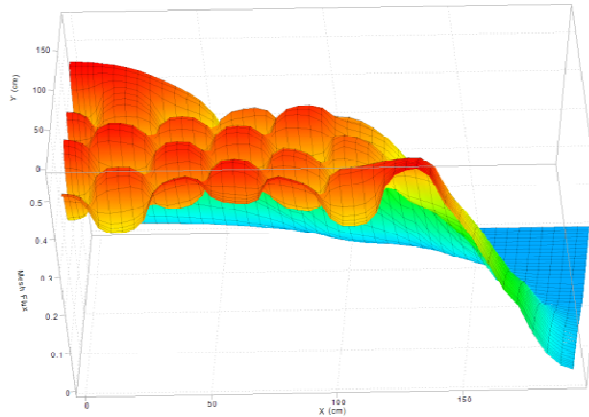


کد محاسباتی پخش نوترون به روش بسط نودال برای هندسه‌های چهار گوش



گزارش فنی NODEX-R

بسته شانزدهم - ویرایش ۰ - فروردین ۱۳۹۴

ANC-TEC-DES-NE-200

فهرست مطالب

- ۱- چکیده ۹
- ۲- کلیدواژه ۱۰
- ۳- اختصارات ۱۰
- ۴- مقدمه ۱۱
- ۵- دامنه گزارش ۱۳
- ۶- رهیافت‌های حل معادله پخش نوترون ۱۳

- ۷- روش بسط نودال جهت حل معادله پخش نوترون در حالت وجود چشمه شکافت پذیر..... ۱۷
- ۸- روش بسط نودال جریان متوسط جهت حل معادله الحاقی پخش در محیط شکافت پذیر..... ۵۳
- ۹- روش بسط نودال جریان متوسط جهت حل معادله پخش نوترون در حالت چشمه ثابت..... ۵۶
- ۱۰- بررسی نمونه‌های محاسباتی و راستی‌آزمایی..... ۵۸
- ۱۱- نتیجه‌گیری..... ۱۲۳
- ۱۲- مراجع..... ۱۲۵

لیست شکل‌ها

- شکل ۱: نمونه نمادگذاری شارهای حجمی و سطحی در دو نود مجاور..... ۲۷
- شکل ۲: آرایش هندسی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور BIBLIS-2D..... ۶۰
- شکل ۳: توزیع توان نسبی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور BIBLIS-2D..... ۶۶
- شکل ۴: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور BIBLIS-2D (مرتبه ۰)..... ۶۷
- شکل ۵: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور BIBLIS-2D (مرتبه ۱)..... ۶۸
- شکل ۶: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور BIBLIS-2D (مرتبه ۲)..... ۶۹
- شکل ۷: هندسه قلب راکتور ELSY-Like در جهت شعاعی..... ۷۱
- شکل ۸: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور ELSY-like-2D (مرتبه ۰)..... ۷۶
- شکل ۹: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور ELSY-like-2D (مرتبه ۱)..... ۷۷

- شکل ۱۰: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور ELSY-like-2D (مرتبۀ ۲).... ۷۸
- شکل ۱۱: آرایش هندسی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور LMW LWR-3D در جهت شعاعی ۸۰
- شکل ۱۲: آرایش هندسی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور LMW LWR-3D در جهت محوری..... ۸۱
- شکل ۱۳: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور LMW LWR-3D (مرتبۀ ۰) .. ۸۶
- شکل ۱۴: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور LMW LWR-3D (مرتبۀ ۲) .. ۸۷
- شکل ۱۵: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور LMW LWR-3D (مرتبۀ ۲) .. ۸۸
- شکل ۱۶: آرایش هندسی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور IAEA-3D در جهت شعاعی ۹۱
- شکل ۱۷: آرایش هندسی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور IAEA-3D در جهت محوری ۹۲
- شکل ۱۸: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور IAEA-3D (مرتبۀ ۰) ۹۷
- شکل ۱۹: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور IAEA-3D (مرتبۀ ۲) ۹۸

- شکل ۲۰: هندسه نمونه محاسباتی دو بعدی با وجود چشمه ثابت نوترونی..... ۱۰۵
- شکل ۲۱: توزیع شار نوترون حاصل از حل مرتبه صفر روش بسط نودال جریان متوسط ۱۰۶
- شکل ۲۲: توزیع درصد خطای نسبی شار نودال نسبت به مرجع ۱۰۸
- شکل ۲۳: توزیع شار الحاقی حاصل شده از روش بسط نودال جریان متوسط ۱۱۲
- شکل ۲۴: هندسه قلب راکتور TWIGL SEED-BLANKET-2D در تقارن یک چهارم ۱۱۴
- شکل ۲۵: توزیع درصد خطای نسبی شار الحاقی گروه اول انرژی نسبت به مرجع (مرتبه ۰) ۱۱۹
- شکل ۲۶: توزیع درصد خطای نسبی شار الحاقی گروه اول انرژی نسبت به مرجع (مرتبه ۲) ۱۲۰
- شکل ۲۷: توزیع درصد خطای نسبی شار الحاقی گروه دوم انرژی نسبت به مرجع (مرتبه ۰) ۱۲۱
- شکل ۲۸: توزیع درصد خطای نسبی شار الحاقی گروه دوم انرژی نسبت به مرجع (مرتبه ۲) ۱۲۲

لیست جدول‌ها

- جدول شماره ۱: سطوح مقاطع دو گروهی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور BIBLIS-2D ۶۱
- جدول شماره ۲: نتایج حاصل از کد محاسباتی ACNEC ۶۳
- جدول شماره ۳: سطوح مقاطع سه گروهی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور ELSY-Like-2D ۷۲
- جدول شماره ۴: نتایج حاصل از کد محاسباتی ACNEC ۷۴
- جدول شماره ۵: سطوح مقاطع دو گروهی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور LMW LWR-3D ۸۲
- جدول شماره ۶: نتایج حاصل از کد محاسباتی ACNEC ۸۴
- جدول شماره ۷: سطوح مقاطع دو گروهی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور IAEA-3D ۹۳
- جدول شماره ۸: نتایج حاصل از کد محاسباتی ACNEC ۹۵
- جدول شماره ۹: سطوح مقاطع تک ناحیه‌ای ۹۹

- جدول شماره ۱۰: مقادیر شار حاصل از حل تحلیلی و بسط نودال جریان متوسط..... ۱۰۲
- جدول شماره ۱۱: سطوح مقاطع تک ناحیه‌ای ۱۰۴
- جدول شماره ۱۲: سطوح مقاطع تک ناحیه‌ای ۱۰۹
- جدول شماره ۱۳: مقدار ضریب تکثیر حاصل از حل مستقیم و الحاقی بسط نودال برای نمونه یک گروهی ۱۱۰
- جدول شماره ۱۴: مشخصات مواد در قلب راکتور TWIGL SEED-BLANKET-2D ۱۱۵
- جدول شماره ۱۵: نتایج حاصل از کد محاسباتی ACNEC ۱۱۶

۱- چکیده

هدف از انجام این پروژه، پیاده‌سازی روش بسط نودال جریان متوسط در حل معادله پخش نوترون چند گروهی در حالت‌های وجود چشمه‌های نوترونی شکافت‌پذیر و ثابت و همچنین، معادله الحاقی پخش برای مختصات دکارتی سه بعدی می‌باشد. روش بسط نودال یکی از روش‌های مشهور نودال جهت حل معادله پخش نوترون است. در این روش، توزیع شار در هر نود (المان) به صورت بسط چند جمله‌ای در نظر گرفته می‌شود. روش جریان متوسط نیز یکی از روش‌های بسط نودال است که ضرایب مجهول بسط بر حسب پارامترهای هر نود، شامل شار متوسط حجمی و جریان‌های متوسط سطحی آن بدست می‌آیند. در نهایت، نتایج محاسبات مرتبه‌های حل صفر و دو برای چند نمونه محاسباتی دو و سه بعدی ارائه شده و نتایج آن نیز جهت راستی‌آزمایی با نتایج مراجع معتبر مقایسه می‌گردند.

۲- کلیدواژه

روش بسط نودال جریان متوسط، معادله پخش نوترون، ضریب تکثیر مؤثر، شار الحاقی.

۳- اختصارات

توضیح	عبارت اختصاری	عبارت
کد محاسباتی بسط نودال جریان متوسط	ACNEC	Average Current Nodal Expansion Code
مجتمع سوخت	FA	Fuel Assembly

۴- مقدمه

به سادگی می‌توان اصلی‌ترین و مهم‌ترین مسئله در فیزیک راکتور را این‌گونه بیان کرد: محاسبه جمعیت نوترون‌های با انرژی دلخواه در زمان t و در مکان دلخواه در راکتوری با ترکیب مشخص از مواد. با محاسبه تعداد این نوترون‌ها، می‌توان توزیع شار و متعاقباً توان را در فضای قلب راکتور محاسبه کرد. دانستن توزیع مکانی دقیق توان، برای طراحی و تحلیل راکتورها ضروری است. همچنین در تلاش به منظور حل مسائل ایمنی راکتور که از سناریوهای فرضی یا عملی حوادث در نیروگاه پدید آمده‌اند، داشتن طیف دقیق توزیع توان در همه ابعاد، اجتناب‌ناپذیر است. کامل‌ترین توصیف جمعیت نوترونی توسط کمیت "شار زاویه‌ای نوترون" بیان می‌شود. با ایجاد توازن بین مکانیسم‌هایی که منجر به تولید یا حذف نوترون از یک حجم دلخواه می‌شوند، می‌توان به راحتی معادله‌ای برای چگالی نوترون به دست آورد. معادله حاصله که معادله ترابرد نام دارد، توصیف دقیقی از حرکت نوترون‌ها به دست می‌دهد و از لحاظ نظری با معلوم بودن سطح مقطع‌ها،

قابل حل است. اگرچه در عمل، حل تحلیلی این معادله دیفرانسیل-انتگرالی که تابعی از هفت متغیر (مکان، انرژی، جهت حرکت نوترون و زمان) است، مادامی که فرض‌های ساده‌سازی در نظر گرفته نشوند، دشوار می‌باشد.

اگرچه روش‌های عددی متعددی برای حل معادله ترابرد ارائه شده است، این روش‌ها همچنان نیاز به ساده‌سازی‌های مختلف دارند تا علیرغم هزینه بالای محاسبات، به صورت عملی قابل استفاده باشند. بر این اساس احساس می‌شود که برای حل معادله ترابرد نوترون در یک راکتور، باید معادله را به شکلی ساده‌تر تبدیل کرد، شکلی که بتواند به صورت کارآمد در یک برنامه کامپیوتری مورد استفاده قرار گیرد. این ساده‌سازی‌ها در وابستگی معادله به متغیرهای مستقل آن و ارائه یک تقریب، ممکن می‌گردد. یکی از این تقریب‌ها، تقریب پخش است که در آن حرکت و اندرکنش‌های نوترون اعم از جذب، پراکندگی و نشت با فرض اینکه پراکندگی نوترون‌ها در محیط به صورت همسانگرد صورت می‌پذیرد، مدل می‌گردد. پس برای تخمین ضریب تکثیر مؤثر و توزیع شار و توان نوترون‌ها در قلب راکتور، می‌توان معادله پخش نوترون را که بر اساس حفظ توازن نوترونی همراه با تعریف اندرکنش‌های نوترون در هر نود بیان می‌گردد، حل کرد.

۵- دامنه گزارش

در این گزارش، مرتبه‌های حل صفرم و دوم روش بسط نودال جریان متوسط جهت حل معادله پخش نوترون چند گروهی در حالت‌های وجود چشمه‌های نوترونی شکافت‌پذیر و ثابت و همچنین، معادله الحاقی پخش، برای هندسه سه بعدی مستطیلی ارائه و مورد بررسی قرار می‌گیرند. در نهایت، نتایج حاصل از محاسبات برای تعدادی نمونه، ارائه و جهت راستی‌آزمایی نیز، با نتایج مراجع معتبر مقایسه می‌گردند.

۶- رهیافت‌های حل معادله پخش نوترون

طی چند دهه گذشته، تلاش زیادی جهت توسعه روش‌های مختلف حل معادله پخش نوترون شده است. کدهای مبتنی بر حل معادله پخش نوترون قادرند متناسب با مفروضات خود، رفتار نوترونی درون قلب راکتور را پیش‌بینی کرده و

اطلاعات لازم جهت محاسبات در زمینه‌های بحرانی شدن راکتور، ترموهیدرولیک و مصرف سوخت را فراهم آورند. به همین خاطر به شکلی گسترده در طراحی و بهره‌برداری نیروگاه‌های هسته‌ای به کار گرفته می‌شوند.

از روش‌های حل معادله پخش، روش‌های اختلاف محدود، المان محدود و نودال را می‌توان نام برد. مزیت اصلی روش‌های اختلاف محدود و المان محدود در قابلیت کارکرد آن در هندسه‌های غیرمنظم است. ولی یکی از مسایل مورد توجه در محاسبات قلب راکتور، زمان حل معادله پخش می‌باشد. در روش حل اختلاف محدود، به منظور بدست آوردن دقت قابل قبول، می‌بایستی هر مجتمع سوخت را به چندین مش تقسیم کرد که این مورد باعث افزایش تعداد مجهولات مسئله می‌شود و متعاقباً زمان حل معادله، افزایش چشمگیری خواهد داشت. این عیب در مسایلی مانند بهینه‌سازی چیدمان مجتمع‌های سوخت در قلب راکتور و محاسبات در طول دوره بهره‌برداری راکتور قابل توجه است. البته در روش المان محدود، با افزایش مرتبه چند جمله‌ای المان بکار گرفته شده، می‌توان در مش‌های بزرگ‌تر نیز به دقت قابل قبول دست یافت. اما معادلات جبری حاصله نسبت به شکل مشابه خود در روش اختلاف محدود، پیچیدگی بیشتری دارند و بنابراین،

حل آن‌ها با روش‌های شناخته شده، چندان سودمند به نظر نمی‌رسد. البته برای مسایل چند گروهی با تعداد گروه‌های انرژی زیاد، این مسئله مهم‌تر خواهد بود. به عنوان مثال، در کدهای محاسباتی CITATION از روش حل اختلاف محدود و DONJON از روش حل المان محدود استفاده می‌شود.

یکی از مؤثرترین راه‌ها جهت کاهش حجم محاسبات، کاهش مجهولات به خصوص مجهولات تابع مکان است. اساس روش نودال که مورد بحث این گزارش می‌باشد، بر انتگرال‌گیری از معادله پخش نوترون و محاسبه شار متوسط در هر مش (که در این روش نود نامیده می‌شود)، استوار است. روش حل نودال به شکلی ساده، ساختاری شبیه روش اختلاف محدود دارد. با این وجود، روش حل نودال به علت استفاده از تراز نوترونی در هر نود، قابلیت حل معادله با مش‌های به اندازه حدود یک مجتمع سوخت را همراه با ارائه دقت قابل قبول داراست. این امر باعث کاهش قابل ملاحظه تعداد مجهولات در روش‌های نودال می‌شود. در نتیجه، زمان محاسبه یک مسئله با روش نودال، بسیار کمتر از زمان متناظر در حل با روش اختلاف محدود با دقت یکسان می‌باشد. علاوه بر آن، روش حل نودال به خوبی قابلیت گسترش به مسائل با

تعداد گروه‌های انرژی زیاد را دارد. پس امتیاز اصلی این روش، سرعت بالای آن در محاسبه و حصول به جواب مورد نیاز است.

روش حل نودال به صورت کلی، به دو نوع تحلیلی و بسط تقسیم‌بندی می‌گردد. در حل تحلیلی، معادله پخش نوترون به صورت تحلیلی حل می‌شود. در مسایل دو و سه بعدی، این حل با تقریب جمله نشت عرضی^۱ به صورت چند جمله‌ای همراه است. این روش دقت بالایی دارد، اما برای نمونه‌های چند گروهی، حجم بزرگ معادلات و محاسبات را می‌طلبد که این امر باعث افزایش نسبی زمان اجرای کد می‌گردد. نمونه کد محاسباتی از این روش، کد PARCS است. البته در این کد که در دسترس می‌باشد، یک سری مشکلات از قبیل واگرایی در حل بعضی از مسایل به چشم می‌خورد و همچنین این کد به حل نمونه‌های دو گروهی محدود شده است. در روش دیگر حل نودال، بسط، توزیع شار در هر نود با یک چند

Transverse leakage ۱

جمله‌ای بیان می‌گردد که در نوع بسط شار مرتبه صفر، این چند جمله‌ای درجه دو انتخاب می‌شود و برای محاسبه ضرایب ضروری در این روش، چندجمله‌ای‌ها باید شرایط تراز نوترونی در هر نود و پیوستگی شار و مؤلفه عمودی جریان در سطوح را ارضاء کنند.

۷- روش بسط نودال جهت حل معادله پخش نوترون در حالت وجود چشمه شکافت پذیر

۷-۱- طی چند دهه مروری بر تحقیقات و مقالات مرتبط

روش حل نودال، عنوان کلی برای دسته بزرگی از روش‌های نودال است که در حالات مختلف یک، دو و سه بعدی، در هندسه‌های مستطیلی و شش وجهی و با تقریب‌های گوناگون برای توزیع شار، توسط پژوهشگران ابداع شده و توسعه یافته است.

