N_2^{(e)} \quad (۳۳-۶)$$

$$L_3^{(e)} = \eta^{(e)} = N_3^{(e)} \quad (۳۴-۶)$$

و بنابراین:

$$\iint_{\Omega^{(e)}} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-\zeta^{(e)}} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J| d\zeta d\eta \quad (۳۵-۶)$$

که  $J$  ژاکوبین نگاشت مربوطه می باشد:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^{(e)}}{\partial \xi^{(e)}} & \frac{\partial x^{(e)}}{\partial \eta^{(e)}} \\ \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \xi^{(e)}} & \frac{\partial y^{(e)}}{\partial \eta^{(e)}} \end{vmatrix} \quad (36-6)$$

و بنابراین:

$$\iint_{\Omega^{(e)}} \underline{N}^{(e)} \underline{N}^{(e)T} d\Omega = \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} \begin{bmatrix} 1 - \zeta^{(e)} - \eta^{(e)} \\ \zeta^{(e)} \\ \eta^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \zeta^{(e)} - \eta^{(e)} \\ \zeta^{(e)} \\ \eta^{(e)} \end{bmatrix}^T 2\Delta^{(e)} d\eta d\zeta = 2\Delta^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \quad (37-6)$$

با توجه به مطالب گفته شده می توان به حل معادله پخش پرداخت. ابتدا دو طرف معادله در تابع وزن  $w(x, y)$  ضرب شده و روی مساحت هر المان انتگرال گرفته و در نهایت با هم جمع می شوند:

$$w(x, y) = \underline{N}(x, y) \quad (38-6)$$

با ضرب دو طرف معادله بالا در تابع وزن و انتگرالگیری روی کل ناحیه، معادله (39-6) بدست می آید:

$$\iint_{\Omega} d\Omega w(x, y) (-D_g \nabla^2 \phi_g(x, y) + \Sigma_{r,g} \phi_g(x, y) - \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g=1}^G \nu \Sigma_{f,g} \phi_g(x, y) - \sum_{g=1}^{g-1} \Sigma_{g \rightarrow g} \phi_g(x, y) - S_g(x, y)) = 0 \quad (39-6)$$

با استفاده از قضیه دوم گرین می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 - \iint_{\Omega} d\Omega w(x, y) \nabla^2 \phi(x, y) &= \iint_{\Omega} d\Omega \nabla w(x, y) \cdot \nabla \phi(x, y) - \iint_{\Omega} d\Omega \nabla \cdot (w(x, y) \nabla \phi(x, y)) = \\
 \iint_{\Omega} d\Omega \nabla w(x, y) \cdot \nabla \phi(x, y) - \int_{\partial\Omega} \vec{ds} \cdot w(x, y) \nabla \phi(x, y) &= \quad (۴۰-۶) \\
 \iint_{\Omega} d\Omega \nabla w(x, y) \cdot \nabla \phi(x, y) - \int_{\partial\Omega} ds w(x, y) \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} &
 \end{aligned}$$

که  $\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} = \nabla \phi(x, y) \cdot \vec{n}$  و  $\vec{n}$  بردار نرمال عمود بر مرز سطح  $\Omega$  می‌باشد. با جایگذاری معادلات (۳۸-۶) و (۴۰-۶)

در معادله (۳۹-۶) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\left[ \iint_{\Omega} d\Omega D_g \nabla \underline{N}(x, y) \nabla \phi_g(x, y) + \sum_{r,g} \iint_{\Omega} d\Omega \underline{N}(x, y) \phi_g(x, y) - \int_{\partial\Omega} ds D_g \underline{N}(x, y) \frac{\partial \phi_g(x, y)}{\partial n} \right] =$$

$$\left[ \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{f,g} \nu \Sigma_{f,g} \iint_{\Omega} d\Omega \underline{N}(x, y) \phi_g(x, y) + \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{g' \rightarrow g} \iint_{\Omega} d\Omega \underline{N}(x, y) \phi_{g'}(x, y) + \iint_{\Omega} d\Omega \underline{N}(x, y) S_g(x, y) \right] = 0$$

(۴۱-۶)

در مرزهای هندسه مورد نظر، یکی از شرایط مرزی خلاً یا بازتابنده کامل برقرار است:

$$\int_{\partial\Omega} ds D_g \underline{N}(x, y) \frac{\partial \phi_g(x, y)}{\partial n} = \int_{\partial\Omega'} ds D_g \underline{N}(x, y) \frac{\partial \phi_g(x, y)}{\partial n} + \int_{\partial\Omega^V} ds D_g \underline{N}(x, y) \frac{\partial \phi_g(x, y)}{\partial n}$$

(۴۲-۶)

که  $d\Omega'$  مرز مشترک با بازتابنده کامل و  $d\Omega^V$  مرز مشترک با خلاً می‌باشد. در مرز مشترک با بازتابنده کامل، شرط

