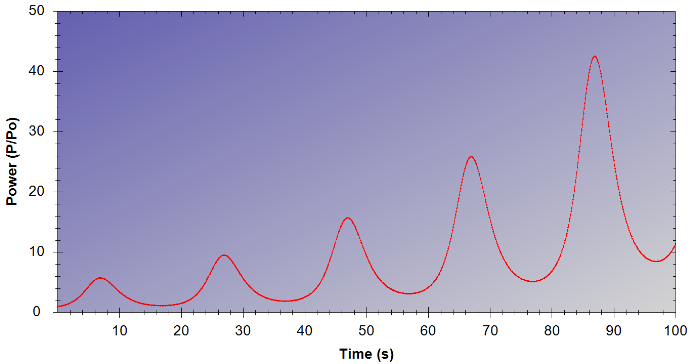
شرکت ساخت و راه‌اندازی نیروگاه‌های اتمی
مرکز محاسبات پیشرفته هسته‌ای

کد محاسباتی توان و راکتیویته راکتور برمبنای مدل سینتیک نقطه‌ای



گزارش فنی PORECO

بسته سوم - ویرایش ۰- اسفند ۱۳۹۱

ANC-TEC-DED-PK-100

فهرست مطالب

لیست شکل‌ها

لیست جدول‌ها

۱- چکیده

در این گزارش، به بررسی روش‌های مورد استفاده در بسته نرم‌افزاری سینتیک نقطه‌ای راکتور جهت حل معادلات سینتیک نقطه‌ای مستقیم و معکوس راکتور پرداخته می‌شود. هدف از حل دستگاه معادلات سینتیک نقطه‌ای مستقیم راکتور، محاسبه تغییرات قدرت (متناسب با دانسیته نوترونی) و غلظت نیاهسته‌ها در یک راکتور هسته‌ای است. همچنین، هدف از حل معادلات سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور، به دست آوردن راکتیویته مورد نیاز برای تغییرات زمانی مشخص قدرت راکتور می‌باشد.

روش گیر[1]، به عنوان یک روش چندگامی ضمنی، برای حل معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور (با گام‌های زمانی محاسباتی بسیار کوچک) ارائه می‌گردد. این روش که برای گام‌های زمانی محاسباتی بسیار کوچک (از مرتبه s ۱۰$^{-3}$-۱۰$^{-4}$) پایدار بوده و همگرا می‌شود، از پاسخ‌های بسیار مناسبی نیز برخوردار است. همچنین، در گام‌های زمانی محاسباتی نسبتاً بزرگ (از مرتبه s ۱-۰/۱)، روش طیفی[2] به عنوان یک روش با دقت بسیار بالا مورد بررسی قرار خواهد گرفت. این روش که حل دقیقی (تحلیلی) برای راکتیویته‌های ثابت می‌دهد، از فرض تغییرات پلکانی راکتیویته و ثابت بودن آن در گام‌های زمانی کوچک استفاده نموده و پاسخ‌های بسیار خوبی را به همراه دارد.

---
[1] Gear
[2] Spectral

جهت حل معادلات سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور نیز دو روش لاگرانژ[۳] و آدامز[۴] ارائه خواهند شد. روش لاگرانژ که از مشتق‌گیری بر مبنای بسط توابع لاگرانژ استفاده می‌نماید، نیازی به دانستن تاریخچه تغییرات قدرت راکتور (از ابتدا تاکنون) ندارد. با استفاده از این روش می‌توان راکتیویته راکتور را به صورت لحظه‌ای و با گام‌های زمانی نسبتاً بزرگ (از مرتبه s ۱-۰/۱) محاسبه نمود. نتایج اعتبارسنجی این روش در موارد مختلف، نشان از دقت بالای آن دارد. همچنین، روش آدامز به عنوان یک روش پیش‌بینی- اصلاح[5] یا ترکیبی از دو روش ضمنی[۶] و صریح[۷] آدامز، از همین ویژگی‌ها برخوردار بوده و تنها تفاوت آن با روش لاگرانژ، در این است که این روش برای گام‌های زمانی نسبتاً بزرگتر (از مرتبه s ۱) ناپایدار شده و پاسخ‌های مناسبی را به همراه نخواهد داشت.