Hoxie در سال ۱۹۸۲ روش حل تحلیلی نودال و نظریه هم‌ارزی نودال را برای ارزیابی یک راکتور PWR غیرهمگن به کار بسته و بازسازی شار توسط روش تابع شکل^۲ در نودهای غیرهمگن را بررسی کرده است [۱]. روش اخیر همچنین توسط Casctrillon در سال ۱۹۸۴ برای بازسازی شار و توان در راکتورهای دو و سه بعدی، به کار گرفته شده است [۲]. Jacqmin در سال ۱۹۹۱، روش نیمه- تجربی ترکیبی نودال^۳ را ارائه داده است. در این روش در ابتدا با پرهیز از وابستگی زمانی معادله پخش، توزیع تقریبی شارهای گروهی حدس زده شده و سپس ضرایب وابسته به زمان در بازسازی شار، وارد می‌شوند [۳]. Smith در سال ۱۹۷۶، روش تحلیلی نودال^۴ را برای حل معادله پخش نوترون دو گروهی، چند

Form Function Method ۲

Semi-Experimental Nodal Synthesis Method ۱

Analytic Nodal Method ۲

بعدی در حالات گذرا و ثابت مورد بررسی قرار داده است. این روش، با انتگرال زمانی t^{Δ} ، به حالت وابسته به زمان بسط پیدا کرده است [۴]. در روش حل تحلیلی، از حل تحلیلی معادله پخش یک بعدی با فرض چند جمله‌ای درجه دو به منظور تقریب جمله نشت، بهره گرفته شده [۴ و ۵]، Hebert نیز در سال ۲۰۰۸ با ساده‌سازی این روش، آن را به حالت چند گروهی تعمیم داده است [۶].

روش حل بسط نودال^۶ توسط Putney [۷]، در سال ۱۹۸۴ برای هندسه‌های مستطیلی و شش وجهی، به تفصیل مورد ارزیابی قرار گرفته است و در سال ۲۰۰۶ نیز با توابع نوینی برای حدس توزیع شار درون نودها در هندسه شش وجهی توسط Xia و همکارانش ارائه شده است [۷ و ۸]. روش چند جمله‌ای نودال^۷ نیز توسط Zimin و همکاران در سال ۲۰۰۱

۳ Theta Time-Integration method

۴ Nodal Expansion Method

۵ Polynomial Nodal Method

برای هندسه شش وجهی استفاده گردیده که در آن شش ضلعی‌ها به مستطیل نگاشت شده و معادلات حاصله با تقریب مرتبه چهار شار و تبدیل به توابع متعامد، حل می‌شوند [۹].

همچنین Azekura در سال ۱۹۹۱، به صورت ترکیبی، از روش اختلاف محدود برای توصیف توازن نوترونی در کل راکتور و روش نودال برای توصیف در درون نودها در هندسه دکارتی و شش وجهی، استفاده کرده است [۱۰]. کار مشابهی نیز، در سال ۲۰۰۸ توسط Han و همکاران برای حالت چند گروهی انجام شده است [۱۱]. همچنین Kim و همکاران در سال ۲۰۰۳ با تزویج دو روش تحلیلی و بسط نودال تحت عنوان روش بسط تابع تحلیلی نودال^۸، قلب راکتور PBMR را مورد بررسی قرار داده‌اند [۱۲].

۷-۲- روش‌های حل بسط نودال

روش‌های حل بسط نودال، دسته‌ای از روش‌های نودال هستند که در آنها، معادله پخش نوترون با تعریف شار (ϕ_g) به صورت بسط چند جمله‌ای در هر نود و روش باقیمانده وزنی^۹، حل می‌گردد. یعنی:

$$\int_{\Pi^m} W_{gu}^{[k]} \left\{ -\text{div} D_g \nabla \phi_g + \Sigma_{tg} \phi_g - \sum_{g'=1}^G \Sigma_{gg'} \phi_{g'} - \frac{\chi_g}{k_{\text{eff}}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'} \phi_{g'} \right\} d\Pi^m = 0 \quad (1-7)$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad u = x, y, z.$$

که در رابطه (۱-۷)، m ، g و k ، به ترتیب، بیانگر شماره نود، گروه انرژی و مرتبه حل می‌باشند. با اعمال شرایط پیوستگی شار و جریان روی سطوح و استفاده از معادله (۱-۷)، ضرایب مورد نیاز محاسبه می‌شوند. در روش‌های حل بسط نودال

مرتبه صفر، چند جمله‌ای‌های استفاده شده برای تعریف شار در هر نود، درجه دو انتخاب می‌شوند. پس برای محاسبه ضرایب مجهول بسط شار، چند جمله‌ای‌ها باید شرایط صفر بودن معادله وزن‌دهی شده (۷-۱) در حالت مرتبه صفرم یعنی ($K=0$)، بالانس نوترونی در هر نود و پیوستگی شار و مؤلفه عمودی جریان در سطوح را ارضاء کنند. در حل مرتبه‌های بالاتر نیز، با در نظر گرفتن تابع وزنی مناسب در رابطه (۷-۱)، ضرایب مجهول مراتب بالاتر بسط شار بدست می‌آیند.

چهار گونه پایه از روش بسط نودال، روش‌های شار نقطه‌ای^{۱۰}، شار متوسط^{۱۱}، جریان متوسط^{۱۲} و جریان نقطه‌ای^{۱۳} می‌باشند. در روش‌های نقطه‌ای، چند جمله‌ای‌ها به مقدار شار در نقاط مرکزی هر نود و سطوح آن، برازش می‌شوند. در

 Point Flux Method ۲

Average Flux Method ۳

Average Current Method ۴

حالی که در روش‌های متوسط، چند جمله‌ای‌ها به مقدار متوسط شار در هر نود و روی سطوح آن برازش می‌شوند. در روش‌های مبتنی بر شار، معادله انتگرالی پخش نوترونی مستقیماً روی توزیع چند جمله‌ای شار اعمال می‌شود. اما در روش‌های مبتنی بر جریان، از معادله پایستگی نوترون استفاده می‌گردد و شار روی سطوح نودها با جریان‌های جزئی سطح، جایگزین می‌شود. سپس با استفاده از تقریب پخش، یک مجموعه معادلات اضافی برای محاسبه جریان‌های جزئی به دست می‌آید. همچنین، شرایط پیوستگی در روش‌های نقطه‌ای به صورت نقطه به نقطه و در روش‌های متوسط به صورت انتگرالی، اعمال می‌گردد. آنگاه معادلات بدست آمده، از مجموعه‌ای از روابط در هر نود تشکیل می‌شوند که از طرفی مقدار (نقطه‌ای یا متوسط) شار را در هر نود، به مقدار (نقطه‌ای یا متوسط) جریان‌های جزئی یا شار (بسته به نوع روش) روی سطوح و از طرف دیگر با ارائه مجموعه‌ای از معادلات شار یا جریان‌های سطحی، نودهای مجاور را به یکدیگر مرتبط می‌کنند. این معادلات می‌توانند جریان‌ها و یا شارهای سطحی ظاهر شده در معادله بالانس نودال را با عباراتی بر

حسب شارهای (متوسط یا نقطه‌ای) نودهای مجاور، حذف کنند و معادلاتی با ساختاری شبیه روش اختلاف محدود ارائه کنند که در آنها ضرایبی وابسته به جریان‌ها و شارهای سطحی وجود خواهد داشت. این ضرایب می‌توانند همگام با روش‌های متعارف تعیین منبع شکافت، در هر بار تکرار برنامه، به روز رسانی شوند [۷]. در این بخش، روابط و نوع فرمول‌بندی روش بسط نودال جریان متوسط در مرتبه‌های حل صفرم و دوم برای یک هندسه مستطیلی دو بعدی ارائه می‌گردند که در هندسه سه بعدی نیز روند مشابه است.

۷-۲-۱- دستگاه مختصات در روش نودال

به منظور انجام محاسبات نودال، می‌بایست مجموعه‌ای از محورها را در راستای متغیرهای مستقل، تعیین کرد. در هندسه مستطیلی دو بعدی، متداول‌ترین کار استفاده از محورهای دکارتی $(u=x, y)$ می‌باشد. کار بر روی معادلات با تعریف متغیرهای بدون بعد زیر، آسان‌تر می‌شود:

$$\xi_u = \frac{u}{h_u^m}, \quad u = x, y \quad (۲-۷)$$

که h_u^m ضخامت نود m در راستای u می‌باشد. در ادامه با پایه قرار دادن محور دکارتی، نمادگذاری‌های بعدی را قرارداد می‌کنیم:

Γ_{us}^m : سطح چپ ($s=l$) / سطح راست ($s=r$) در راستای $u=x, y$ در نود Π^m

Φ_g^m : شار متوسط گروه انرژی g در نود Π^m

Ψ_{gus}^m : شار متوسط گروه انرژی g روی سطح Γ_{us}^m

$J_{gus}^{+m}, J_{gus}^{-m}$: جریان‌های متوسط جزئی گروه انرژی g خارج شونده (+) و داخل شونده (-) از و به سطح Γ_{us}^m

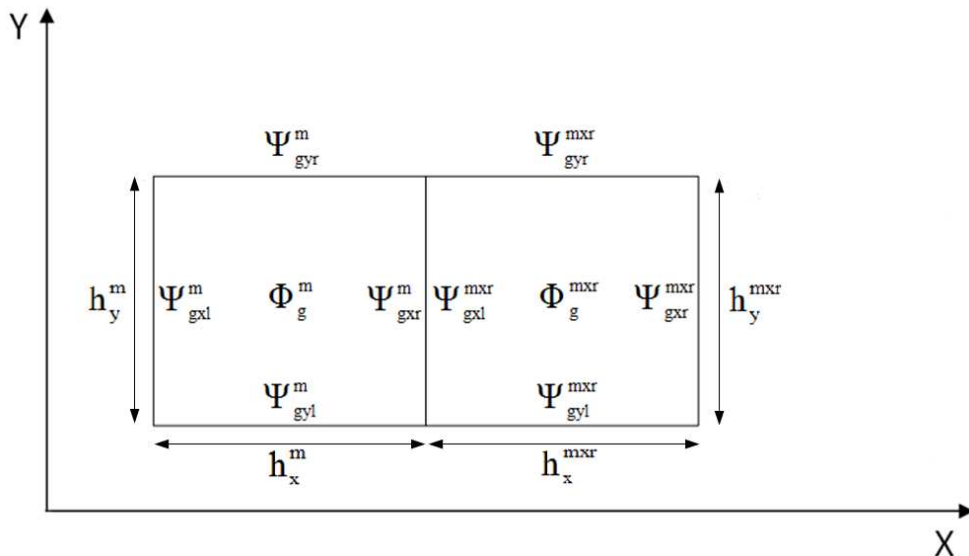
$$\Gamma_{us}^m: \lambda_{gus}^m \text{ مقدار شرط مرزی روی سطح } \Gamma_{us}^m$$

$$A_{us}^m: \text{مساحت سطح } \Gamma_{us}^m$$

$$e_{us}^m: \text{بردار یکه عمود بر سطح } \Gamma_{us}^m \text{ در جهت بیرون}$$

$$\Pi^{mus}: \text{نود مجاور با } \Pi^m \text{ از طرف سطح } \Gamma_{us}^m$$

شکل ۱، نمونه‌ای از نمادگذاری شارها و نیز جهت‌های قراردادی را در دو نود مجاور در دستگاه مختصات دکارتی دو بعدی نشان می‌دهد.



شکل ۱: نمونه نمادگذاری شارهای حجمی و سطحی در دو نود مجاور

۷-۲-۲- روش بسط نودال جریان متوسط مرتبه صفرم

روش جریان متوسط، روش بسط نودالی است که توسط Finnemann و همکاران ابداع شده است [۱۳]. این روش بر مبنای انتگرال‌گیری از معادله پایستگی چند گروهی نوترون در هر نود، استوار است. معادله پایستگی چند گروهی نوترون به شکل زیر می‌باشد:

$$\sum_{\substack{u=x,y \\ s=l,r}} \frac{1}{h_u^m} \{j_{gus}^{+m} - j_{gus}^{-m}\} + \sum_{rg}^m \Phi_g^m = \sum_{\substack{g'=1 \\ g \neq g}}^G \sum_{gg'}^m \Phi_{g'}^m + \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g'=1}^G \nu \sum_{fg'}^m \Phi_{g'}^m \quad (۳-۷)$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad u = x, y$$

در روش جریان متوسط مجهولات مسأله مقادیر متوسط شار نود و جریان‌های جزئی سطوح آن می‌باشد. در این روش، بسط شار مرتبه صفر (درجه دوم) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\phi_g(\xi_x, \xi_y) = A_g h_0 + a_{gx} h_1(\xi_x) + b_{gx} h_2(\xi_x) + a_{gy} h_1(\xi_y) + b_{gy} h_2(\xi_y) + c_g h_1(\xi_x) h_1(\xi_y) \quad (4-7)$$

که در آن توابع توزیع $h_i(\xi_u)$ ، چند جمله‌ای درجه i بر حسب ξ_u هستند و هر کدام از این توابع، توابعی متعامد در سراسر حجم نود Π^m ، محسوب می‌شوند. با استفاده از خواص توابع متعامد، این توابع به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$h_0 = 1, \quad h_1(\xi_u) = \xi_u, \quad h_2(\xi_u) = \xi_u^2 - \frac{1}{12} \quad (5-7)$$

به منظور محاسبه ضرایب A_g ، a_{gu} و b_{gu} از تعریف شار متوسط در نود و سطوح آن به صورت (6-7)، استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{V^m} \int_{\Pi^m} \phi_g d\Pi^m = \Phi_g^m$$

$$\frac{1}{A_{us}^m} \int_{\Gamma_{us}^m} \phi_g d\Gamma_{us}^m = \Psi_{gus}^m \quad (6-7)$$

که در نتیجه خواهیم داشت:

$$A_g = \Phi_g^m$$

$$a_{gu} = \Psi_{gur}^m - \Psi_{gul}^m$$

$$b_{gu} = 3(\Psi_{gur}^m + \Psi_{gul}^m - 2\Phi_g^m) \quad (Y-7)$$

به منظور حل معادله (۷-۳)، به مجموعه اضافی از معادلات برای محاسبه جریان‌های متوسط جزئی $(j_{\text{gus}}^{+m}, j_{\text{gus}}^{-m})$ نیاز داریم. این معادلات با معرفی تقریب پخش و بیان شار نوترونی در هر نود با تقریب چند جمله‌ای (۷-۴)، بدست می‌آیند. طبق قانون فیک^{۱۴}، در سطح Γ_{ul}^m داریم:

$$j_{\text{gul}}^{+m} - j_{\text{gul}}^{-m} = -\frac{1}{A_{\text{ul}}^m} \int_{\Gamma_{\text{ul}}^m} D_{\text{g}} \nabla \phi_{\text{g}} e_{\text{ul}}^m d\Gamma_{\text{ul}}^m = \frac{D_{\text{g}}^m}{h_{\text{u}}^m} (a_{\text{gu}} - b_{\text{gu}}) = \frac{D_{\text{g}}^m}{h_{\text{u}}^m} (-2\Psi_{\text{gur}}^m - 4\Psi_{\text{gul}}^m + 6\Phi_{\text{g}}^m) \quad (۸-۷)$$

در تقریب پخش، شار سطحی طبق رابطه زیر به جریان‌های جزئی مرتبط می‌شود:

$$\Psi_{\text{gus}}^m = 2(j_{\text{gus}}^{+m} + j_{\text{gus}}^{-m}) \quad (۹-۷)$$

با ترکیب روابط (۷-۸) و (۷-۹)، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\left(1 + 8 \frac{D_g^m}{h_u^m}\right) j_{gul}^{+m} + 4 \frac{D_g^m}{h_u^m} j_{gur}^{+m} = \left(1 - 8 \frac{D_g^m}{h_u^m}\right) j_{gul}^{-m} - 4 \frac{D_g^m}{h_u^m} j_{gur}^{-m} + 6 \frac{D_g^m}{h_u^m} \Phi_g^m \quad (10-7)$$

و به همین صورت، برای سطح Γ_{ur}^m نیز داریم:

$$\left(1 + 8 \frac{D_g^m}{h_u^m}\right) j_{gur}^{+m} + 4 \frac{D_g^m}{h_u^m} j_{gul}^{+m} = \left(1 - 8 \frac{D_g^m}{h_u^m}\right) j_{gur}^{-m} - 4 \frac{D_g^m}{h_u^m} j_{gul}^{-m} + 6 \frac{D_g^m}{h_u^m} \Phi_g^m \quad (11-7)$$

بنابراین برای سطوح نود m ، در جهت u ، به معادله به فرم ماتریسی زیر می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} 1 + 8 \frac{D_g^m}{h_u^m} & 4 \frac{D_g^m}{h_u^m} \\ 4 \frac{D_g^m}{h_u^m} & 1 + 8 \frac{D_g^m}{h_u^m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{gul}^{+m} \\ j_{gur}^{+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 8 \frac{D_g^m}{h_u^m} & -4 \frac{D_g^m}{h_u^m} & 6 \frac{D_g^m}{h_u^m} \\ -4 \frac{D_g^m}{h_u^m} & 1 - 8 \frac{D_g^m}{h_u^m} & 6 \frac{D_g^m}{h_u^m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{gul}^{-m} \\ j_{gur}^{-m} \\ \Phi_g^m \end{bmatrix} \quad (12-7)$$

معادله (۱۲-۷)، به صورت تزویج شده با شروط پیوستگی برای همه نودها، می‌تواند برای حل معادله (۳-۷) کافی باشد. هر چند در این روش، شکل متداول دیگری نیز برای معادلات نودال وجود دارد که در آن ابتدا معادله (۱۲-۷) به شکلی تبدیل می‌شود که بیانگر جریان‌های خروجی از سطوح بر حسب جریان‌های ورودی باشد و سپس از این معادلات برای حذف جریان‌های خروجی در معادله پایستگی نوترون استفاده می‌شود. بدین منظور، معادلات مربوط به محاسبات جریان سطوح به صورت رابطه (۱۳-۷) بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} j_{gul}^{+m} \\ j_{gur}^{+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{gu}^m & B_{gu}^m & C_{gu}^m \\ A_{gu}^m & C_{gu}^m & B_{gu}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_g^m \\ j_{gul}^{-m} \\ j_{gur}^{-m} \end{bmatrix} \quad (۷-۱۳)$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad g = 1, 2, \dots, G.$$