مرزی بصورت

$$\frac{\partial \phi_g(x, y)}{\partial n} = 0 \quad (۴۳-۶)$$

و در مرز مشترک با خلأ بصورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial \phi_g(x, y)}{\partial n} = \frac{-\phi_g(x, y)}{2D_g} \quad (۴۴-۶)$$

بنابراین:

$$\int_{\partial\Omega} ds D_g \underline{N}(x, y) \frac{\partial \phi_g(x, y)}{\partial n} = \int_{\partial\Omega^V} ds D_g \underline{N}(x, y) \frac{-\phi_g(x, y)}{2} \quad (۴۵-۶)$$

با شکستن انتگرال‌های معادله (۴۲-۶) روی هر المان و جایگذاری  $\phi^{(e)}(x, y) = \underline{N}^{(e)}(x, y)\phi$ ، معادله (۴۶-۶) بدست می‌آید:

$$\sum_{e=1}^E \left[ \iint_{\Omega^{(e)}} d\Omega D_g \nabla \underline{N}^{(e)} \nabla \underline{N}^{(e)T} \phi_g^{(e)} + \sum_{rg}^{(e)} \iint_{\Omega^{(e)}} d\Omega \underline{N}^{(e)} \underline{N}^{(e)T} \phi_g^{(e)} + \int_{\partial\Omega^{(e)V}} ds \frac{\underline{N}^{(e)} \underline{N}^{(e)T}}{2} \right] = \quad (۴۶-۶)$$

$$\sum_{e=1}^E \left[ \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'} \iint_{\Omega^{(e)}} d\Omega \underline{N}^{(e)} \underline{N}^{(e)T} \phi_{g'}^{(e)} + \sum_{g=1}^{g-1} \Sigma_{g \rightarrow g} \iint_{\Omega^{(e)}} d\Omega \underline{N}^{(e)} \underline{N}^{(e)T} \phi_g^{(e)} + \iint_{\Omega^{(e)}} d\Omega \underline{N}^{(e)} S_g(r) \right] = 0$$

سه نوع انتگرال در معادله فوق وجود دارد که اولین نوع آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:



$$\iint_{\Omega^{(e)}} d\Omega \nabla \underline{N}^{(e)} \nabla \underline{N}^{(e)T} = \iint_{\Omega^{(e)}} d\Omega \frac{1}{2\Delta^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1^{(e)} & c_1^{(e)} \\ b_2^{(e)} & c_2^{(e)} \\ b_3^{(e)} & c_3^{(e)} \end{bmatrix} \frac{1}{2\Delta^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1^{(e)} & c_1^{(e)} \\ b_2^{(e)} & c_2^{(e)} \\ b_3^{(e)} & c_3^{(e)} \end{bmatrix} = \quad (47-6)$$

$$\frac{1}{4\Delta^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1^{(e)}b_1^{(e)} + c_1^{(e)}c_1^{(e)} & b_1^{(e)}b_2^{(e)} + c_1^{(e)}c_2^{(e)} & b_1^{(e)}b_3^{(e)} + c_1^{(e)}c_3^{(e)} \\ b_2^{(e)}b_1^{(e)} + c_2^{(e)}c_1^{(e)} & b_2^{(e)}b_2^{(e)} + c_2^{(e)}c_2^{(e)} & b_2^{(e)}b_3^{(e)} + c_2^{(e)}c_3^{(e)} \\ b_3^{(e)}b_1^{(e)} + c_3^{(e)}c_1^{(e)} & b_3^{(e)}b_2^{(e)} + c_3^{(e)}c_2^{(e)} & b_3^{(e)}b_3^{(e)} + c_3^{(e)}c_3^{(e)} \end{bmatrix}$$

حل دومین نوع انتگرال، بصورت رابطه (۶-۴۸) است:

$$\iint_{\Omega^{(e)}} d\Omega \underline{N}^{(e)} \underline{N}^{(e)T} = 2\Delta^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \quad (48-6)$$

و آخرین انتگرال که در آن چشمه خارجی ظاهر شده، با فرض ثابت بودن چشمه بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\iint_{\Omega^{(e)}} d\Omega \underline{N}^{(e)} S_0 = 2\Delta^{(e)} S_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (۴۹-۶)$$

۶-۲- حل دستگاه معادلات حاصل:

با حل تمام انتگرال‌های بالا و سپس سرهم‌بندی آنها، دستگاه معادلات (۶-۵۰) بدست می‌آید که با حل آن توزیع شار نوترون در هر گروه انرژی و ضریب تکثیر مؤثر نوترونی بدست می‌آید. دستگاه معادلات (۶-۵۰) از نوع مقدارویژه بوده و به روش تکرار قابل حل می‌باشد.

$$A\phi = \frac{1}{k_{eff}} B\phi \quad (50-6)$$

معیارهای همگرایی در حل این دستگاه معادلات، به صورت معادلات (51-6) و (52-6) هستند:

$$\frac{\phi^{(n+1)} - \phi^{(n)}}{\phi^{(n)}} < \varepsilon_1 \quad (51-6)$$

$$\frac{k_{eff}^{(n+1)} - k_{eff}^{(n)}}{k_{eff}^{(n)}} < \varepsilon_2 \quad (52-6)$$

که در آن،  $\varepsilon_1$  و  $\varepsilon_2$  معیارهای همگرایی می‌باشند.