---

[3] Lagrange
[4] Adams
[5] Predictor-corrector
[6] Implicit
[7] Explicit

۲- کلیدواژه

سینتیک نقطه‌ای راکتور، سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور، روش گیر، روش طیفی، روش لاگرانژ، روش پیش‌بینی-اصلاح آدامز

۳- اختصارات

عبارت	عبارت اختصاری	توضیح
Point Kinetics	PK	سینتیک نقطه‌ای
Inverse Point Kinetics	IPK	سینتیک نقطه‌ای معکوس

۴- مقدمه

به منظور تهیه یک کد جامع محاسبات دینامیکی قلب راکتور، حل معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور[۸] با استفاده از روش‌های عددی پایدار و مناسب برای هر نوع تغییرات راکتیویته سیستم، ضروری می‌باشد. همچنین، حل معادلات سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور، به منظور به دست آوردن راکتیویته مورد نیاز برای تغییرات زمانی مشخص قدرت راکتور، در مسایل مربوط به کنترل راکتورهای هسته‌ای از اهمیت به سزایی برخوردار می‌باشد. بدین ترتیب، تغییرات راکتیویته مورد نیاز جهت حصول تغییرات زمانی قدرت راکتور در گذارهایی مانند راه‌اندازی راکتور[۹] قابل محاسبه است.

[8] Point Kinetics
[9] Reactor Start-up

راکتیویته مزبور در واقع همان ارزش تجمعی[10] میله‌های کنترل راکتور می‌باشد که در فرآیندها و گذارهای مختلف راکتور وارد عمل می‌شوند.

متن حاضر شامل راهنمای تئوری بسته نرم‌افزاری سینتیک راکتور می‌باشد. این بسته نرم‌افزاری شامل دو روش گیر و طیفی برای حل معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور (به ترتیب برای گام‌های زمانی محاسباتی بسیار کوچک و نسبتاً بزرگ) و دو روش لاگرانژ و آدامز برای حل معادلات سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور می‌باشد.

[10] Integral Worth

مجموعه معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور، بسته به تعداد گروه‌های در نظر گرفته شده برای نوترون‌های تأخیری، دو تا هفت معادله دیفرانسیل هستند که از حل آن‌ها، تغییرات زمانی قدرت راکتور (دانسیته نوترونی) و دانسیته نیاهسته‌ها[۱۱] به دست خواهند آمد [۱].

روش‌های انتگرال‌گیری عددی بسیاری برای حل معادلات دیفرانسیل مشابه معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور موجود می‌باشند. از این میان می‌توان به روش رانج-کوتا[۱۲] یا روش اویلر[۱۳] و یا روش‌های تیلور از مرتبه‌های بالاتر[۱۴] اشاره نمود [۲]. هر کدام از این روش‌ها مزایا و معایب مخصوص به خود را دارند.

[11] Precursors
[12] Runge-Kutta Method
[13] Euler Method
[14] Higher-order Taylor Methods

روش‌های عددی موجود برای حل معادلات دیفرانسیل از جنبه‌های مختلفی طبقه‌بندی می‌شوند. از حیث مقادیر مورد استفاده گام‌های زمانی قبلی جهت محاسبه مقادیر مدنظر در گام زمانی فعلی، می‌توان به دو نوع روش تک‌گامی[۱۵] و چندگامی[۱۶] اشاره نمود. همچنین از نقطه‌نظر استفاده از مقادیر فعلی تابع در محاسبات مربوط به آن در گام زمانی فعلی و یا عدم استفاده از آن می‌توان به دو دسته روش‌های ضمنی و صریح اشاره نمود.

روش گیر، به عنوان یک روش چندگامی ضمنی، برای حل معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور (با گام‌های زمانی محاسباتی بسیار کوچک) ارائه می‌گردد. همچنین، برای گام‌های زمانی نسبتاً بزرگ، روش طیفی به عنوان یک روش با دقت بسیار بالا مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

[15] Single-step Methods
[16] Multi-step Methods

جهت حل معادلات سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور نیز دو روش لاگرانژ و آدامز ارائه خواهند شد. منظور از روش لاگرانژ، استفاده از مشتق‌گیری بر مبنای بسط توابع لاگرانژ می‌باشد. این در حالی است که روش آدامز به عنوان یک روش پیش‌بینی- اصلاح[۱۷] یا ترکیبی از دو روش ضمنی و صریح آدامز مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۵- دامنه گزارش