که ضرایب A_{gu}^m ، B_{gu}^m و C_{gu}^m ، بدین شکل تعریف می‌گردند:

$$A_{gu}^m = \frac{\frac{6D_g^m}{h_u^m} \left(1 + \frac{4D_g^m}{h_u^m}\right)}{DET}$$

$$B_{gu}^m = \frac{(1 - \frac{48D_g^{m^2}}{h_u^{m^2}})}{DET}$$

$$C_{gu}^m = \frac{-\frac{8D_g^m}{h_u^m}}{DET}$$

$$DET = (1 + 4\frac{D_g^m}{h_u^m})(1 + 12\frac{D_g^m}{h_u^m}) \quad (۱۴-۷)$$

برای بدست آوردن جریان‌های سطوح داخلی، می‌توانیم از پیوستگی جریان‌ها روی سطوح استفاده کنیم. بدین صورت که جریان خروجی صفحه مورد نظر، جریان ورودی نود مجاور خواهد بود و برای سطح مرزی Γ_{us}^m نیز، با استفاده از قانون فیک، جریان‌های ورودی و خروجی به این سطح، به صورت زیر به یکدیگر مرتبط می‌شوند:

$$j_{gus}^{+m} - j_{gus}^{-m} = \lambda_{gus}^m 2(j_{gus}^{+m} + j_{gus}^{-m}) \quad (15-7)$$

که اگر ضریب آلبدو را به صورت (۱۶-۷) تعریف کنیم:

$$a_{gus}^m = \frac{1 - 2\lambda_{gus}^m}{1 + 2\lambda_{gus}^m} \quad (16-7)$$

آنگاه رابطه (۱۵-۷) را به صورت (۱۷-۷) داریم:

$$j_{\text{gus}}^{-m} = a_{\text{gus}}^m j_{\text{gus}}^{+m} \quad (17-7)$$

با استفاده از رابطه (13-7) و حذف جریان‌های خروجی از معادله توازن نودال (3-7)، معادله (18-7) را خواهیم داشت:

$$\left[\sum_{u=x,y} 2 \frac{A_{\text{gu}}^m}{h_u^m} + \sum_{\text{fg}} \sigma_{\text{fg}}^m \right] \Phi_g^m = \sum_{\substack{g'=1 \\ g \neq g}}^G \sum_{\text{gg}'}^m \sigma_{\text{gg}'}^m \Phi_{g'}^m + \frac{\chi_g}{k_{\text{eff}}} \sum_{g'=1}^G \nu \sigma_{\text{fg}}^m \Phi_{g'}^m + \sum_{\substack{u=x,y \\ s=l,r}} \frac{1}{h_u^m} (1 - B_{\text{gu}}^m - C_{\text{gu}}^m) j_{\text{gus}}^{-m} \quad (18-7)$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad u = x, y$$

در هر بار اجرای برنامه برای گروه g ، ابتدا با آخرین مقدار شارها و جریان‌ها، معادله (18-7) برای مقدار شار متوسط حل می‌شود، سپس با مقادیر جدید به دست آمده و مقادیر قدیم جریان‌ها، مقادیر جدید جریان‌های سطوح به دست می‌آیند.

[7]

۷-۲-۳- روش بسط نودال جریان متوسط مرتبه دوم

برای بدست آوردن دقت بالاتر نتایج در محاسبات با مش‌های بزرگ، می‌توان درجه چند جمله‌ای بسط شار یا به عبارتی مرتبه حل را افزایش داد. در این قسمت، فرمول‌بندی روش بسط نودال جریان متوسط مرتبه دوم جهت حل معادله پخش نوترون ارائه و مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حل مرتبه دوم روش بسط نودال، درجه چند جمله‌ای برابر چهار انتخاب می‌گردد. به طور کلی، بسط چند جمله‌ای شار مرتبه n ام به فرم (۷-۱۹) در نظر گرفته می‌شود:

$$\phi_g^{[n]} = \phi_g^{[0]} + \sum_{u=x,y}^n d_{gui} h_{i+2}(\xi_u) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j \neq 2}}^{i+j \leq n+2} c_{gij} h_i(\xi_x) h_j(\xi_y), \quad n \geq 1 \quad (7-19)$$

که در رابطه (۷-۱۹)، $\phi_g^{[0]}$ همان تعریف بسط شار مرتبه صفر را دارد و $h_i(\xi_u)$ نیز یک چند جمله‌ای درجه i بر حسب ξ_u است. همچنین در رابطه (۷-۱۹)، n بیانگر مرتبه حل و $n+2$ ، نشان دهنده درجه چند جمله‌ای بسط شار می‌باشد. به

منظور آنکه اطمینان پیدا کنیم، $\Phi_g^{[0]}$ فرم بسط شار مرتبه صفر تعریف شده در رابطه (۷-۴) را با توجه به وجود شرایط متعامد چند جمله‌ای‌ها حفظ می‌کند، بایستی توابع چند جمله‌ای مرتبه‌های بالاتر نیز، شرایط زیر را ارضاء کنند.

$$\int_{\Pi^m} h_i(\xi_u) d\Pi^m = 0, \quad u = x, y, \quad i = 3, 4, \dots, n+2$$

$$\int_{\Gamma_{us}^m} h_i(\xi_u) d\Gamma_{us}^m = 0, \quad u = x, y, \quad s = l, r, \quad i = 3, 4, \dots, n+2 \quad (۷-۲۰)$$

$k-1$ شرط مورد نیاز است تا بتوانیم توابع چند جمله‌ای مرتبه‌های بالاتر k^{th} (۱و۲و...و n) را بدست آوریم. پس، از خصوصیات توابع متعامد $k-1$ تابع مرتبه پایین‌تر استفاده می‌کنیم. یعنی:

$$\int_{\Pi^m} h_i(\xi_u) h_{i'}(\xi_u) d\Pi^m = 0, \quad u = x, y, \quad i, i' = 3, 4, \dots, n+2, \quad i \neq i' \quad (۷-۲۱)$$

برای حل مرتبه دوم، توابع چند جمله‌ای مناسب با درجات سوم و چهارم با توجه به شرایط ذکر شده، به صورت زیر انتخاب می‌گردند.

$$h_3(\xi_u) = \xi_u \left(\xi_u^2 - \frac{1}{12} \right)$$

$$h_4(\xi_u) = \left(\xi_u^2 - \frac{1}{4} \right) \left(\xi_u^2 - \frac{1}{20} \right) \quad (۲۲-۷)$$

همان طور که پیشتر بیان گردید، برای بدست آوردن ضرایب مجهول توابع چند جمله‌ای با درجات بالاتر در بسط شار، می‌توان از انتگرال‌های باقیمانده وزنی استفاده کرد. انتگرال باقیمانده وزنی را برای نود m به صورت (۲۳-۷) داریم:

$$\int_{\Pi^m} W_k(u) \left\{ -\text{div} D_g \nabla \phi_g + \Sigma_{rg} \phi_g - \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{gg'} \phi_{g'} - \frac{\chi_g}{k_{\text{eff}}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'} \phi_{g'} \right\} d\Pi^m = 0 \quad (23-7)$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad u = x, y$$

که در رابطه (۲۳-۷)، توابع وزنی $\{W_1(u), W_2(u), \dots, W_n(u)\}$ ، مجموعه‌ای از توابع مستقل هستند. لازم به ذکر است که اگر در رابطه (۲۳-۷)، $W_0 = 1$ انتخاب گردد، رابطه فوق به معادله پیوستگی انتگرالی نوترون تبدیل می‌شود. به علت آنکه توابع چند جمله‌ای بسط دارای خاصیت تعامد هستند، معادلات باقیمانده‌های وزن دهی شده (۲۳-۷)، به یک جفت معادلات وزن دهی شده یک بعدی (۲۴-۷) تبدیل می‌شوند.

$$\int_{\frac{h_u}{2}}^{\frac{h_u}{2}} W_k(u) \left\{ -D_g^m \frac{d^2 \psi_{gu}^m}{d^2 u} + \Sigma_{rg} \psi_{gu}^m + L_{gu}^m - \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{gg'}^m \psi_{g'u}^m - \frac{\chi_g}{k_{\text{eff}}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}^m \psi_{g'u}^m \right\} du = 0 \quad (24-7)$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad u = x, y$$

که در رابطه (۷-۲۴)، شار متوسط‌گیری شده یک بعدی در جهت u ، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Psi_{gu}^m(u) = \frac{1}{h_v^m} \int_{\frac{h_v^m}{2}}^{\frac{h_v^m}{2}} \phi_g^m dv, \quad u = x, y, \quad v \neq u \quad (۷-۲۵)$$

و پارامتر $L_{gu}^m(u)$ در رابطه (۷-۲۴) نیز، بیانگر میزان نشت عرضی در جهت u می‌باشد که به صورت زیر داریم:

$$L_{gu}^m(u) = -\frac{1}{h_v^m} \int_{\frac{h_v^m}{2}}^{\frac{h_v^m}{2}} D_g^m \frac{d^2 \phi_g^m}{d^2 u} dv, \quad u = x, y, \quad v \neq u \quad (۷-۲۶)$$

در حقیقت، رابطه (۷-۲۴) متوسط‌گیری شده رابطه (۷-۲۳) در جهت عرضی v می‌باشد که با استفاده از چنین معادله یک بعدی، راه برای بدست آمدن ضرایب مجهول توابع چند جمله‌ای مرتبه‌های بالاتر بسط شار آسان‌تر می‌گردد. زیرا، حملات متقاطع مکانی در جمله نشت عرضی L_{gu}^m ظاهر می‌شوند و با یک تقریب مناسب برای این جمله، نیاز به بدست

آوردن ضرایب مجهول این جملات نخواهیم داشت. حال، توزیع شار متوسط‌گیری شده عرضی یک بعدی در جهت u را می‌توان با توجه به بسط شار (۷-۱۹)، به صورت (۷-۲۷) در نظر گرفت.

$$\psi_{gu}^m(\xi_u) = \Phi_g^m + a_{gu} h_1(\xi_u) + b_{gu} h_2(\xi_u) + \sum_{i=1}^n d_{gui} h_{i+2}(\xi_u), \quad n \geq 1, \quad u = x, y \quad (7-27)$$

همانطور که از رابطه (۷-۲۷) مشخص است، برای حل مرتبه دوم، دو ضریب مجهول به بسط شار اضافه می‌گردند که می‌توان با استفاده از روابط وزن دهی شده (۷-۲۴)، معادلاتی برای این ضرایب بدست آورد که در ادامه مطرح خواهد شد. در معادله (۷-۲۴)، جمله نشت عرضی $L_{gu}^m(u)$ را نیز داریم که می‌بایستی به طور مناسب تعریف گردد. همانطور که پیشتر ذکر گردید، جمله انتگرالی وزن دهی شده نشت عرضی از جملات متقاطع مکانی موجود در بسط شار، بدست می‌آیند و در حقیقت، این جملات متقاطع در جایی دیگر از روابط ظاهر نمی‌شوند. پس، نیازی نیست که ضرایب این جملات به وسیله معادلات وزن دهی شده کمکی بدست آیند، چون کافی است که تابع نشت عرضی به صورت مناسبی تقریب

زده شود. معمولاً، برای بسط چند جمله‌ای شار درجه چهارم، نشت عرضی در جهت u ، به صورت یک تابع چند جمله‌ای درجه دوم در نظر گرفته می‌شود.

$$L_{gu}^m(\xi_u) = L_{gu0}^m + L_{gu1}^m h_1(\xi_u) + L_{gu2}^m h_2(\xi_u) \quad (28-7)$$

در رابطه بالا، جمله L_{gu0}^m را می‌توان به عنوان نشت عرضی متوسط‌گیری شده در جهت u برای نود m در نظر گرفت، زیرا:

$$\bar{L}_{gu}^m = \frac{1}{h_u^m} \int_{-\frac{h_u^m}{2}}^{\frac{h_u^m}{2}} L_{gu}^m(u) du = L_{gu0}^m \quad (29-7)$$

که البته رابطه (۷-۳۰) را نیز برای تعریف نشت عرضی متوسط‌گیری شده در جهت u ، داریم:

$$\bar{L}_{gu}^m = -\frac{1}{h_u^m} \frac{1}{h_v^m} \int_{-\frac{h_u^m}{2}}^{\frac{h_u^m}{2}} \int_{-\frac{h_v^m}{2}}^{\frac{h_v^m}{2}} D_g^m \frac{d^2 \phi_g^m}{dv^2} dudv = \frac{1}{h_v^m} [j_{gvr}^{+m} - j_{gvr}^{-m} + j_{gvl}^{+m} - j_{gvl}^{-m}] \quad (30-7)$$

پس می‌توان مقدار نشت عرضی متوسط‌گیری شده هر نود در جهت u را از مقادیر جریان‌های جزیی سطوح آن بدست آورد. روابط مربوط به مومنت‌های نشت عرضی مرتبه اول و دوم L_{gu1}^m و L_{gu2}^m ، نیز در جهت u ، به صورت رابطه (31-7) بدست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} L_{gu1}^m \\ L_{gu2}^m \end{bmatrix} = \frac{1}{-\alpha_1 \beta_r - \alpha_r \beta_1} \begin{bmatrix} \beta_r & -\beta_1 \\ -\alpha_r & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{L}_{gu}^{mul} - \bar{L}_{gu}^m \\ \bar{L}_{gu}^{mur} - \bar{L}_{gu}^m \end{bmatrix} \quad (31-7)$$

که در این روابط، ضرایب α_s و β_s بر حسب h_u^m و h_u^{mus} هر نود و نودهای مجاور سطوح مورد نظر می‌باشند. همچنین، برای بدست آوردن دو ضریب مجهول اضافه شده به بسط شار برای توابع چند جمله‌ای درجه سوم و چهارم در رابطه (۷-۳۲)، توابع وزنی نوع مومنتوم به صورت (۷-۳۲) انتخاب می‌گردند:

$$W_1 = h_1, \quad W_2 = h_2 \quad (۷-۳۲)$$

پس از ارزیابی انتگرال‌های موجود در رابطه (۷-۲۴)، به روابط (۷-۳۳) می‌رسیم که از حل این معادلات، ضرایب توابع با درجات بالاتر بسط شار، یعنی d_{gu1}^m و d_{gu2}^m حاصل می‌گردند.

$$\left\{ \frac{D_g^m}{h_u^{m^2}} + A_k \Sigma_{rg}^m \right\} d_{guk}^m = \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{gg'}^m \{ A_k d_{g'uk}^m - B_k e_{g'uk}^m \} + \frac{\chi_g}{K_{eff}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}^m \{ A_k d_{g'uk}^m - B_k e_{g'uk}^m \} + B_k \Sigma_{rg}^m e_{guk}^m + B_k L_{guk}^m \quad (۷-۳۳)$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad k = 1, 2, \quad u = x, y$$

در معادلات (۳۳-۷)، ضرایب A_k, B_k مقادیر ثابتی بوده و ضرایب e_{gu1}^m و e_{gu2}^m نیز همان ضرایب بسط شار مرتبه صفر یعنی a_{gu}^m و b_{gu}^m می‌باشند که البته می‌بایستی در هر حلقه تکرار طبق رابطه (۷-۷) به روز رسانی شوند. مقادیر L_{gu1}^m و L_{gu2}^m نیز از روابط (۳۱-۷) بدست می‌آیند.

پس از آن که ضرایب مرتبه‌های بالاتر بسط شار بدست آمد، مشابه حل مرتبه صفر عمل می‌کنیم. یعنی در اینجا هم، نیاز به روابطی داریم که جریان متوسط سطوح را به مقادیر شار متوسط نودها مربوط سازد. در نتیجه، از قانون فیک و بسط شار (۲۷-۷) استفاده می‌کنیم. پس از انجام محاسبات، به دسته معادلات جریانی (۳۴-۷) برای نود Π^m خواهیم رسید:

$$\begin{bmatrix} j_{gul}^{+m} \\ j_{gur}^{+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{gu}^m & B_{gu}^m & C_{gu}^m & -D_{gu}^m & E_{gu}^m \\ A_{gu}^m & C_{gu}^m & B_{gu}^m & D_{gu}^m & E_{gu}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_g^m \\ j_{gul}^{-m} \\ j_{gur}^{-m} \\ d_{gu1}^m \\ d_{gu2}^m \end{bmatrix} \quad (34-7)$$

که ضرایب $A_{gu}^m - E_{gu}^m$ ، تابعی بر حسب $\frac{D_g^m}{h_u^m}$ می‌باشند. اکنون از روابط (۳۴-۷)، برای حذف جریان‌های خروجی از معادله بالانس نوترون (۳-۷)، بر حسب جریان‌های ورودی استفاده می‌کنیم. آنگاه معادله بالانس نوترون به صورت زیر خواهد شد:

$$\left[\sum_{u=x,y} 2 \frac{A_{gu}^m}{h_u^m} + \Sigma_{rg}^m \right] \Phi_g^m = \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \Sigma_{gg'}^m \Phi_{g'}^m + \frac{\chi_g}{k_{eff}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{fg'}^m \Phi_{g'}^m$$

$$+ \sum_{u=x,y} \frac{1}{h_u^m} \left\{ (1 - B_{gu}^m - C_{gu}^m) (j_{gul}^{-m} + j_{gur}^{-m}) - 2E_{gu}^m d_{gu2}^m \right\} \quad (۳۵-۷)$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad u = x, y.$$

در نهایت، معادلات (۳۳-۷) تا (۳۵-۷) به صورت جفت شده جهت حل معادله پخش نوترون، مورد استفاده قرار می‌گیرند [۷]. لازم به ذکر است که در حل مرتبه اول، روابط ارائه شده بالا برقرارند با این تفاوت که ضرایب d_{gu2}^m و L_{gu2}^m برای

همه المان‌ها برابر صفر در نظر گرفته می‌شوند. در حقیقت، رابطه (۷-۲۷) تا درجه سوم و رابطه (۷-۲۸) تا درجه اول می‌باشند.