## ۷- راستی آزمایی نتایج

در این فصل، به منظور تأیید صحت محاسبات انجام شده، تعدادی مسائل آزمون در نظر گرفته شده و نتایج حاصل از نرم‌افزار GFEM-2D با نتایج حل تحلیلی و یا نتایج حاصل از سایر کدها مقایسه شده است.

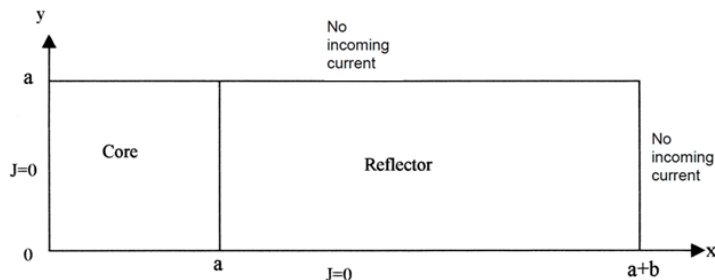
## ۷-۱- راستی آزمایی محاسبات مستقیم

۷-۱-۱- مسئله بحرانیت دو گروهی [۱]

یک محیط دو ناحیه‌ای متشکل از قلب راکتور و بازتابنده مطابق شکل ۳ را در نظر بگیرید. ضخامت  $a$  و  $b$  به ترتیب برابر با  $۴/۸۶$  و  $۲۰$  سانتیمتر می‌باشد. مشخصات هر یک از نواحی در جدول ۱ داده شده است.

جدول ۱: مشخصات هر یک از مواد در دو گروه انرژی برای مسئله بحرانیته

بازتابنده	قلب راکتور	ثوابت گروهی
۰/۶۱۶۵۳۶	۰/۶۱۶۵۳۶	$D_1(cm)$
۰/۶۱۶۵۳۶	۰/۶۱۶۵۳۶	$D_2(cm)$
۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۸۱۳۰۰	$\nu \sum_{f,1}(cm^{-1})$
۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۱۷۸۴۳۰	$\nu \sum_{f,2}(cm^{-1})$
۰/۰۱۰۲۱۰	۰/۰۸۰۱۱۷	$\sum_{r,1}(cm^{-1})$
۰/۰۰۲۶۷۰	۰/۱۱۴۸۴۰	$\sum_{r,2}(cm^{-1})$
۰/۰۱۰۰۵۰	۰/۰۶۳۵۶۷	$\sum_{s,1 \rightarrow 2}(cm^{-1})$



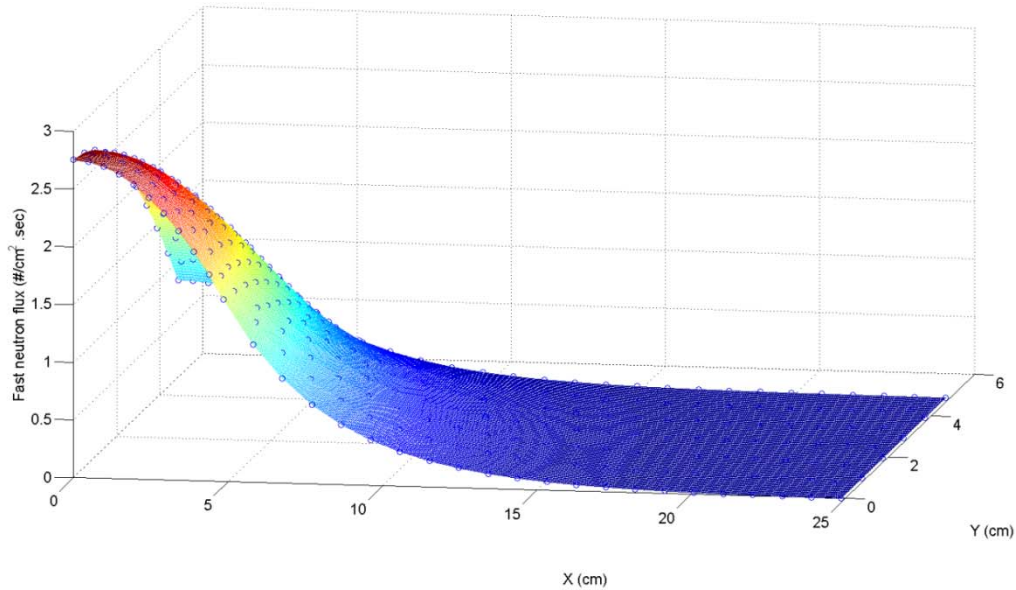
شکل ۳: هندسه و شرایط مرزی مسئله بحرانیّت

در جدول ۲، برای تعداد مختلف المان قلب راکتور و بازتابنده، مقدار ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده با GFEM- 2D داده شده است. همان طور که انتظار می‌رود با افزایش تعداد المان، مقدار محاسبه شده ضریب تکثیر مؤثر نوترونی به

حالت بحرانی ( $K_{eff}=1$ ) نزدیک تر می‌شود. در شکل‌های ۴ و ۵، توزیع شار نوترونی سریع و حرارتی محاسبه شده با GFEM-2D نمایش داده شده است.