گزارش حاضر شامل تئوری سینتیک نقطه‌ای راکتور و معکوس آن در بخش ۶ و بررسی و اعتبارسنجی روش‌های گیر و طیفی برای حل معادلات سینتیک نقطه‌ای مستقیم راکتور در بخش‌های ۷ و ۸ می‌باشد. همچنین، بخش‌های ۹ و ۱۰ به

[17] Predictor-corrector

ترتیب به بررسی و اعتبارسنجی روش‌های لاگرانژ و آدامز جهت حل معادلات سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور اختصاص دارند. در نهایت، در بخش ۱۰ به نتیجه‌گیری مباحث مطرح شده پرداخته شده است.

۶- سینتیک نقطه‌ای راکتور و معکوس آن

دستگاه معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور با شش گروه نوترون‌های تأخیری به صورت زیر می‌باشد [۱]:

$$\begin{cases} \dfrac{dn(t)}{dt} = \dfrac{\rho(t)-\beta_{eff}}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i c_i(t) \\ \dfrac{dc_i(t)}{dt} = \dfrac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i c_i(t); \qquad i = 1,\ldots,6 \end{cases} \tag{۱-۶}$$

که در آن

$n(t)$ = دانسیته نوترونی (متناسب با قدرت راکتور)

$\rho(t)$ = راکتیویته وابسته به زمان

β_{eff} = کسر مؤثر نوترون‌های تأخیری

$c_i(t)$ = غلظت نیاهسته‌های گروه i ام

λ_i = ثابت واپاشی نیاهسته‌های گروه i ام

$\beta_i(t)$ = کسر نوترون‌های تأخیری در گروه i ام

Λ = زمان تولید نوترون

همچنین رابطه کلی مربوط به سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور، جهت به دست آوردن مقدار راکتیویته راکتور در هر زمان، به صورت زیر می‌باشد [۱]:

$$\rho(t)=\beta+\frac{\Lambda}{n(t)}\frac{dn(t)}{dt}-\frac{1}{n(t)}\sum_{i=1}^{6}\lambda_i\beta_i e^{-\lambda_i t}\left[\frac{n_0}{\lambda_i}+\int_0^t e^{\lambda_i t'}n(t')\,dt'\right] \tag{۲-۶}$$

همانطور که مشاهده می‌گردد، برای حل این معادله در هر لحظه، نیاز به دانستن تاریخچه قدرت راکتور (از زمان ابتدای شروع به کار تا آن لحظه) می‌باشد.

۷- روش گیر جهت حل معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور

۷-۱- معرفی روش گیر

روش گیر، به عنوان یکی از روش‌های ضمنی چندگامی، یکی از مدرن‌ترین و قابل اطمینان‌ترین روش‌ها برای حل معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور می‌باشد. قابلیت اطمینان این روش به قدری است که امروزه در کدهای دینامیکی

معتبری همچون کد DYNCO از این روش برای حل معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور استفاده می‌شود [۳]. در ادامه به بررسی جزییات این روش پرداخته شده است.

فرم ماتریسی دستگاه معادلات دیفرانسیل سینتیک نقطه‌ای را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{pmatrix} n'(t) \\ c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ c_3'(t) \\ \vdots \\ c_6'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho(t)-\beta_{eff}(t)}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1(t)}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\beta_2(t)}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\beta_3(t)}{\Lambda} & 0 & 0 & -\lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_6(t)}{\Lambda} & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n(t) \\ c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \\ \vdots \\ c_6(t) \end{pmatrix} \tag{۱-۷}$$

که شکل فشرده آن به صورت زیر است:

$$\dot{X} = f(X, t) \qquad (۲-۷)$$

که در آن

$$X = [n(t), c_1(t), c_2(t), c_3(t), c_4(t), c_5(t), c_6(t)]^{\mathrm{T}} \qquad (۳-۷)$$

روش‌های انتگرال‌گیری متعددی به صورت تک‌گامی و چندگامی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل (۷-۲) وجود دارند، که هرکدام از نقطه‌نظرات پایداری[۱۸] و دقت[۱۹] مزایا و معایبی دارند. روش‌های انتگرال‌گیری، همچنین، به دو دسته