۷-۳- الگوریتم حل روش بسط نودال جریان متوسط

پس از بررسی فرمول‌بندی روش بسط نودال جریان متوسط، الگوریتم بکار گرفته شده برای حل معادله پخش نوترون مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف اصلی حل معادله پخش نوترون، تخمین مقدار ضریب تکثیر مؤثر و همچنین توزیع شار وابسته به مکان و انرژی در هندسه مورد نظر می‌باشد. یکی از الگوریتم‌های حل معادله پخش، استفاده از روش قدرت^{۱۵} است. در روش قدرت، از روند حلقه‌های تکرار جهت رسیدن به جواب دقیق و همگرا شدن نتایج استفاده می‌شود. ابتدا مقادیر ضریب تکثیر مؤثر و چشمه شکافت‌پذیر حدس زده می‌شود.

$$S \sim S^{(0)}; \quad k \sim k^{(0)} \quad (36-7)$$

که جمله شکافت به صورت (37-7) تعریف می‌گردد.

$$S(r) \equiv \sum_{g'=1}^G v \Sigma_{fg'} \Phi_{g'}(r) \quad (37-7)$$

توجه به این نکته ضروری است که وابستگی مکانی منبع شکافت در همه گروه‌های انرژی یکسان است و از آنجا که ما شار و سطح مقطع‌ها را در هر نود، ثابت فرض کرده‌ایم، می‌توانیم منبع شکافت را برای نود m به صورت زیر بنویسیم:

$$S^m \equiv \sum_{g'=1}^G v \Sigma_{fg'}^m \Phi_{g'}^m \quad (38-7)$$

سپس به منظور محاسبه شار گروه اول انرژی برای هر نود، داریم:

$$-\nabla \cdot \mathbf{D}_1 \nabla \Phi_1^{(1)} + \Sigma_{r1} \Phi_1^{(1)} \equiv \frac{1}{k^{(0)}} \chi_1 S^{(0)} \quad (39-7)$$

پس از بدست آوردن مقدار شار در گروه اول انرژی، می‌توان به محاسبه شار گروه دوم و سایر گروه‌ها پرداخت. با فرض پراکندگی از گروه‌های بالاتر انرژی به پایین‌تر و استفاده از مقادیر قبلی شار گروه‌های پایین‌تر انرژی، برای گروه g در تکرار n ام، خواهیم داشت:

$$-\nabla \cdot \mathbf{D}_g \nabla \Phi_g^{(n)} + \Sigma_{rg} \Phi_g^{(n)} \equiv \frac{1}{k^{(n-1)}} \chi_g S^{(n-1)} + \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{sg' \rightarrow g} \Phi_{g'}^{(n)} + \sum_{g'=g+1}^G \Sigma_{sg' \rightarrow g} \Phi_{g'}^{(n-1)} \quad (40-7)$$

پس از بدست آوردن مقادیر شار تمام گروه‌های انرژی، نسبت به تولید منبع شکافت برای هر نود و متعاقب آن، ضریب تکثیر مؤثر جدید، اقدام می‌کنیم.

$$k^{(n)} = \frac{\sum_{m=1}^M V^m S^{m^{(n)}}}{\frac{1}{k^{(n-1)}} \sum_{m=1}^M V^m S^{m^{(n-1)}}} \quad (41-7)$$

که در رابطه بالا، M تعداد کل نودها و V حجم هر نود می‌باشد. محاسبات بالا در هر بار تکرار حلقه اصلی برنامه، برای همه گروه‌های انرژی و نودها، تکرار می‌شوند. شرط اتمام حلقه نیز، اجتماع دو شرط برای همگرایی ضریب تکثیر مؤثر و شار و کمتر شدن خطای این مقادیر می‌باشد. پس از ارضای شروط همگرایی، مقادیر شار نودها در گروه‌های انرژی، ضریب تکثیر مؤثر و توزیع توان نرمال شده به مقدار متوسط در فایل خروجی چاپ می‌شوند.

لازم به ذکر است که در کد محاسباتی تهیه شده، از زبان برنامه‌نویسی فرترن ۹۰ استفاده شده و این بسته، توانایی حل معادله پخش نوترون چند گروهی، چند ناحیه‌ای در هندسه دکارتی سه بعدی با فرض امکان پراکندگی نوترون‌ها از هر

گروه انرژی به دیگر گروه‌ها (امکان پراکندگی به گروه‌های بالاتر) را با استفاده از روش بسط نودال جریان متوسط داراست.

۸- روش بسط نودال جریان متوسط جهت حل معادله الحاقی پخش در محیط شکافت‌پذیر

در روش حل بسط نودال، معادله الحاقی پخش نوترون با تعریف شار الحاقی (ϕ_g^*) به صورت بسط چند جمله‌ای در هر نود و روش باقیمانده وزنی، حل می‌گردد. یعنی:

$$\int_{\Pi^m} W_{gu}^{[k]} \left\{ -\text{div} D_g \nabla \phi_g^* + \Sigma_{tg} \phi_g^* - \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g'g} \phi_{g'}^* - \frac{\nu \Sigma_{fg}}{k_{\text{eff}}} \sum_{g'=1}^G \chi_{g'} \phi_{g'}^* \right\} d\Pi^m = 0 \quad (1-8)$$

$m = 1, 2, \dots, M, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad u = x, y, z.$

که در رابطه (۸-۱)، m ، g و k ، به ترتیب، بیانگر شماره نود، گروه انرژی و مرتبه حل می‌باشند. با اعمال شرایط پیوستگی شار الحاقی و جریان روی سطوح و استفاده از معادله (۸-۱)، ضرایب مورد نیاز محاسبه می‌شوند. مانند حل مستقیم در روش‌های حل نودال مرتبه صفر، چند جمله‌ای‌های استفاده شده برای تعریف شار الحاقی در هر نود، درجه دو انتخاب می‌شوند. پس برای محاسبه ضرایب مجهول بسط شار، چند جمله‌ای‌ها باید شرایط صفر بودن معادله وزن دهی شده (۸-۱) در حالت مرتبه صفرم یعنی ($K=0$)، بالانس ارزش نوترونی در هر نود و پیوستگی شار الحاقی و مؤلفه عمودی جریان در سطوح را ارضاء کنند. در حل مرتبه‌های بالاتر نیز، با در نظر گرفتن تابع وزنی مناسب در رابطه (۸-۱)، ضرایب مجهول مراتب بالاتر بسط شار الحاقی بدست می‌آیند.

در روش بسط نودال جریان متوسط، از معادله متوسط‌گیری شده الحاقی پایستگی ارزش نوترون (۸-۲) استفاده می‌گردد:

$$\sum_{\substack{u=x,y \\ s=1,r}} \frac{1}{h_u^m} \{j_{gus}^{+m} - j_{gus}^{-m}\} + \sum_{rg}^m \Phi_g^{*m} = \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \sum_{g'g}^m \Phi_{g'}^{*m} + \frac{\nu \sum_{fg}^m}{k_{\text{eff}}} \sum_{g'=1}^G \chi_{g'} \Phi_{g'}^{*m} \quad (2-8)$$

$$m=1,2,\dots,M, \quad g=1,2,\dots,G, \quad u=x,y.$$

که با حذف جریان‌های خروجی از معادله الحاقی نودال (۲-۸)، معادله (۳-۸) برای حصول مقادیر شار متوسط الحاقی نودها بدست می‌آید:

$$\left[\sum_{u=x,y} 2 \frac{A_{gu}^m}{h_u^m} + \sum_{rg}^m \right] \Phi_g^{*m} = \sum_{\substack{g'=1 \\ g' \neq g}}^G \sum_{g'g}^m \Phi_{g'}^{*m} + \frac{\nu \sum_{fg}^m}{k_{\text{eff}}} \sum_{g'=1}^G \chi_{g'} \Phi_{g'}^{*m} + \sum_{\substack{u=x,y \\ s=1,r}} \frac{1}{h_u^m} (1 - B_{gu}^m - C_{gu}^m) j_{gus}^{-m} \quad (3-8)$$

$$m=1,2,\dots,M, \quad g=1,2,\dots,G, \quad u=x,y.$$

اما لازم به ذکر است که دستگاه مختصات، تعریف پارامترها و مابقی فرمول‌های بیان شده در بخش‌های (۲-۲-۷) و (۲-۷-۲) برای حل مستقیم مرتبه‌های صفر و دو، به غیر از روابط بالا، در حل معادلات الحاقی پخش نوترون نیز صادق می‌باشند.

۹- روش بسط نودال جریان متوسط جهت حل معادله پخش نوترون در حالت چشمه ثابت

در این بخش، مساله، حل مستقیم معادله پخش نوترون در حالت وجود چشمه ثابت نوترونی است. معادله انتگرالی پیوستگی نوترون در این حالت به فرم (۹-۱) است:

$$\sum_{\substack{u=x,y \\ s=l,r}} \frac{1}{h_u^m} \{j_{gus}^{+m} - j_{gus}^{-m}\} + \sum_{rg}^m \Phi_g^m = \sum_{\substack{g'=1 \\ g \neq g}}^G \sum_{gg'}^m \Phi_{g'}^m + S_g^m \quad (1-9)$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad u = x, y.$$

در معادله (۱-۹)، جمله چشمه ثابت نوترونی به جای جمله شکافت بیان شده در معادله (۷-۳)، قرار گرفته است. در حقیقت، تنها تفاوت موجود در این حالت نسبت به فرمول‌بندی‌های ذکر شده در بخش هفتم، همین تغییر است که در نهایت، معادله بالانس نوترونی با حذف جریان‌های خروجی بر حسب جریان‌های ورودی و شار متوسط برای نود m ام و گروه انرژی g ام در حل مرتبه صفر بصورت رابطه (۹-۲) می‌باشد.

$$\left[\sum_{u=x,y} 2 \frac{A_{gu}^m}{h_u^m} + \sum_{rg}^m \right] \Phi_g^m = \sum_{\substack{g'=1 \\ g \neq g}}^G \sum_{gg'}^m \Phi_{g'}^m + S_g^m + \sum_{\substack{u=x,y \\ s=l,r}} \frac{1}{h_u^m} (1 - B_{gu}^m - C_{gu}^m) j_{gus}^{-m} \quad (2-9)$$

$$m = 1, 2, \dots, M, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad u = x, y.$$

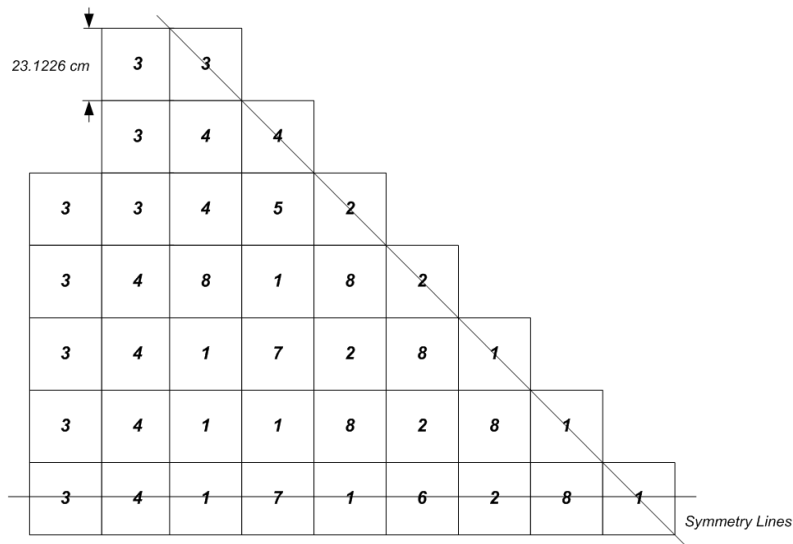
دیگر روابط مربوط به حل مرتبه‌های صفر و دو نیز مشابه روابط مطرح شده در بخش‌های (۲-۲-۷) و (۳-۲-۷) با اعمال تغییر فوق‌الذکر می‌باشند. لازم به ذکر است که معادله (۲-۹) از حالت معادله مقدار ویژه‌ای خارج شده و معیار همگرایی صرفاً بر روی مقادیر شار متوسط نودها است.

۱۰- بررسی نمونه‌های محاسباتی و راستی آزمایی

در این فصل، به منظور راستی‌آزمایی نتایج روش حل بسط نودال جریان متوسط، نمونه‌هایی را مورد بررسی قرار داده و نتایج آنها را با نتایج مراجع معتبر، مقایسه کرده و از این طریق، میزان دقت محاسبات را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

۱۰-۱- نمونه محاسباتی دو بعدی قلب راکتور BIBLIS

نمونه راکتور BIBLIS، یک مسئله مشهور دو بعدی و دو گروهی است. به علت چیدمان خاص مجتمع‌های سوخت در این راکتور و تنوع آن، حل مسئله از نظر نیل به دقت مناسب نتایج دشوار می‌باشد. البته این راکتور نمونه‌ای از یک راکتور واقعی است. مجتمع‌های سوخت در این راکتور دارای ابعاد حدود ۲۳ سانتیمتر با هشت نوع ترکیب مواد متفاوت می‌باشد [۴]. نقشه قلب این راکتور به صورت تقارن یک هشتم، در شکل ۲ و سطوح مقاطع آن در جدول شماره ۱ آمده است.



شکل ۲: آرایش هندسی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور BIBLIS-2D

جدول شماره ۱: سطوح مقاطع دو گروهی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور BIBLIS-2D

$\Sigma_{s1 \rightarrow 2} (\text{cm}^{-1})$	$v\Sigma_{fg} (\text{cm}^{-1})$	$\Sigma_{ng} (\text{cm}^{-1})$	$D_g (\text{cm})$	گروه انرژی (g)	ناحیه
۰/۰۱۷۷۵۴	۰/۰۰۵۸۷۱	۰/۰۰۹۵۰۴	۱/۴۳۶۰	۱	۱
	۰/۰۹۶۰۶۷	۰/۰۷۵۰۰۶	۰/۳۶۳۵	۲	
۰/۰۱۷۶۲۱	۰/۰۰۶۱۹۱	۰/۰۰۹۶۷۹	۱/۴۳۶۶	۱	۲
	۰/۱۰۳۵۸۰	۰/۰۷۸۴۳۶	۰/۳۶۳۶	۲	
۰/۰۲۳۱۰۶	۰	۰/۰۰۲۶۵۶	۱/۳۲۰۰	۱	۳
	۰	۰/۰۷۱۵۹۶	۰/۲۷۷۲	۲	

۰/۰۱۷۱۰۱	۰/۰۰۷۴۵۳	۰/۰۱۰۳۶۳	۱/۴۳۸۹	۱	۴
	۰/۱۳۲۳۶۰	۰/۰۹۱۴۰۸	۰/۳۶۳۸	۲	
۰/۰۱۷۲۹	۰/۰۰۶۱۹۱	۰/۰۱۰۰۰۳	۱/۴۳۸۱	۱	۵
	۰/۱۰۳۵۸۰	۰/۰۸۴۸۲۸	۰/۳۶۶۵	۲	
۰/۰۱۷۱۹۲	۰/۰۰۶۴۲۹	۰/۰۱۰۱۳۲	۱/۴۳۸۵	۱	۶
	۰/۱۰۹۱۱۰	۰/۰۸۷۳۱۴	۰/۳۶۶۵	۲	
۰/۰۱۷۱۲۵	۰/۰۰۶۱۹۱	۰/۰۱۰۱۶۵	۱/۴۳۸۹	۱	۷
	۰/۱۰۳۵۸۰	۰/۰۸۸۰۲۴	۰/۳۶۷۹	۲	
۰/۰۱۷۰۲۷	۰/۰۰۶۴۲۹	۰/۰۱۰۲۹۴	۱/۴۳۹۳	۱	۸
	۰/۱۰۹۱۱۰	۰/۰۹۰۵۱۰	۰/۳۶۸۰	۲	

محاسبات مرتبه‌های صفر تا دو روش جریان متوسط، برای یک چهارم قلب راکتور دو بعدی BIBLIS توسط کد محاسباتی تهیه شده (ACNEC) انجام گردید که نتایج برای مش‌بندی‌های مختلف در جدول شماره ۲ آمده است. نتایج جدول شماره ۲، شامل درصد خطای نسبی ضریب تکثیر مؤثر، حداکثر و متوسط درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت نسبت به مرجع [۴]، می‌باشد. ضریب تکثیر مؤثر مرجع نیز ۱/۰۲۵۱۲ است. بر اساس جدول شماره ۲، نتایج حل مرتبه صفر نودال بسط شار جریان متوسط برای مش‌بندی‌های بزرگ با ابعاد حدود ۱۱/۶ سانتیمتر در ۱۱/۶ سانتیمتر و کوچک‌تر دارای دقت قابل قبول هستند. لکن، نتایج حل مرتبه‌های بالاتر در مش‌بندی‌های بزرگ با ابعاد یک مجتمع سوخت نیز با دقت کافی همراه است.