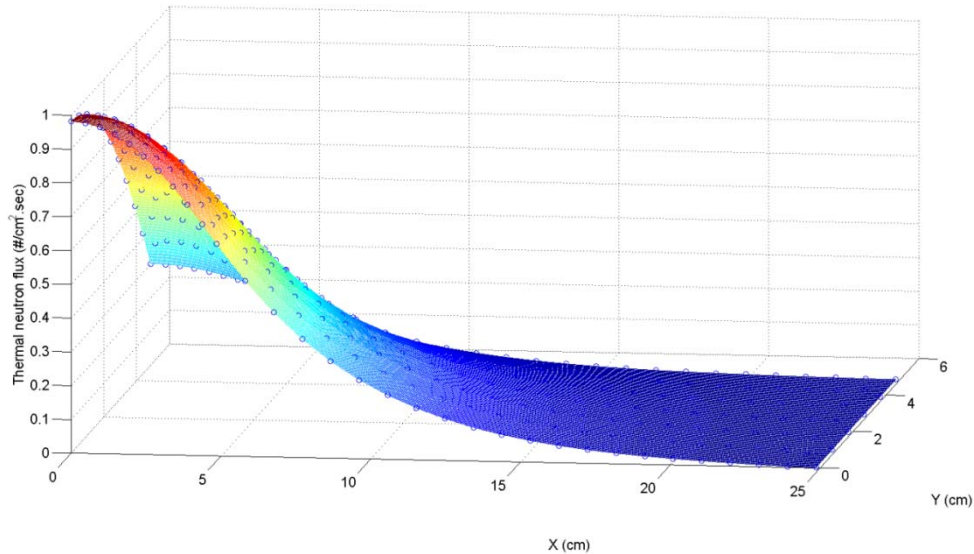
جدول ۲: ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده برای مسئله بحرانی

pcm	RPE (%)	GFEM-2D	تعداد المان بازتابنده	تعداد المان قلب راکتور
-۱۲۹	-۰/۱۲۹	۰/۹۹۸۷۱	۲۴۰	۶۲
-۸۱	-۰/۰۸۱	۰/۹۹۹۱۹	۸۹۴	۲۲۸



شکل ۴: توزیع شار نوترونی سریع محاسبه شده برای مسئله بحرانیت

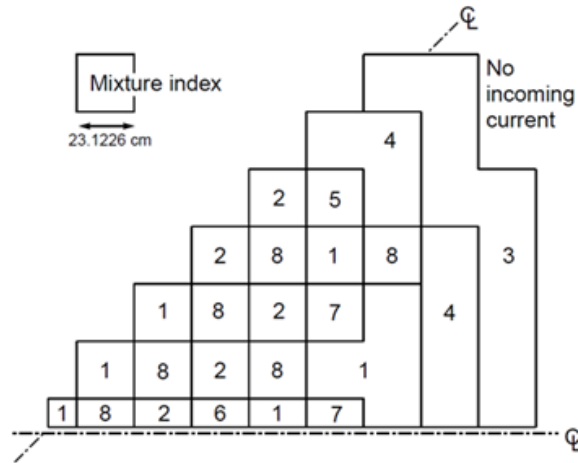




شکل ۵: توزیع شار نوترونی حرارتی محاسبه شده برای مسئله بحرانیّت

۷-۱-۲- مسئله آزمون BIBLIS-2D

مسئله آزمون BIBLIS-2D یکی از متداولترین مسائل آزمون دو بعدی است. هندسه مربوط به این مسئله و شرایط مرزی آن در شکل ۶ نمایش داده شده است. همچنین مشخصات هر یک از مجتمع‌های سوخت و بازتاباننده نشان داده شده در این شکل، در جدول ۳ داده شده است.



شکل ۶: شکل هندسی راکتور BIBLIS-2D

جدول ۳: مشخصات راکتور BIBLIS-2D

ماده ۸	ماده ۷	ماده ۶	ماده ۵	ماده ۴	ماده ۳	ماده ۲	ماده ۱	ثوابت گروهی
۱/۴۳۹۳	۱/۴۳۸۹	۱/۴۳۸۵	۱/۴۳۸۱	۱/۴۳۸۹	۱/۳۲۰۰	۱/۴۳۶۰	۱/۴۳۶۰	$D_1(cm)$
۰/۳۶۸۰	۰/۳۶۷۹	۰/۳۶۶۵	۰/۳۶۶۵	۰/۳۶۳۸	۰/۲۷۷۲	۰/۳۶۳۶	۰/۳۶۳۵	$D_2(cm^{-1})$
۰/۰۰۶۴۲۸۵	۰/۰۰۶۱۹۰۸	۰/۰۰۶۴۲۸۵	۰/۰۰۶۱۹۰۸	۰/۰۰۷۴۵۲۷	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۶۱۹۰۸	۰/۰۰۵۸۷۰۸	$\nu \sum_{f,1}(cm^{-1})$
۰/۱۰۹۱۱۰۰	۰/۱۰۳۵۸۰۰	۰/۱۰۹۱۱۰۰	۰/۱۰۳۵۸۰۰	۰/۱۳۲۳۶۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۱۰۳۵۸۰۰	۰/۰۹۶۰۶۷	$\nu \sum_{f,2}(cm^{-1})$
۰/۰۲۷۶۲۱۰	۰/۰۲۷۲۹۰۰	۰/۰۲۷۳۲۴۰	۰/۰۲۷۲۹۳۰	۰/۰۲۷۴۶۴۰	۰/۰۲۵۷۶۲۲	۰/۰۲۷۲۹۹۵	۰/۰۲۷۲۵۸۲	$\sum_{r,1}(cm^{-1})$
۰/۰۹۰۵۱۰	۰/۰۸۸۰۲۴	۰/۰۸۷۳۱۴	۰/۰۸۴۸۲۸	۰/۰۹۱۴۰۸	۰/۰۷۱۵۹۶	۰/۰۷۸۴۳۶	۰/۰۷۵۰۵۸	$\sum_{r,2}(cm^{-1})$

در جدول ۴، ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده برای تعداد المان مختلف داده شده است. مطابق انتظار، مقدار ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده با افزایش تعداد المان به مقدار مرجع نزدیک تر می شود و برای تعداد ۱۰۵۱۰ المان، درصد خطای نسبی ۰/۰۰۴۹- است.

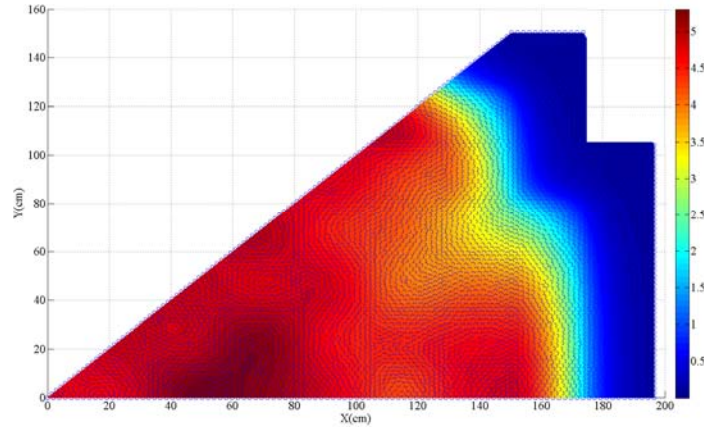
در شکل های ۷ و ۸، توزیع شار نوترونی سریع و حرارتی محاسبه شده نمایش داده شده است. در شکل ۹، کسر قدرت برای هر مجتمع سوخت که به صورت معادله (۷-۱) تعریف می شود، با مقدار مرجع مقایسه شده است:

$$(1-7) \quad (\text{متوسط قدرت تولیدی در کل مجتمع های سوخت}) / (\text{متوسط قدرت تولیدی در هر مجتمع سوخت}) = \text{کسر قدرت}$$

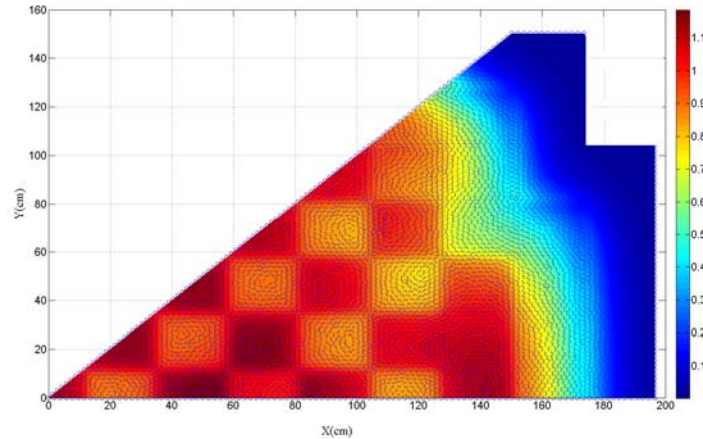
بیشترین درصد اختلاف نسبی توزیع قدرت محاسبه شده با کد GFEM-2D و مقدار مرجع، ۰/۵۸۵ می باشد. این مقدار خطا برای توزیع قدرت در راکتورهای هسته ای، مقدار قابل قبولی است.