جدول شماره ۲: نتایج حاصل از کد محاسباتی ACNEC

ابعاد نودها (cm ²)	مرتبه حل	درصد خطای نسبی K _{eff}	حداکثر درصد خطای نسبی توان	متوسط درصد خطای نسبی توان
--------------------------------	----------	---------------------------------	----------------------------	---------------------------

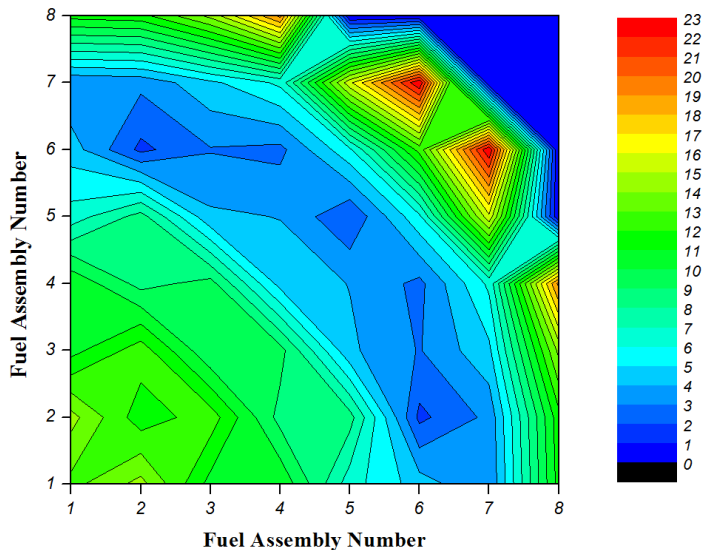
۰/۶۲	۱/۴۴	۰/۰۰۷	۰	۵/۸ × ۵/۸
۰/۱۹	-۰/۴۰	-۰/۰۰۳	۱	۵/۸ × ۵/۸
۰/۰۴	-۰/۱	-۰/۰۰۱	۲	۵/۸ × ۵/۸
۱/۰۵	-۲/۳۴	۰/۰۵۵	۰	۱۱/۶ × ۱۱/۶
۰/۷۹	-۱/۶۳	-۰/۰۰۵	۱	۱۱/۶ × ۱۱/۶
۰/۱۵	-۰/۳۲	-۰/۰۰۱	۲	۱۱/۶ × ۱۱/۶
۸/۶۶	۲۲/۳	۰/۲۳۰	۰	۲۳ × ۲۳
۱/۲۲	-۳/۰۲	۰/۰۲۸	۱	۲۳ × ۲۳
۰/۳۸	-۱/۱۴	۰/۰۰۷	۲	۲۳ × ۲۳

توزیع توان نسبی مرجع مجتمع‌های سوخت همراه با نتایج محاسبات مرتبه‌های صفر تا دو روش بسط نودال در مش‌بندی بزرگ با ابعاد یک مجتمع سوخت در شکل ۳ آمده است. همچنین، شکل‌های ۴ تا ۶ توزیع قدر مطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت در قلب راکتور با مش‌بندی‌های بزرگ را به ترتیب برای حل مرتبه صفرم تا دوم روش جریان متوسط نشان می‌دهند. از شکل‌های مذکور پیداست که بیشترین خطای توان در مجتمع‌های سوخت کناری قلب به علت وجود اختلاف زیاد شار بین سوخت و بازتابنده رخ داده است که بیشترین کاهش خطای توان با افزایش مرتبه حل نیز در همین نواحی می‌باشد.

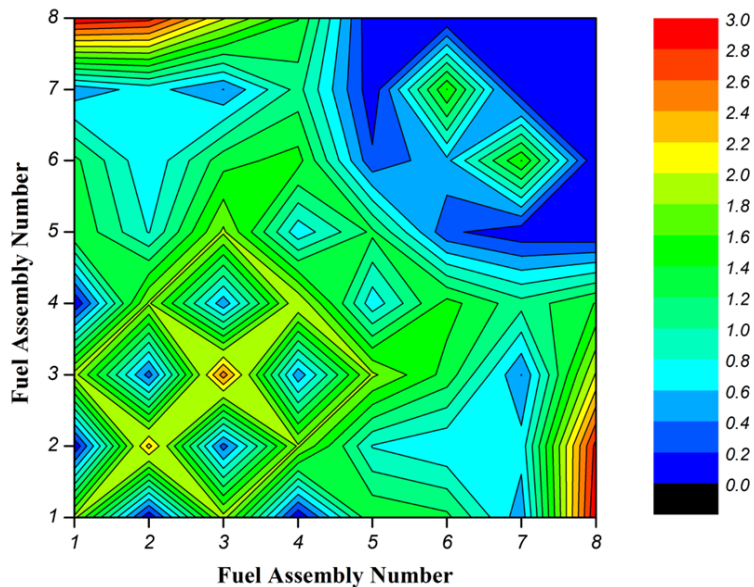
1.090					
0.953					
1.110					
1.092					
1.101	1.117				
0.944	0.991				
1.101	1.143				
1.101	1.122				
1.242	1.133	1.122			
1.112	0.992	1.021			
1.266	1.130	1.150			
1.246	1.132	1.129			
1.220	1.223	1.104	1.161		
1.089	1.119	1.001	1.108		
1.220	1.246	1.099	1.184		
1.221	1.228	1.103	1.167		
1.088	1.067	1.120	1.039	1.124	
1.019	0.978	1.074	0.998	1.146	
1.103	1.059	1.141	1.032	1.138	
1.090	1.065	1.126	1.039	1.130	
0.981	1.032	0.923	0.951	0.994	1.202
0.938	1.015	0.896	0.976	1.050	1.012
0.969	1.039	0.911	0.965	0.996	1.208
0.979	1.032	0.920	0.956	0.999	1.212
1.094	1.071	0.931	0.765	0.877	0.686
1.129	1.107	0.975	0.812	1.012	0.839
1.089	1.064	0.935	0.757	0.875	0.675
1.090	1.068	0.932	0.765	0.879	0.680
1.013	0.969	0.824	0.546		
1.129	1.083	0.942	0.651		
0.983	0.942	0.807	0.538		
1.001	0.959	0.820	0.544		

Reference solution
ACNEC (zeroth order)
ACNEC (first order)
ACNEC (second order)

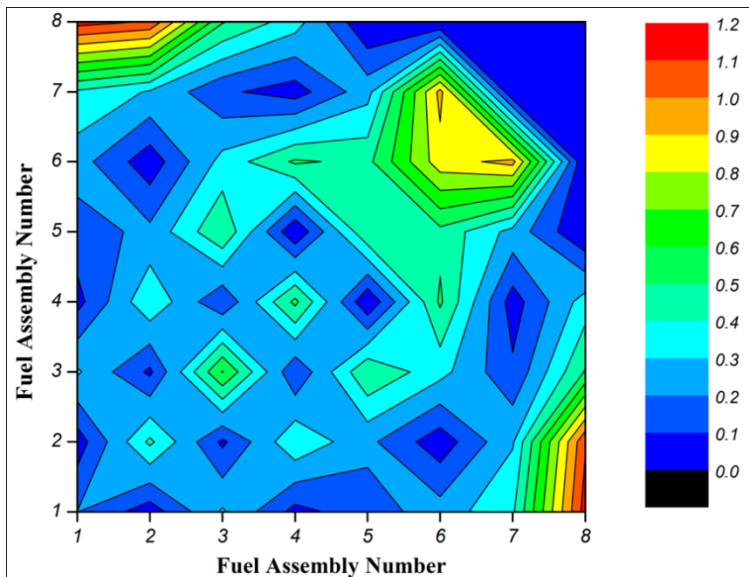
شکل ۳: توزیع توان نسبی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور BIBLIS-2D



شکل ۴: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور BIBLIS-2D (مرتبۀ ۰)



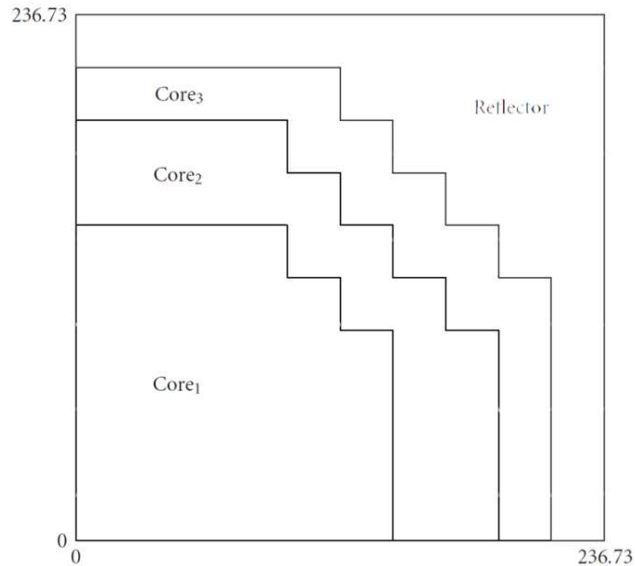
شکل ۵: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور BIBLIS-2D (مرتبۀ ۱)



شکل ۶: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور BIBLIS-2D (مرتبۀ ۲)

۱۰-۲- نمونه محاسباتی دو بعدی قلب راکتور ELSY-like

نمونه محاسباتی ELSY-like، یک قلب راکتور سریع دو بعدی است که دارای مشخصات فیزیکی راکتور واقعی ELSY می‌باشد. این نمونه شامل مواد با سطح مقطع‌های سه گروهی بوده و جهت آزمودن قابلیت محاسبات چند گروهی کد محاسباتی تهیه شده، مورد بررسی قرار می‌گیرد. قلب راکتور، دارای مجتمع‌های سوخت با ابعاد $23/673$ سانتیمتر در $23/673$ سانتیمتر است که هندسه قلب همراه با بازتابنده، در جهت شعاعی به ده قسمت مساوی تقسیم می‌گردد. قلب راکتور دارای تقارن یک چهارم است و سطح مقطع‌های همگن شده مجتمع‌های سوخت توسط گروه ENEA تهیه و ارائه شده است. هندسه یک چهارم قلب در شکل ۷ و سطح مقطع‌های سه گروهی سه ناحیه مختلف سوخت و همچنین، بازتابنده در جدول شماره ۳ نشان داده شده‌اند [۱۴].



شکل ۷: هندسه قلب راکتور ELSY-Like در جهت شعاعی

جدول شماره ۳: سطوح مقاطع سه گروهی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور ELSY-Like-2D

$\Sigma_{sg \rightarrow g+2} (\text{cm}^{-1})$	$\Sigma_{sg \rightarrow g+1} (\text{cm}^{-1})$	$\nu \Sigma_{fg} (\text{cm}^{-1})$	$\Sigma_{rg} (\text{cm}^{-1})$	$D_g (\text{cm})$	گروه انرژی (g)	ناحیه
۰/۰۰۰۵۱۶۴	۰/۰۲۵۷۸۰۰	۰/۰۱۰۷۶۰	۰/۰۳۳۰۳۰	۲/۱۱	۱	۱
-	۰/۰۰۴۷۰۵۲	۰/۰۰۳۳۰۹	۰/۰۰۸۶۳۸	۱/۲۹	۲	
-	-	۰/۰۰۴۳۶۶	۰/۰۰۷۳۶۹	۰/۸۶	۳	
۰/۰۰۰۵۱۳۵	۰/۰۲۵۶۲۰	۰/۰۱۱۴۶۰	۰/۰۳۳۰۶۰	۲/۱۱	۱	۲
-	۰/۰۰۴۵۷۶	۰/۰۰۳۶۹۸	۰/۰۰۸۶۵۱	۱/۳۰	۲	
-	-	۰/۰۰۴۷۶۶	۰/۰۰۷۴۶۰	۰/۸۶	۳	
۰/۰۰۰۵۰۷۱	۰/۰۲۵۳۱۰	۰/۰۱۲۶۷۰	۰/۰۳۳۱۴۰	۲/۱۱	۱	۳
-	۰/۰۰۴۳۲۴	۰/۰۰۴۵۵۱	۰/۰۰۸۷۱۱	۱/۳۱	۲	

-	-	۰/۰۰۵۶۲۹	۰/۰۰۷۶۷۵	۰/۸۷	۳	
۰/۰۰۰۱۲۷۰	۰/۰۰۹۵۰۶	۰/۰	۰/۰۱۲۷۴۰	۲/۵۲	۱	Ref
-	۰/۰۰۱۳۸۵	۰/۰	۰/۰۰۳۴۱۳	۱/۵۶	۲	
-	-	۰/۰	۰/۰۰۱۳۵۸	۱/۰۰	۳	

$$\chi_1 = 0.7737, \chi_2 = 0.2195, \chi_3 = 0.007.$$

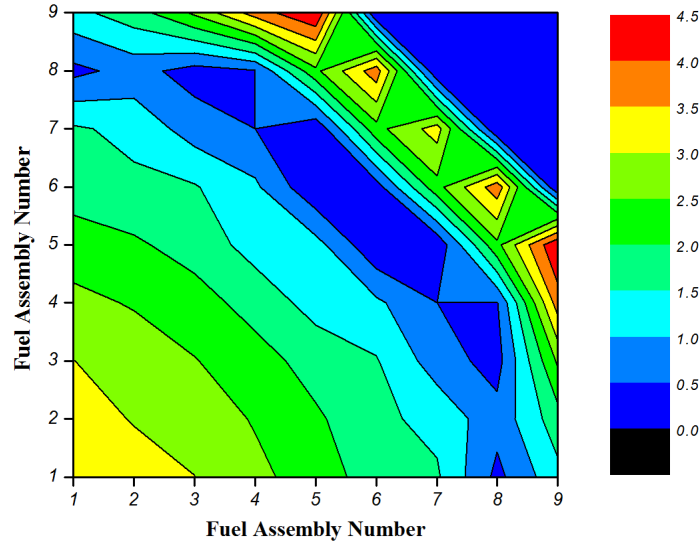
نمونه محاسباتی مذکور توسط روش نودال بسط شار جریان متوسط مرتبه‌های صفر تا دو حل گردید که نتایج عددی حاصل شده برای مش‌بندی‌های مختلف در جدول شماره ۴ آورده شده است. جهت راستی‌آزمایی نیز، نتایج عددی کد محاسباتی معتبر CITATION در مش‌بندی‌های ریز با ابعاد حدود ۲/۳ در ۲/۳ سانتیمتر مربع به عنوان مرجع انتخاب گردیده است. ضریب تکثیر مؤثر مرجع نیز ۰/۸۵۹۲۵ بوده و شرط مرزی خارجی قلب، شار صفر می‌باشد.

جدول شماره ۴: نتایج حاصل از کد محاسباتی ACNEC

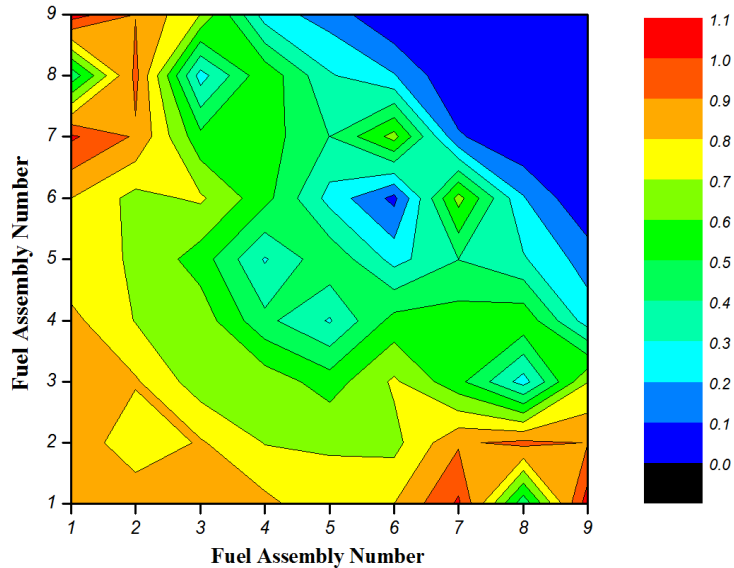
ابعاد نودها (cm ²)	مرتبه حل	درصد خطای نسبی K _{eff}	حداکثر درصد خطای نسبی توان	متوسط درصد خطای نسبی توان
۷/۹ × ۷/۹	۰	۰/۰۰۷	-۰/۵۹	۰/۳۳
۱۱/۸ × ۱۱/۸	۰	۰/۰۲۰	-۰/۸۷	۰/۵۳
۲۳/۷ × ۲۳/۷	۰	۰/۰۹۲	۴/۵	۱/۹
۲۳/۷ × ۲۳/۷	۱	۰/۰۲۶	-۱/۰۵	۰/۵۶
۲۳/۷ × ۲۳/۷	۲	۰/۰۱۱	-۰/۶۰	۰/۳۶

نتایج جدول شماره ۴ نشان دهنده کاهش محسوس خطاهای عددی نسبت به مرجع در کوچک‌تر کردن المان‌ها و یا افزایش مرتبه حل (درجه چند جمله‌ای بسط شار) است. اما در این نمونه، نتایج حل مرتبه صفر با مش‌بندی بزرگ با

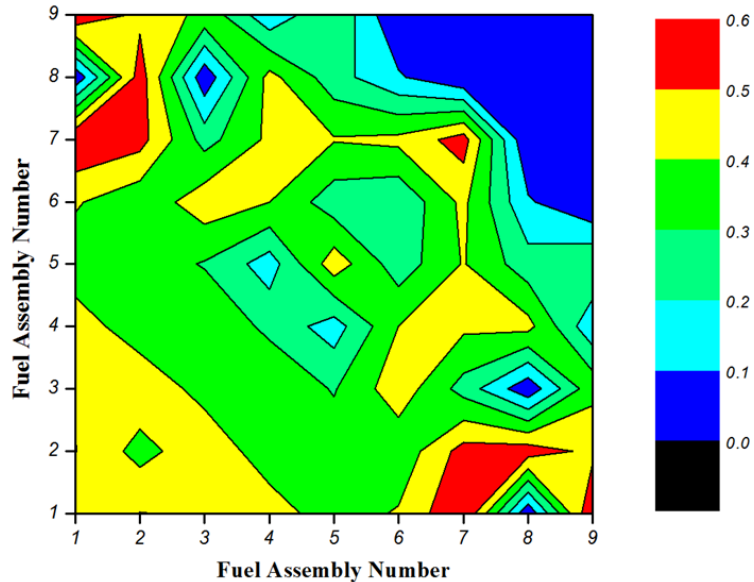
ابعاد یک مجتمع سوخت نیز قابل قبول می‌باشد. توزیع قدر مطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت نیز نسبت به مرجع، در شکل‌های ۸ تا ۱۰، به ترتیب، برای حل مرتبه‌های صفر تا دو روش جریان متوسط نشان داده شده است. کاهش خطای توان برای سوخت‌های کناری قلب با بالا بردن مرتبه حل، در شکل‌های مذکور مشاهده می‌شود که در حقیقت، بیشترین خطای توان نیز به علت وجود تغییرات زیاد شار بین سوخت و بازتابنده، در همین نواحی بوده است.