جدول ۴: ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده برای راکتور BIBLIS-2D

pcm	RPE (%)	مرجع	GFEM-2D	تعداد المان
۲۷	-۰/۰۲۶۳	۱/۰۲۵۱۱	۱/۰۲۴۸۴	۸۹۲
۱۳	-۰/۰۱۲۷		۱/۰۲۴۹۸	۲۰۱۸
۷	-۰/۰۰۶۸		۱/۰۲۵۰۴	۴۸۸۷
۵	-۰/۰۰۴۹		۱/۰۲۵۰۶	۱۰۵۱۰



شکل ۷: توزیع شار نوترونی سریع محاسبه شده برای راکتور BIBLIS-2D



شکل ۸: توزیع شار نوترونی حرارتی محاسبه شده برای راکتور BIBLIS-2D

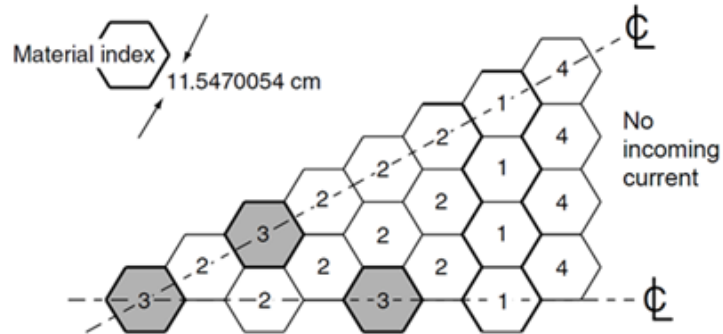


Material Ref. GFEM RPE (%)		4		4		2		5		4	
		1.200		0.684		1.123		0.993		0.875	
		1.193		0.680		1.120		0.990		0.871	
		-0.583		-0.585		-0.267		-0.302		-0.457	
		2		8		1		8		4	
		1.161		1.039		0.950		0.765		0.546	
		1.160		1.039		0.949		0.765		0.545	
		-0.086		0.000		-0.105		0.000		-0.183	
		1		8		2		7		1	
		1.122		1.105		1.120		0.924		0.931	
		1.123		1.107		1.120		0.925		0.931	
		0.089		0.181		0.000		0.108		0.000	
		8		2		8		1		4	
		1.117		1.134		1.223		1.068		1.032	
		1.118		1.136		1.224		1.070		1.032	
		0.090		0.176		0.082		0.187		0.000	
		1		6		1		7		1	
		1.091		1.243		1.220		1.089		0.982	
		1.092		1.104		1.244		1.089		0.984	
		0.092		0.081		0.246		0.000		0.204	
		8		2		1		7		1	
		1.102		1.243		1.220		1.089		0.982	
		1.104		1.244		1.223		1.089		0.984	
		0.182		0.081		0.246		0.000		0.204	
		4		1		7		1		4	
		1.015		1.095		1.015		1.095		1.015	
		1.016		10.96		1.016		10.96		1.016	
		0.099		0.092		0.099		0.092		0.099	

شکل ۹: مقایسه توزیع قدرت محاسبه شده با مقادیر مرجع برای راکتور BIBLIS-2D

۷-۱-۳- مسئله آزمون IAEA-2D

راکتور IAEA-2D، یک مسئله آزمون IAEA است که توسط ACC<sup>۳</sup> در سال ۱۹۷۷ ارائه شد. مطابق شکل ۱۰، از ویژگی‌های این مسئله آزمون، دارا بودن ۱۳ مجتمع در قلب راکتور با تقارن یک دوازدهم ( $\frac{1}{12}$ ) می‌باشد. مشخصات هر یک از این مجتمع‌ها در جدول ۵ داده شده است.



شکل ۱۰: شکل هندسی راکتور IAEA-2D

جدول ۵: مشخصات راکتور IAEA-2D

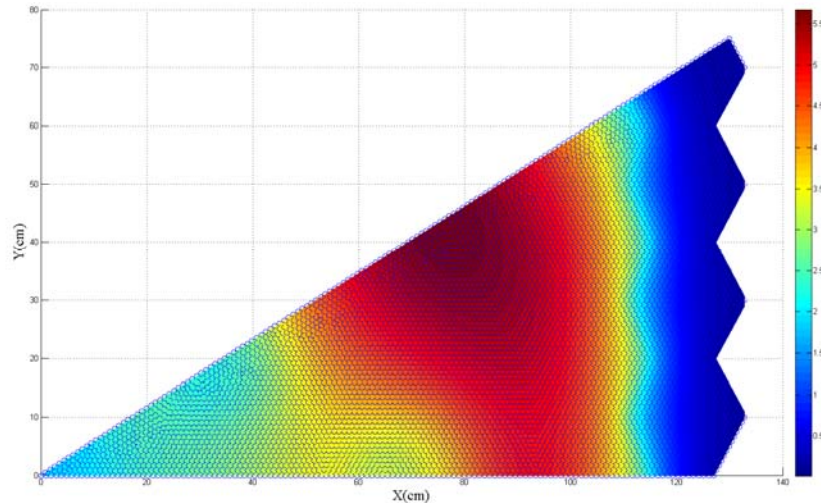
ماده ۴	ماده ۳	ماده ۲	ماده ۱	ثوابت گروهی
۱/۵	۱/۵	۱/۵	۱/۵	$D_1(cm)$
۰/۴	۰/۴	۰/۴	۰/۴	$D_2(cm)$
۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	$\nu \Sigma_{f,1}(cm^{-1})$
۰/۰	۰/۱۳۵	۰/۱۳۵	۰/۱۳۵	$\nu \Sigma_{f,2}(cm^{-1})$
۰/۰۴	۰/۰۳	۰/۰۳	۰/۰۳	$\Sigma_{r,1}(cm^{-1})$
۰/۰۱	۰/۱۳	۰/۰۸۵	۰/۰۸	$\Sigma_{r,2}(cm^{-1})$
۰/۰۴	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۲	$\Sigma_{s,1 \rightarrow 2}(cm^{-1})$

در جدول ۶، مقدار ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده با کد GFEM-2D با مقدار مرجع مقایسه شده است. مطابق انتظار، اختلاف بین مقدار ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده با GFEM-2D و مقدار مرجع، با افزایش تعداد المان‌ها کاهش پیدا کرده است.

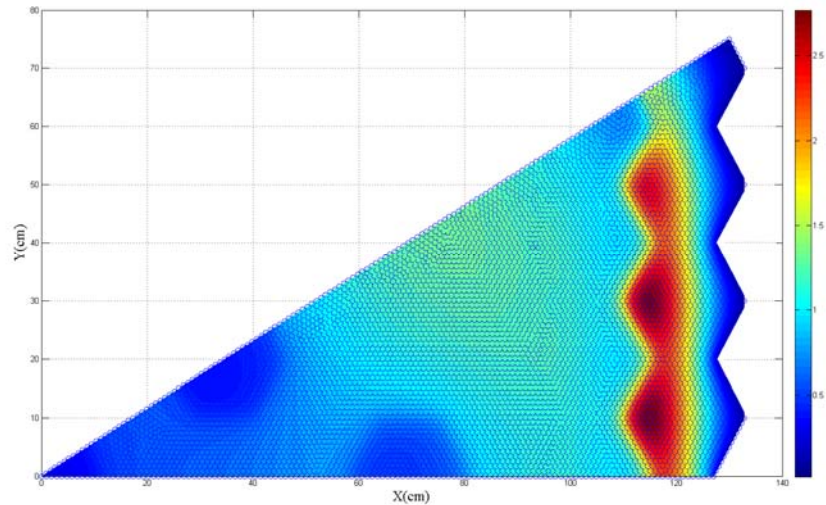
جدول ۶: ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده برای راکتور IAEA-2D

Pcm	PRE	مرجع	GFEM-2D	تعداد المان
۱۲۷	۰/۱۲۵۹	۱/۰۰۵۵۱	۱/۰۰۶۷۸	۳۸۴
۳۵	۰/۰۳۴۶		۱/۰۰۵۸۶	۱۳۶۰
۰	۰/۰۰۰۰		۱/۰۰۵۵۱	۱۲۱۲۸

در شکل‌های ۱۱ و ۱۲، توزیع شار نوترونی سریع و حرارتی محاسبه شده نمایش داده شده است.



شکل ۱۱: توزیع شار نوترونی سریع محاسبه شده برای راکتور IAEA-2D



شکل ۱۲: توزیع شار نوترونی حرارتی محاسبه شده برای راکتور IAEA-2D

## ۷-۲- راستی آزمایی محاسبات غیر مستقیم (الحاقی)

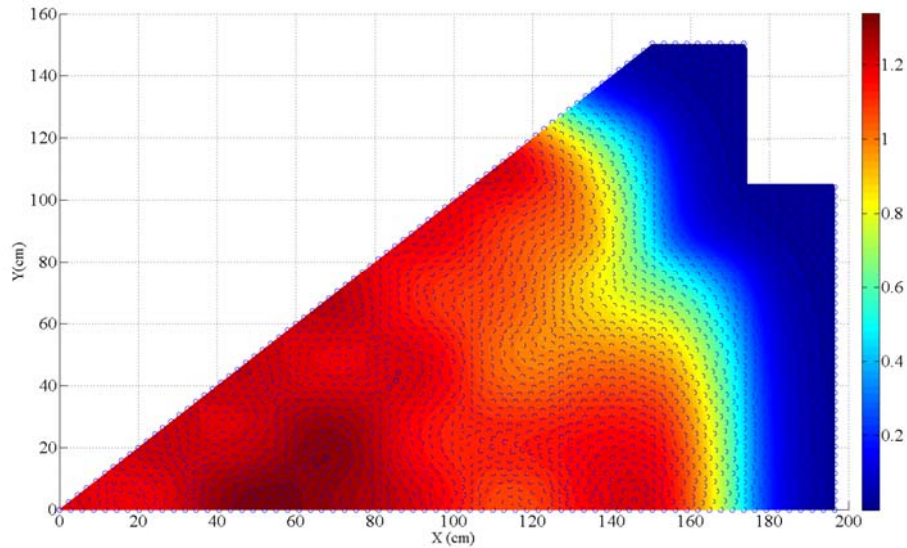
برای راستی آزمایی محاسبات الحاقی از محاسبات مستقیم استفاده می‌شود. ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده از محاسبات مستقیم و الحاقی باید با هم برابر باشند.