شکل ۸: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور ELSY-like-2D (مرتبه ۰)



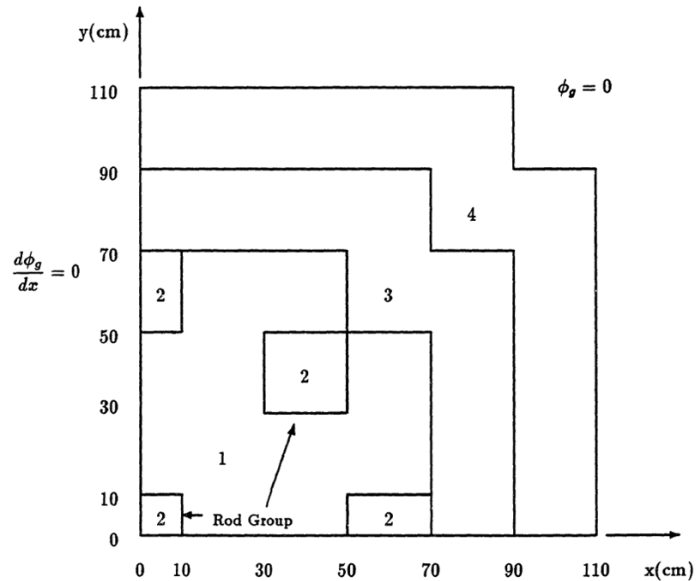
شکل ۹: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور ELSY-like-2D (مرتب‌بده ۱)



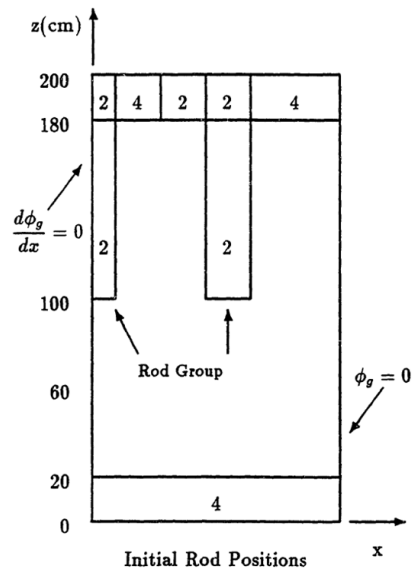
شکل ۱۰: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور ELSY-like-2D (مرتبۀ ۲)

۱۰-۳- نمونه محاسباتی سه بعدی قلب راکتور LMW-LWR

مثال بعدی، حالت استاتیکی نمونه محاسباتی LMW (Langenbuch-Maurer-Warner) [۴] است. در حقیقت، 3D LMW-LWR، یک نمونه دو گروهی و سه بعدی از مدل ساده شده یک قلب راکتور آب سبک است که شامل دو نوع مجتمع سوخت مربعی با پهنای ۲۰ سانتیمتر می‌باشد. قلب راکتور در جهت محوری و شعاعی با بازتابنده (آب) به ضخامت ۲۰ سانتیمتر پوشانیده شده و ارتفاع مؤثر قلب راکتور نیز ۱۶۰ سانتیمتر می‌باشد. هندسه قلب در جهت‌های شعاعی و محوری، به ترتیب، در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نشان داده شده‌اند. همان‌طور که در شکل ۱۲ دیده می‌شود، گروهی از میله‌های کنترل به صورت جزئی در جهت محوری، داخل نیمی از قلب راکتور شده‌اند که وجود این میله‌های کنترل در قلب، باعث مشکل‌تر شدن حل دقیق با مش‌های بزرگ می‌شود. جدول شماره ۵، سطح مقطع‌های دو گروهی این مسئله را نشان می‌دهد.



شکل ۱۱: آرایش هندسی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور LMW LWR-3D در جهت شعاعی



شکل ۱۲: آرایش هندسی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور LMW LWR-3D در جهت محوری

جدول شماره ۵: سطوح مقاطع دو گروهی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور LMW LWR-3D

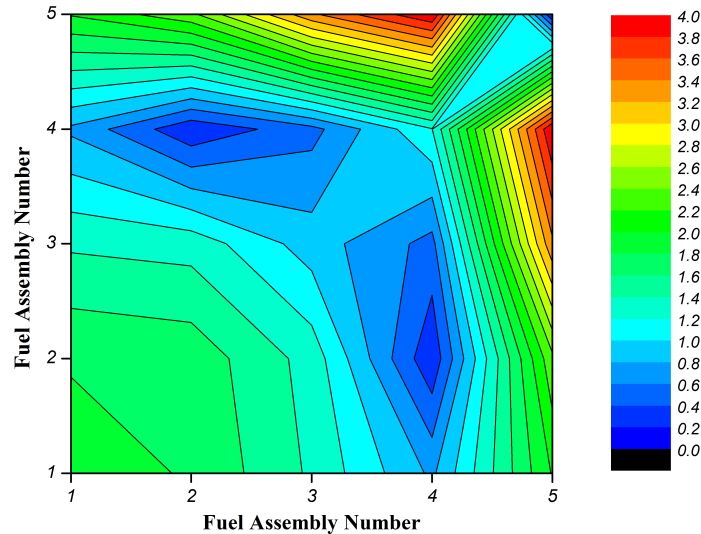
$\Sigma_{s1 \rightarrow 2} (\text{cm}^{-1})$	$v\Sigma_{fg} (\text{cm}^{-1})$	$\Sigma_{agg} (\text{cm}^{-1})$	$D_g (\text{cm})$	گروه انرژی (g)	ناحیه
۰/۰۱۷۵۵۵۵	۰/۰۰۶۴۷۷۶۹۱	۰/۰۱۰۴۰۲۰۶	۱/۴۲۳۹۱۳	۱	۱
-	۰/۱۱۲۷۳۲۸	۰/۰۸۷۶۶۲۱۷	۰/۳۵۶۳۰۶	۲	
۰/۰۱۷۵۵۵۵	۰/۰۰۶۴۷۷۶۹۱	۰/۰۱۰۹۵۲۰۶	۱/۴۲۳۹۱۳	۱	۲
-	۰/۱۱۲۷۳۲۸	۰/۰۹۱۴۶۲۱۷	۰/۳۵۶۳۰۶	۲	
۰/۰۱۷۱۷۷۶۸	۰/۰۰۷۵۰۳۲۸۴	۰/۰۱۰۹۹۲۶۳	۱/۴۲۵۶۱۱	۱	۳
-	۰/۱۳۷۸۰۰۴	۰/۰۹۹۲۵۶۳۴	۰/۳۵۰۵۷۴	۲	
۰/۰۲۷۵۹۶۹۳	۰/۰	۱/۰۰۲۶۶۰۵۷۳	۱/۶۳۴۲۲۷	۱	۴
-	۰/۰	۰/۰۴۹۳۶۳۵۱	۰/۲۶۴۰۰۲	۲	

این نمونه سه بعدی، توسط کد محاسباتی نودال بسط شار با استفاده از حل مرتبه‌های صفر تا دو، برای دو نوع مش‌بندی حل گردید که نتایج در جدول شماره ۶ آمده‌اند. جهت راستی‌آزمایی نیز، نتایج کد محاسباتی نودال تحلیلی QUANDRY [۴]، به عنوان مرجع انتخاب شده که ضریب تکثیر مؤثر آن برابر $0/99966$ می‌باشد. نتایج جدول شماره ۶، نشان می‌دهند که هر چقدر ابعاد مش‌ها ریزتر و یا مرتبه حل بالاتر رود، دقت محاسبات افزایش می‌یابد. در اینجا نیز، میزان خطای محاسبات نودال بسط شار مرتبه صفر در مقایسه با مرجع در مش‌بندی بزرگ با ابعاد یک مجتمع سوخت قابل قبول است.

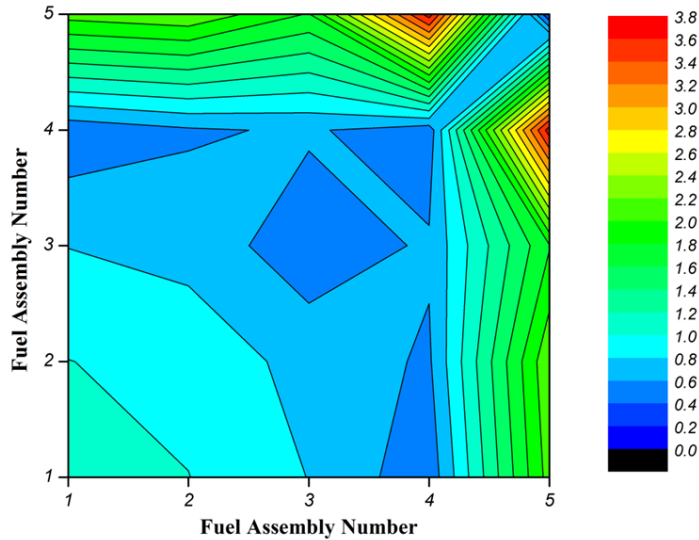
جدول شماره ۶: نتایج حاصل از کد محاسباتی ACNEC

متوسط درصد خطای نسبی توان	حداکثر درصد خطای نسبی توان	درصد خطای نسبی K_{eff}	مرتبه حل	ابعاد نودها (cm ²)
۰/۷۴	-۲/۱۲	-۰/۰۲۴	۰	۱۰×۱۰×۱۰
۰/۴۷	-۱/۳۰	-۰/۰۱۸	۱	۱۰×۱۰×۱۰
۰/۰۵	-۰/۱۴	-۰/۰۰۲	۲	۱۰×۱۰×۱۰
۱/۶۵	۴/۰۰	۰/۰۸۴	۰	۲۰×۲۰×۲۰
۱/۲۰	-۳/۷۰	-۰/۰۳۷	۱	۲۰×۲۰×۲۰
۰/۳۲	-۱/۲۶	-۰/۰۰۸	۲	۲۰×۲۰×۲۰

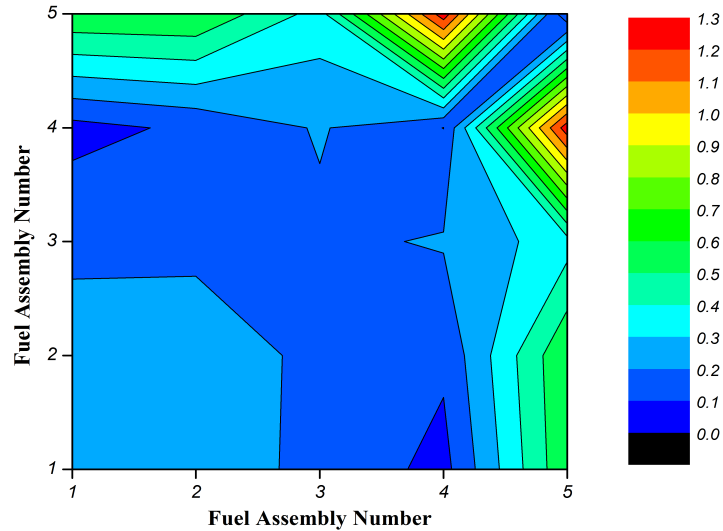
توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت، متوسط‌گیری شده در جهت محوری، حاصل از حل مرتبه‌های صفرم تا دوم روش جریان متوسط با المان‌های ۲۰ سانتیمتر در ۲۰ سانتیمتر، به ترتیب، در شکل‌های ۱۳ تا ۱۵ آورده شده‌اند. شکل‌های مذکور نشان می‌دهند که مانند نمونه‌های قبلی، بیشترین خطای توان در سوخت‌های کناری قلب راکتور رخ داده که با افزایش یکنواخت مرتبه حل (درجه چند جمله‌ای بسط شار) در مسئله، خطاها کاهش قابل ملاحظه‌ای دارند.



شکل ۱۳: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور LMW LWR-3D (مرتبه ۰)



شکل ۱۴: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور LMW LWR-3D (مرتب‌ه ۲)

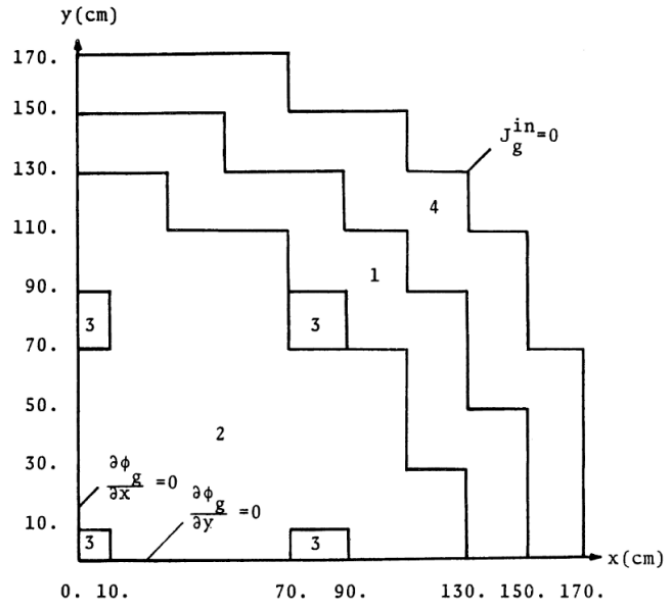


شکل ۱۵: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور LMW LWR-3D (مرتب به ۲)

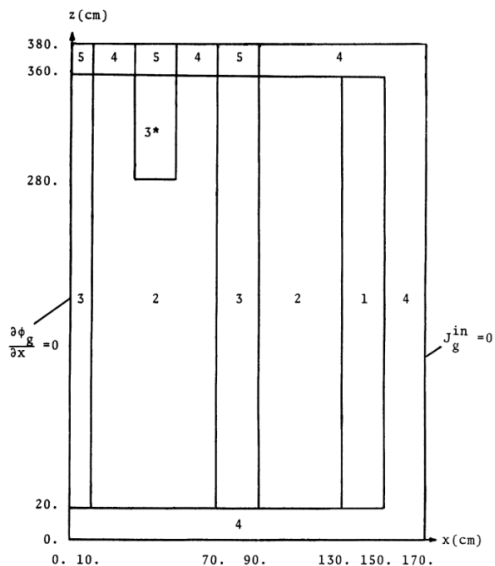
۱۰-۴- نمونه محاسباتی سه بعدی قلب راکتور IAEA

نمونه محاسباتی IAEA، یک استاندارد مهم جهت محاسبات استاتیکی روش‌های مختلف حل معادله پخش می‌باشد. این نمونه سه بعدی، قلب یک راکتوری است که شامل ۱۷۷ مجتمع سوخت مربعی با دو نوع غنای مختلف می‌باشد که پهنای هر مجتمع سوخت آن، ۲۰ سانتیمتر است و همچنین، قلب راکتور در جهت‌های شعاعی و محوری با ۲۰ سانتیمتر آب (بازتابنده) پوشانیده شده و ارتفاع مؤثر قلب ۳۳۰ سانتیمتر می‌باشد. ۹ عدد میله کنترل نیز، در تعدادی از مجتمع‌های سوخت موجود در قلب وارد شده است. در شکل سه بعدی این مسأله و در تقارن یک چهارم، چهار عدد میله کنترل (ماده شماره سه)، به صورت جزئی و کلی در جهت محوری داخل قلب راکتور شده‌اند. وجود میله‌های کنترل به عنوان جاذب‌های قوی نوترون و همچنین آب خالص به عنوان بازتابنده، باعث ایجاد تغییرات زیاد شار در ناحیه‌های مختلف و در نتیجه، پیچیدگی حل دقیق مسأله می‌گردد. هندسه قلب راکتور در جهت‌های شعاعی و

محوری، به ترتیب در شکل‌های ۱۶ و ۱۷ نشان داده شده‌اند. سطح مقطع‌های مواد بکار گرفته شده نیز، در جدول شماره ۷ آمده است. [۴]



شکل ۱۶: آرایش هندسی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور IAEA-3D در جهت شعاعی



شکل ۱۷: آرایش هندسی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور IAEA-3D در جهت محوری