برای مثال، مسئله آزمون BIBLIS-2D را در نظر بگیرید. در جدول ۷، ضریب تکثیر مؤثر نوترونی بدست آمده از محاسبات غیر مستقیم با مقدار متناظر بدست آمده از محاسبات مستقیم مقایسه شده است. همان طور که انتظار می‌رود مقدار بدست آمده از محاسبات مستقیم و الحاقی با همدیگر برابر می‌باشد. توزیع شار الحاقی سریع و حرارتی محاسبه شده به ترتیب در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نمایش داده شده است.

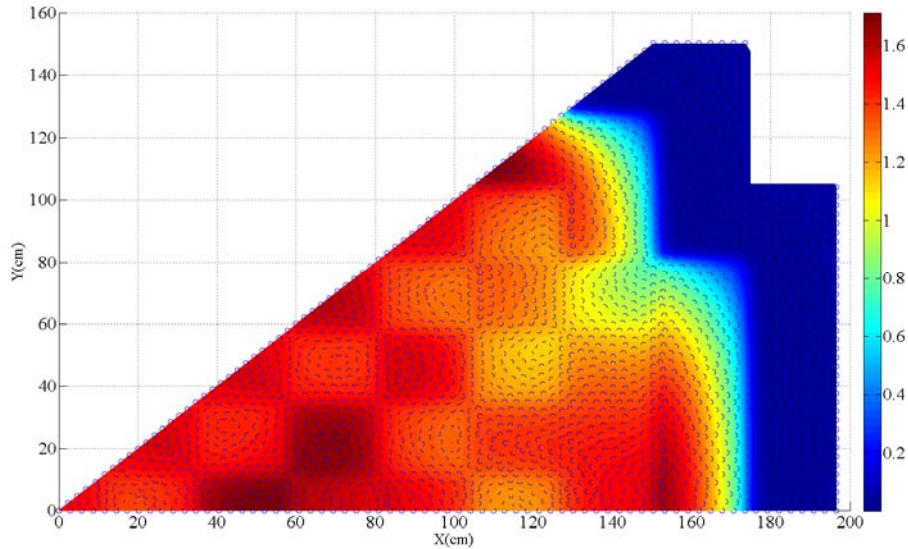


جدول ۷: ضریب تکثیر مؤثر نوترونی محاسبه شده برای راکتور BIBLIS-2D

تعداد المان	محاسبات مستقیم	محاسبات الحاقی
۸۹۲	۱/۰۲۴۸۴	۱/۰۲۴۸۴
۲۰۱۸	۱/۰۲۴۹۸	۱/۰۲۴۹۸
۴۸۸۷	۱/۰۲۵۰۴	۱/۰۲۵۰۴
۱۰۵۱۰	۱/۰۲۵۰۶	۱/۰۲۵۰۶



شکل ۱۳: توزیع شار الحاقی سریع محاسبه شده برای راکتور BIBLIS-2D



شکل ۱۴: توزیع شار الحاقی حرارتی محاسبه شده برای راکتور BIBLIS-2D

## ۸- بحث و نتیجه گیری

در این گزارش، مراحل انجام محاسبات لازم برای بدست آوردن توزیع شار نوترونی و الحاقی و ضریب تکثیر مؤثر نوترونی برای مسائل چندگروهی- دوبعدی با استفاده از روش گلرکین توضیح داده شد. برای راستی آزمایی نتایج حاصل از کد توسعه داده شده (GFEM-2D)، از روش‌های مختلفی، همچون مقایسه با پاسخ تحلیلی و یا نتایج حاصل از کدهای هسته‌ای مشابه استفاده شد. در نتیجه این مقایسه‌ها، صحت نتایج و اعتبار روش گلرکین در حل معادله پخش نوترونی و الحاقی چندگروهی- دوبعدی مورد تایید قرار گرفت.

## ۹- مراجع

1. Ozgener, H.A., Ozgener, B. "A multi-region boundary element method for multigroup neutron diffusion calculations". Annals of nuclear energy, Vol. 28, pp. 585-616, 2011.
2. Varin, E., Hebert, A., Roy, R and Koclas, J. "A user guide for DONJON", version 3.01,2012.
3. Hebert, A. "A raviart-thomas-schneider solution of the diffusion equation in hexagonal geometry". Annals of nuclear energy, Vol. 35, pp. 585-616, 2008.