جدول شماره ۷: سطوح مقاطع دو گروهی مجتمع‌های سوخت قلب راکتور IAEA-3D

$\Sigma_{s1 \rightarrow 2} (\text{cm}^{-1})$	$v\Sigma_{fg} (\text{cm}^{-1})$	$\Sigma_{ag} (\text{cm}^{-1})$	$D_g (\text{cm})$	گروه انرژی (g)	ناحیه
۰/۰۲	۰	۰/۰۱	۱/۵	۱	۱
-	۰/۱۳۵	۰/۰۸	۰/۴	۲	
۰/۰۲	۰	۰/۰۱	۱/۵	۱	۲
-	۰/۱۳۵	۰/۰۸۵	۰/۴	۲	
۰/۰۲	۰	۰/۰۱	۱/۵	۱	۳
-	۰/۱۳۵	۰/۱۳	۰/۴	۲	
۰/۰۴	۰	۰	۲/۰	۱	۴
-	۰	۰/۰۱	۰/۳	۲	

۰/۰۴	۰	۰	۲/۰	۱	۵
-	۰	۰/۰۵۵	۰/۳	۲	

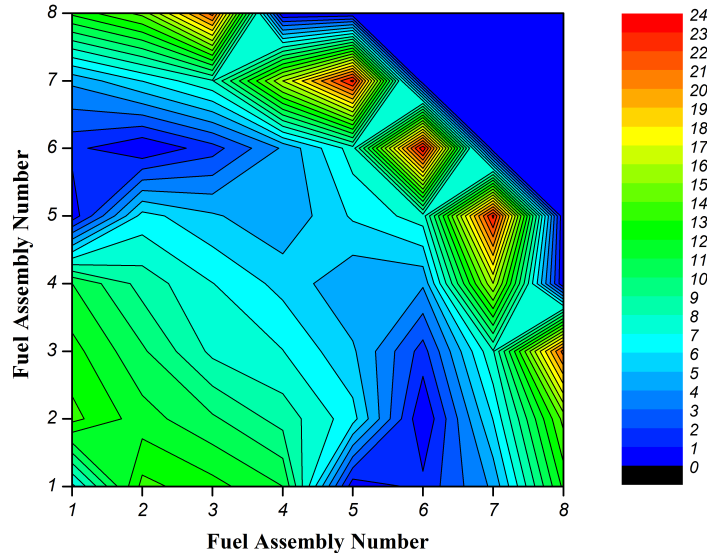
نتایج کد محاسباتی تهیه شده با استفاده از حل مرتبه‌های صفر و دو روش بسط نودال جریان متوسط در مش‌بندی بزرگ با ابعاد یک مجتمع سوخت در جدول شماره ۸ آمده است که این جدول نشان می‌دهد، حل مرتبه دوم روش بسط نودال برای مش‌بندی بزرگ، دارای دقت بالا و کافی است. در این مسأله، نتایج حاصل از کد محاسباتی IQSBOX [۴] که از روش بسط نودال جریان متوسط مرتبه سوم بهره می‌جوید، به عنوان مرجع راستی‌آزمایی انتخاب گردیده است. ضریب تکثیر مؤثر مرجع نیز، ۱/۰۲۹۰۴ می‌باشد.

جدول شماره ۸: نتایج حاصل از کد محاسباتی ACNEC

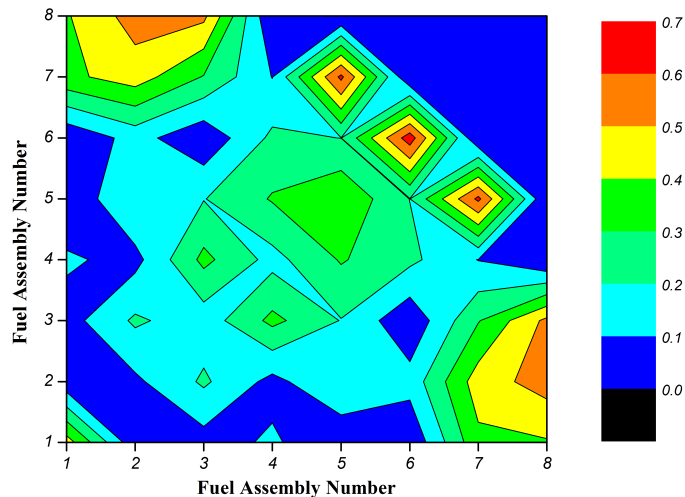
متوسط درصد خطای نسبی توان	حداکثر درصد خطای نسبی توان	درصد خطای نسبی K_{eff}	مرتبه حل	ابعاد نودها (cm ³)
۸/۹	-۲۳/۵	-۰/۰۹۰	۰	۲۰×۲۰×۲۰
۰/۲۵	۰/۶۵	-۰/۰۰۱	۲	۲۰×۲۰×۲۰

در شکل‌های ۱۸ و ۱۹، به ترتیب، توزیع قدر مطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور IAEA-3D، متوسط‌گیری شده در جهت محوری، با استفاده از حل مرتبه صفرم و دوم روش جریان متوسط با مش‌بندی بزرگ ۲۰ سانتیمتر در ۲۰ سانتیمتر نمایش داده شده است. شکل ۱۸، بیشترین خطای توان نسبت به مرجع را در مجتمع‌های سوخت خارجی (پیرامونی) نشان می‌دهد که این خطای بالا به علت وجود تغییرات زیاد شار مابین

مجتمع‌های سوخت و بازتابنده است (مانند نمونه‌های قبلی). همچنین شکل ۱۹، کاهش قابل ملاحظه درصد خطای توان را به علت افزایش مرتبه حل (درجه بسط شار) در کل قلب، مخصوصاً مجتمع‌های سوخت پیرامونی نشان می‌دهد که این خود بدین علت است که بسط چند جمله‌ای درجه چهار بهتر می‌تواند توزیع شار در المان‌های بزرگ را مدل کند. [۱۶]



شکل ۱۸: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور IAEA-3D (مرتبۀ ۰)



شکل ۱۹: توزیع قدرمطلق درصد خطای نسبی توان مجتمع‌های سوخت راکتور IAEA-3D (مرتبه ۲)

۱۰-۵- تک ناحیه غیر تکثیرپذیر دارای چشمه ثابت تک انرژی

در این نمونه، یک محیط تک ناحیه‌ای به ضخامت ۱۰ سانتیمتر داریم که چشمه ثابتی به قدرت $1 \frac{\text{neutron}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec}}$ در آن به صورت یکنواخت توزیع شده است. سطوح مقاطع این محیط در جدول شماره ۹ آمده است. شرایط مرزی برای این نمونه نیز، شرط مرزی بازتابنده کامل در سمت چپ و در سمت راست، شرط مرزی برهنه (خلاء) می‌باشد.

جدول شماره ۹: سطوح مقاطع تک ناحیه‌ای

$\Sigma_a \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	D (cm)	ناحیه
۱/۲۲۷۳۵	۰/۰۸۱	۱

اما برای تیغه‌ای به ضخامت a ، جواب تحلیلی شار برای معادله پخش به صورت رابطه (۱-۱۰) می‌باشد.

$$\phi(x) = \frac{S}{\Sigma_a} \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{x}{L}\right)}{\cosh\left(\frac{a}{L}\right) + \frac{2D \sinh\left(\frac{a}{L}\right)}{L}} \right) \quad (1-10)$$

در رابطه (۱-۱۰)، S برابر قدرت چشمه و L طول پخش می‌باشد که از رابطه (۲-۱۰) بدست می‌آید.

$$L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}} \quad (2-10)$$

به منظور مقایسه نتایج کد محاسباتی مذکور با نتایج تحلیلی، از رابطه (۱۰-۱) در بازه مش‌های ۱ سانتیمتری (مجموعاً ۱۰ مش یک بعدی) انتگرال گرفته و مقدار متوسط شار را در این المان‌ها به عنوان مرجع راستی‌آزمایی انتخاب می‌کنیم. نتایج حاصل شده از محاسبات نودال بسط شار جریان متوسط مرتبه‌های صفر و دو همراه با مقادیر شار تحلیلی برای المان‌های ۱ سانتیمتری، در جدول شماره ۱۰ آورده شده‌اند. جدول شماره ۱۰ نشان می‌دهد که نتایج، دقت بسیار بالایی نسبت به حل تحلیلی دارند که این خود بیانگر دقت این روش در حل نمونه‌هایی با وجود چشمه ثابت و محیط‌های غیر شکافت‌پذیر است.

جدول شماره ۱۰: مقادیر شار حاصل از حل تحلیلی و بسط نودال جریان متوسط

شار بسط نودال مرتبه دو	شار بسط نودال مرتبه صفر	شار تحلیلی	شماره المان (از چپ به راست)
۱۱/۱۷۴	۱۱/۱۸۱	۱۱/۱۷۴	۱
۱۱/۰۹۷	۱۱/۱۰۳	۱۱/۰۹۷	۲
۱۰/۹۳۶	۱۰/۹۴۲	۱۰/۹۳۶	۳
۱۰/۶۸۲	۱۰/۶۸۸	۱۰/۶۸۲	۴
۱۰/۳۱۷	۱۰/۳۲۴	۱۰/۳۱۷	۵
۹/۸۱۸	۹/۸۲۴	۹/۸۱۸	۶
۹/۱۵۱	۹/۱۵۶	۹/۱۵۱	۷

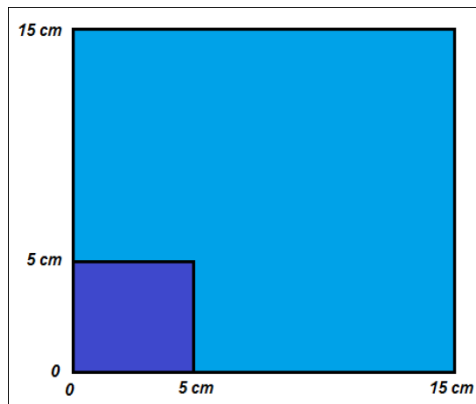
۸/۲۷۲	۸/۲۷۵	۸/۲۷۲	۸
۷/۱۲۳	۷/۱۲۳	۷/۱۲۳	۹
۵/۶۲۷	۵/۶۲۳	۵/۶۲۷	۱۰

۱۰-۶- نمونه محاسباتی دو بعدی با وجود چشمه ثابت

این نمونه محاسباتی، یک مربع به ابعاد ۱۵ سانتیمتر در ۱۵ سانتیمتر می‌باشد که از یک ماده با سطح مقطع‌های یک گروهی ذکر شده در جدول شماره ۱۱ تشکیل شده است و در این مربع، یک چشمه ثابت با قدرت $\frac{1 \text{ neutron}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec}}$ از مرکز قلب تا فاصله ۵ سانتیمتری مطابق با شکل ۲۰ به طور یکنواخت پخش شده است. شرایط مرزی در این مسأله، شرط بازتابنده در سطوح چپ و پایین و برای بقیه سطوح، شرط مرزی شار صفر می‌باشد.

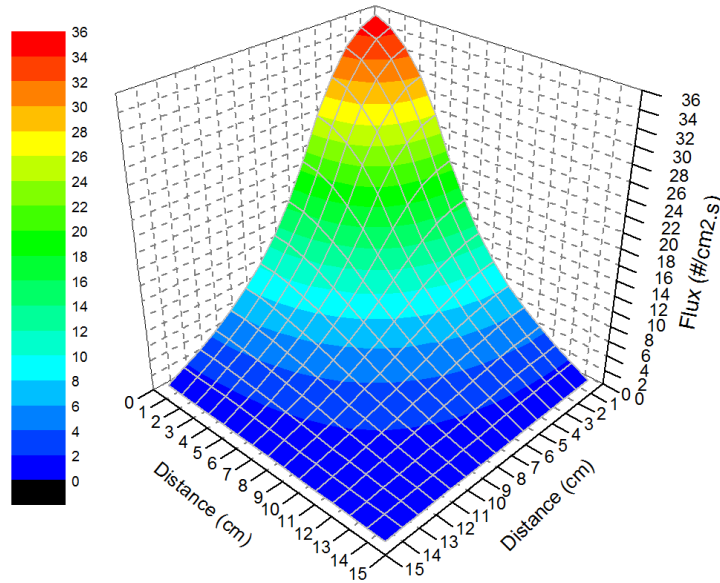
جدول شماره ۱۱: سطوح مقاطع تک ناحیه‌ای

Σ_a (cm ⁻¹)	D (cm)	ناحیه
۰/۰۱	۰/۳۷	۱



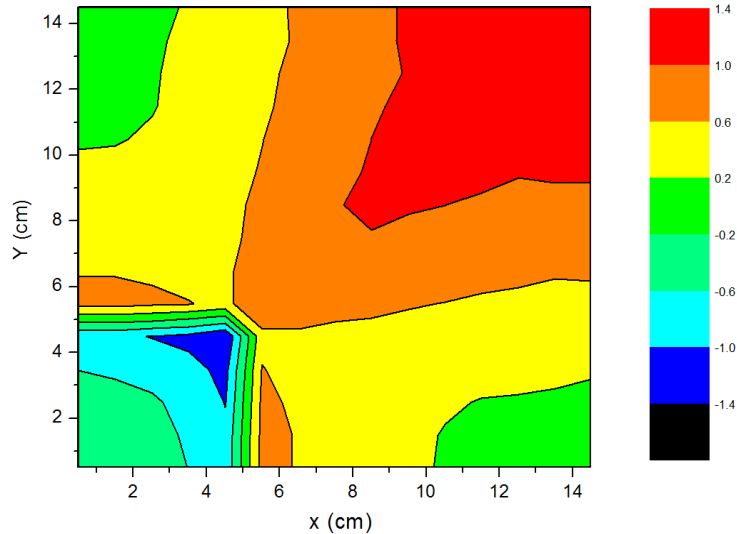
شکل ۲۰: هندسه نمونه محاسباتی دو بعدی با وجود چشمه ثابت نوترونی

برای حل این مسأله، از کد محاسباتی تهیه شده با مرتبه حل صفر استفاده گردید که ابعاد هر المان در این نمونه، یک سانتیمتر انتخاب شده است. شکل ۲۱، توزیع شار نوترونی حاصل شده را نشان می‌دهد.



شکل ۲۱: توزیع شار نوترون حاصل از حل مرتبه صفر روش بسط نودال جریان متوسط

برای راستی‌آزمایی نتایج کد نودال نیز، نتایج کد محاسباتی معتبر CITATION با مش‌های ریز ۱ سانتیمتری به عنوان مرجع راستی‌آزمایی انتخاب گردید که توزیع درصد خطای نسبی شار حاصل از کد نودال نسبت به مرجع در شکل ۲۲ آمده است. از شکل ۲۲ پیداست که بیشترین خطای محاسبات در مرز بین دو ناحیه با و بدون چشمه ثابت و مرز خارجی رخ داده است که این خطاها به علت وجود تغییرات زیاد شار الحاقی در این نواحی می‌باشد. البته، شکل ۲۲ نشان می‌دهد که خطای محاسبات در حد قابل قبول است.



شکل ۲۲: توزیع درصد خطای نسبی شار نودال نسبت به مرجع

۱۰-۷- نتایج محاسبات الحاقی برای یک نمونه محاسباتی دو بعدی

به منظور ارزیابی نتایج محاسبات الحاقی حاصل از روش بسط نودال، فرض می‌کنیم یک مربع با ابعاد ۲۰ سانتیمتر در ۲۰ سانتیمتر داریم که شامل یک ناحیه با سطوح مقاطع یک گروهی جدول شماره ۱۲ است. شرایط مرزی هر چهار طرف در این مسأله، شار صفر بوده و ابعاد المان‌های انتخابی نیز ۲ سانتیمتر در ۲ سانتیمتر می‌باشد.

جدول شماره ۱۲: سطوح مقاطع تک ناحیه‌ای

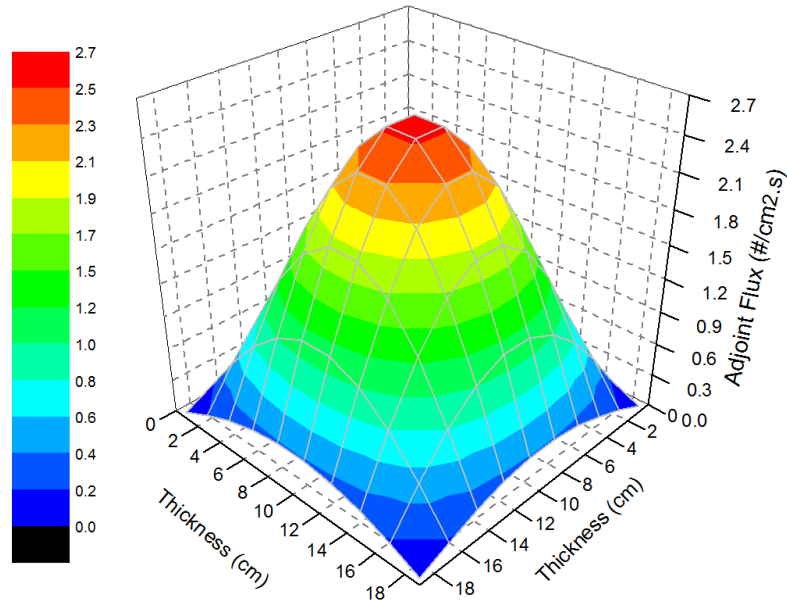
$\nu\Sigma_f$ (cm ⁻¹)	Σ_a (cm ⁻¹)	D (cm)	ناحیه
۰/۰۳	۰/۰۱	۰/۳۷	۱

اکنون، می‌دانیم که مقادیر ضریب تکثیر مؤثر و شار حاصل از حل مستقیم و الحاقی پخش نوترون در مسائل یک گروهی، برابر هستند. پس برای این مسأله، نتایج محاسبات الحاقی بسط نودال جریان متوسط را با نتایج حل مستقیم آن مقایسه می‌کنیم. جدول شماره ۱۳، نتایج مذکور را نشان می‌دهد که مقادیر یکسان ضرایب تکثیر مؤثر حاصل از حل مستقیم و الحاقی بسط نودال مرتبه صفر، حاکی از صحت محاسبات الحاقی نودال است.

جدول شماره ۱۳: مقدار ضریب تکثیر حاصل از حل مستقیم و الحاقی بسط نودال برای نمونه یک گروهی

ضریب تکثیر مؤثر (حاصل از حل الحاقی)	ضریب تکثیر مؤثر (حاصل از حل مستقیم)
۱/۰۵۵۹۸۷۴	۱/۰۵۵۹۸۷۴

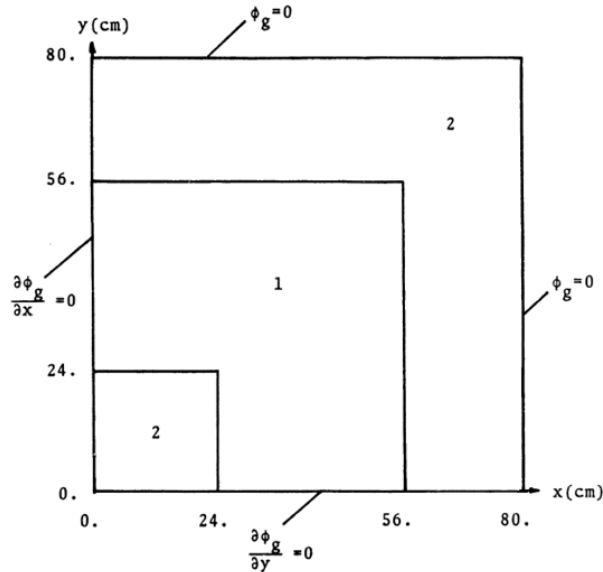
با توجه به نتایج بدست آمده، مقادیر شار حل مستقیم و الحاقی بسط نودال با هم برابر بوده که شکل ۲۳، توزیع شار الحاقی در این نمونه محاسباتی را نشان می‌دهد.



شکل ۲۳: توزیع شار الحاقی حاصل شده از روش بسط نودال جریان متوسط

۱۰-۸- نتایج محاسبات الحاقی برای راکتور TWIGL SEED-BLANKET-2D

در این نمونه محاسباتی، یک مدل دو بعدی و دو گروهی از یک نوع راکتور بدون بازتابنده داریم که قلب این راکتور دارای تقارن یک هشتم است. هندسه قلب، در شکل ۲۴ و مشخصات مواد استفاده شده، در جدول شماره ۱۴ آمده‌اند [۴].



شکل ۲۴: هندسه قلب راکتور TWIGL SEED-BLANKET-2D در تقارن یک چهارم

جدول شماره ۱۴: مشخصات مواد در قلب راکتور TWIGL SEED-BLANKET-2D

$\Sigma_{s1 \rightarrow 2} (\text{cm}^{-1})$	$\nu \Sigma_{fg} (\text{cm}^{-1})$	$\Sigma_{ag} (\text{cm}^{-1})$	$D_g (\text{cm})$	گروه انرژی (g)	ناحیه
۰/۰۱	۰/۰۰۷	۰/۰۱	۱/۴۳	۱	۱
-	۰/۲۰	۰/۱۵	۰/۴۰	۲	
۰/۰۱	۰/۰۰۳	۰/۰۰۸	۱/۳۰	۱	۲
-	۰/۰۶	۰/۰۵	۰/۵۰	۲	

این نمونه دو بعدی، توسط کد محاسباتی بسط نودال با استفاده از مرتبه‌های حل صفر و دو، برای مش‌بندی بزرگ ۸ سانتیمتر در ۸ سانتیمتر حل گردید که نتایج محاسبات الحاقی نوترون در جدول شماره ۱۵ آمده‌اند. جهت راستی‌آزمایی

نیز، نتایج کد محاسباتی معتبر CITATION با مش‌بندی ریز ۱ سانتیمتر در ۱ سانتیمتر به عنوان مرجع انتخاب شده که ضریب تکثیر مؤثر آن برابر ۰/۹۱۳۱۸ می‌باشد. نتایج جدول شماره ۱۵ نشان می‌دهد که میزان خطای محاسبات بسط نودال الحاقی مرتبه صفر در مقایسه با مرجع در مش‌بندی بزرگ قابل قبول است. همچنین، افزایش دقت مقادیر شار الحاقی و ضریب تکثیر مؤثر حاصل شده از کد نودال به علت افزایش مرتبه حل، در جدول شماره ۱۵ مشاهده می‌گردد.

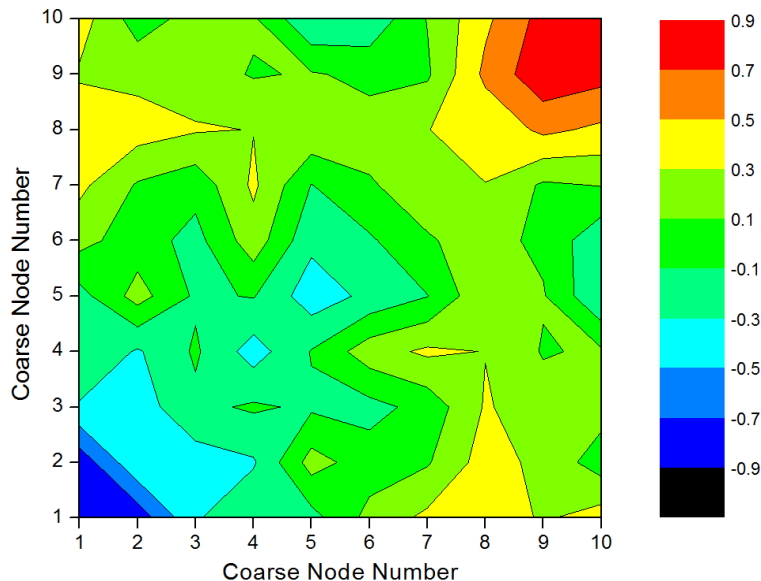
جدول شماره ۱۵: نتایج حاصل از کد محاسباتی ACNEC

متوسط درصد خطای نسبی شار الحاقی	حداکثر درصد خطای نسبی شار الحاقی	گروه انرژی	درصد خطای نسبی K_{eff}	مرتبه حل
۰/۲۶	۰/۸۵	۱	-۰/۰۴۶	۰

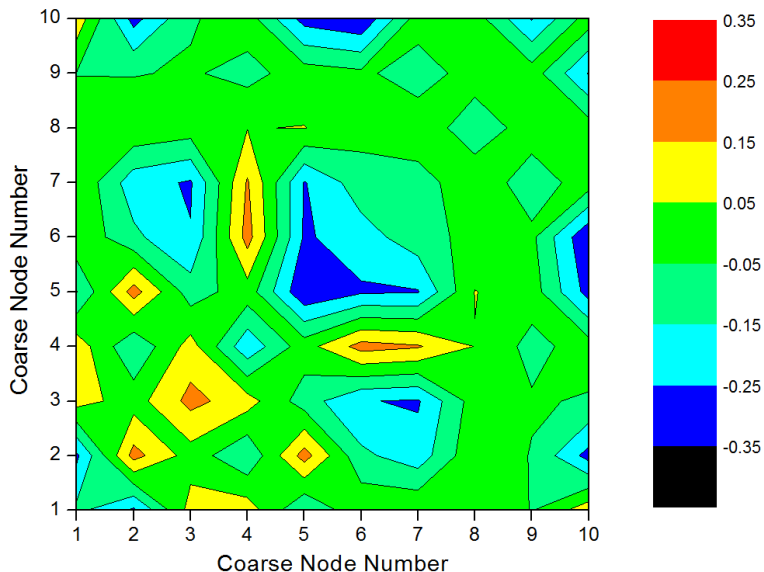
۰/۳۸	۱/۶۷	۲		
۰/۱۱	-۰/۳۴	۱	۰/۰۰۲	۲
۰/۱۳	۰/۴۶	۲		

شکل‌های ۲۵ و ۲۶، توزیع درصد خطای نسبی شار الحاقی گروه اول انرژی در المان‌ها را نسبت به مرجع، به ترتیب، برای حل مرتبه‌های صفر و دو نشان می‌دهند. همچنین، شکل‌های ۲۷ و ۲۸، توزیع مقادیر مذکور را به ترتیب فوق، برای گروه دوم انرژی نمایش می‌دهند. کاهش خطای شار الحاقی نسبت به مرجع با افزایش مرتبه حل، از شکل‌های مذکور پیداست. همچنین، این شکل‌ها نشان می‌دهند که بیشترین مقادیر خطای شار الحاقی نسبت به مرجع، در

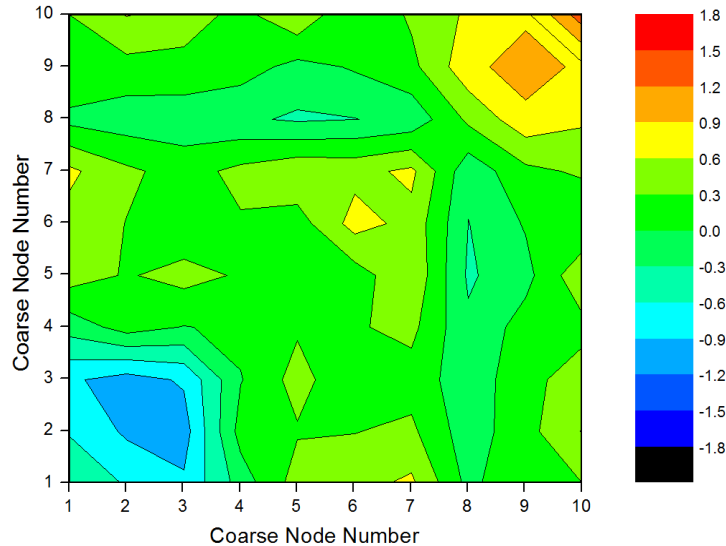
نواحی رخ داده که تغییرات شار الحاقی زیاد است، مانند مرز نواحی مجاور و خارجی هندسه مورد نظر. اما به هر حال، خطای محاسبات در حد قابل قبول می‌باشد.



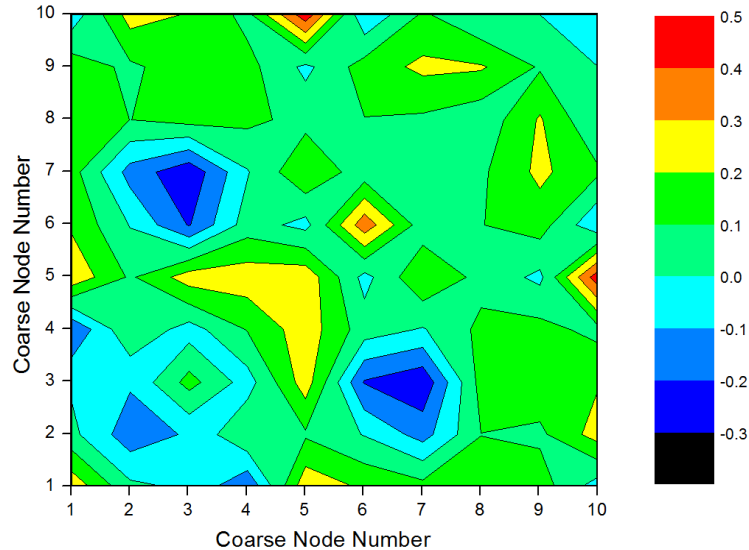
شکل ۲۵: توزیع درصد خطای نسبی شار الحاقی گروه اول انرژی نسبت به مرجع (مرتبۀ ۰)



شکل ۲۶: توزیع درصد خطای نسبی شار الحاقی گروه اول انرژی نسبت به مرجع (مرتب ۲)



شکل ۲۷: توزیع درصد خطای نسبی شار الحاقی گروه دوم انرژی نسبت به مرجع (مرتبۀ ۰)



شکل ۲۸: توزیع درصد خطای نسبی شار الحاقی گروه دوم انرژی نسبت به مرجع (مرتب ۲)

۱۱- نتیجه گیری

در این گزارش، روش بسط نودال جریان متوسط برای حل معادلات مستقیم و الحاقی پخش نوترون با وجود چشمه ثابت یا شکافت‌پذیر نوترونی در هندسه مستطیلی سه بعدی ارائه و مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا تاریخچه و مقدمه‌ای از روش‌های حل نودال و سپس فرمول‌بندی مرتبه‌های حل صفرم و دوم روش بسط نودال جریان متوسط و الگوریتم حل بکار گرفته شده آن، ارائه گردیدند. در آخر نیز، به منظور راستی‌آزمایی و بررسی دقت کد محاسباتی تهیه شده، نتایج آن برای تعدادی نمونه محاسباتی ارائه و با نتایج مراجع معتبر مقایسه شدند. نتایج، حاکی از دقت بالای روش حل بسط نودال در تخمین ضریب تکثیر مؤثر و توزیع مکانی شار مستقیم و الحاقی نوترون‌ها است. همچنین، نتایج نشان می‌دهند که افزایش درجه بسط شار یا به عبارتی بالا بردن مرتبه حل در کلیه المان‌ها و/یا کوچک کردن ابعاد مش‌ها در هندسه مسئله، باعث کاهش خطای محاسبات و افزایش دقت نتایج می‌گردد. البته، عامل عمده ایجاد خطای

محاسبات، تغییرات زیاد شار بین المان‌های مجاور مانند مجتمع‌های سوخت کناری قلب هم‌جوار با بازتابنده است. لذا، کد محاسباتی بسط نودال جریان متوسط (علی‌الخصوص، با حل مرتبه‌های بالا) در هندسه مستطیلی، قابلیت آن را دارد که محاسبات را با دقت قابل قبول در مش‌های بزرگ در حد ابعاد یک مجتمع سوخت انجام دهد که این مزیت خود باعث کاهش نسبی هزینه محاسباتی و زمان اجرا در مقایسه با دیگر روش‌ها مانند اختلاف محدود می‌گردد [۱۶-۱۵].

۱۲- مراجع

1. C. L. Hoxie, "Application of Nodal Equivalence Theory To the Neutronic Analysis of PWRS." vol. PhD: MIT, 1982.
2. J. F. P. M. Castrillon, "Reconstruction of the Three-Dimensional Flux Shapes from Nodal Solutions," in Department of Nuclear Engineering. vol. PhD: MIT, 1984.
3. P. J. Robert, A Semi-Experimental Nodal Synthesis Method For The On-Line Reconstruction Of Three-Dimensional Neutron Flux-Shapes And Reactivity: Massachusetts Institute of Technology, 1991.
4. K. S. Smith, An Analytic Nodal Method For Solving The Two-Group, Multidimensional, Static and Transient Neutron Diffusion Equations: Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements for The Degrees Of Nuclear Engineer and Master of Science at The Massachusetts Institute of Technology, 1979.
5. N. Guessous and M. Akhmouch, "Higher order analytical nodal methods in response-matrix formulation for the multigroup neutron diffusion equations," Annals of Nuclear Energy, vol. 29, pp. 1765-1778, 2002.

6. A. Hebert, "Asimplified presentation of the multigroup analytic nodal method in 2-D Cartesian geometry," *Annals of Nuclear Energy*, vol. 35, pp. 2142-2149, 2008.
7. J. M. Putney, "Nodal Methods For Solving The Diffusion Equation For Fast Reactor Analysis," in *Mechanical Engineering*. vol. Doctor of Philosophy: University of London, 1984.
8. B. Xia and Z. Xie, "Flux expansion nodal method for solving multigroup neutron diffusion equations in hexagonal-z geometry," *Annals of Nuclear Energy*, vol. 33, pp. 370-376, 2006.
9. V. G. zimin and D. M. Baturin, "Polynomial nodal method for solving neutron diffusion equations in hexagonal-z geometry," *Annals of Nuclear Energy*, vol. 29, pp. 1105-1117 , ۲۰۰۱.
10. K. Azekura and K. Kurihara, "High-Order Finite Difference Nodal Method For Neutron Diffusion Equation," *Nuclear Science and Technology*, vol. 28, pp. 285-292, 1991.
11. T. Y. Han, H. G. Joo, H. C. Lee, and C. H. Keem, "Multi-group unified nodal method with two-group coarse-mesh finite difference formulation," *Annals of Nuclear Energy*, vol. 35, pp. 1975-1985, 2008.

12. D. S. Kim and N. Z. Cho, "The Analytic Function Expansion Nodal (AFEN) Method with Half-Interface Averaged Fluxes in Mixed Geometry Nodes for Analysis of Pebble Bed Modular Reactor (PBMR) Cores," Nuclear Science and Technology, vol. 40, pp. 291-297, 2003.
13. H. Finnemann, F. Bennewitz, and M. R. Wagner, "Interface Current Techniques for Multidimensional Reactor Calculations," Atomkernenergie, vol. 30, pp. 123-12.۱۹۷۷.
14. Han, S., Dulla, S., Ravetto, P., 2009. Computational Methods for Multidimensional Neutron Diffusion Problems. Science and Technology of Nuclear Installations. Hindawi Publishing Corporation. ID 973605.
15. N. Poursalehi, A. Zolfaghari, A. Minucmehr, 2012. Performance comparison of zeroth order nodal expansion methods in 3D rectangular geometry. Nuclear Engineering and Design, 252, 248–266.
16. N. Poursalehi, A. Zolfaghari, A. Minucmehr, 2013. Development of a high order and multi-dimensional nodal code, ACNEC3D, for reactor core analysis, Annals of Nuclear Energy, 55, 211-224.