[18] Stability
[19] Accuracy

روش‌های صریح و ضمنی طبقه‌بندی می‌شوند. روش‌های صریح به ازای گام‌های زمانی مختلف هزینه‌بر نیستند، اما از نظر پایداری محدودتر هستند و بنابراین برای حل معادلات سینتیک نقطه‌ای (که در گذارهای مختلف، گام‌های گسترده‌ای از پاسخ‌های سیستم را در برمی‌گیرند) مناسب نمی‌باشند. در مقابل، روش‌های ضمنی به ازای گام‌های زمانی هزینه‌بر بوده، ولی پایداری بهتری داشته و بنابراین برای حل معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور مناسب‌تر می‌باشند.

روش‌های انتگرال‌گیری چندگامی، بر خلاف روش‌های تک‌گامی، از پاسخ‌های سیستم در چندین گام زمانی قبلی برای تخمین حالت فعلی سیستم استفاده می‌کنند. صورت کلی روش‌های چندگامی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل (۷-۲) را می‌توان به صورت رابطه (۷-۴) نوشت [۴]:

$$X^{n+1} = \sum_{i=0}^{p} a_i . X^{n-i} + h \sum_{i=-1}^{p} b_i . f(X^{n-i}, t^{n-i}) \qquad (۴-۷)$$

با گام‌های زمانی:

$$h = t^{n+1} - t^{n} \qquad (۷-۵)$$

که در آن n نمایانگر شماره گام زمانی انجام محاسبات بوده و p بیانگر تعداد گام‌های زمانی قبلی مورد استفاده در رابطه چندگامی موردنظر است.

در رابطه (۷-۴) چنانچه $b_{-1} = 0$ باشد، روش مورد نظر یک روش صریح و در مقابل چنانچه $b_{-1} \neq 0$ باشد، روش مدنظر یک روش ضمنی و مناسب برای حل معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور خواهد بود. توجه به این نکته ضروری است که برای حل دستگاه معادلاتی که در آن‌ها مقادیر ویژه به شدت تغییر می‌کنند (مانند دستگاه معادلات سینتیک نقطه‌ای)،

حتماً باید از روش‌های ضمنی بهره برد. این گونه دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل را دستگاه معادلات غیرمنعطف[۲۰] می‌نامند.

ضرایب رابطه (۷-۴) را می‌توان از روابط (۷-۶) و (۷-۷) به دست آورد [۴]:

$$\sum_{i=0}^{p} a_i = 1 \tag{۷-۶}$$

$$\sum_{i=1}^{p} (-i)^j a_i + j \sum_{i=-1}^{p} (-i)^{j-1} b_i = 1 \qquad for \quad j = 1 \ldots k \tag{۷-۷}$$

که در آن k مرتبه چندجمله‌ای حاصل می‌باشد.

---

[20] Stiff

رابطه گیر، که اهمیت ویژه‌ای در بین روش‌های انتگرال‌گیری چندگامی در برنامه‌های تحلیل گذارها دارد، با استفاده از ضرایب زیر به دست می‌آید [۵]:

$$p = k - 1 \quad and \quad b_0 = b_1 = \ldots = b_{k-1} = 0$$ (۷-۸)

بنابراین از روابط (۷-۴) و (۷-۸) داریم:

$$X^{n+1} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i . X^{n-i} + h.b_{-1} f(X^{n+1}, t^{n+1})$$ (۷-۹)

که این رابطه اصلی روش گیر است. این روش را تحت عنوان رابطه مشتق‌گیری رو به عقب[۲۱] نیز می‌شناسند.

[21] Backward Differentiation Formula (BDF)

ضرایب رابطه گیر را، با استفاده از روابط (۷-۶) تا (۷-۸)، به صورت زیر به دست می‌آورند:

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i = 1$$ (۷-۱۰)

و

$$\sum_{i=1}^{k-1} (-i)^j a_i + j b_{-1} = 1 \quad for \quad j = 1..k$$ (۷-۱۱)

به عنوان مثال برای روش گیر از مرتبه ۴، ضرایب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 9 \\ 3 & 0 & -1 & -8 & -27 \\ 4 & 0 & 1 & 16 & 81 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{۱۲-۷}$$

که در نتیجه رابطه گیر از مرتبه ۴ به شکل زیر می‌باشد:

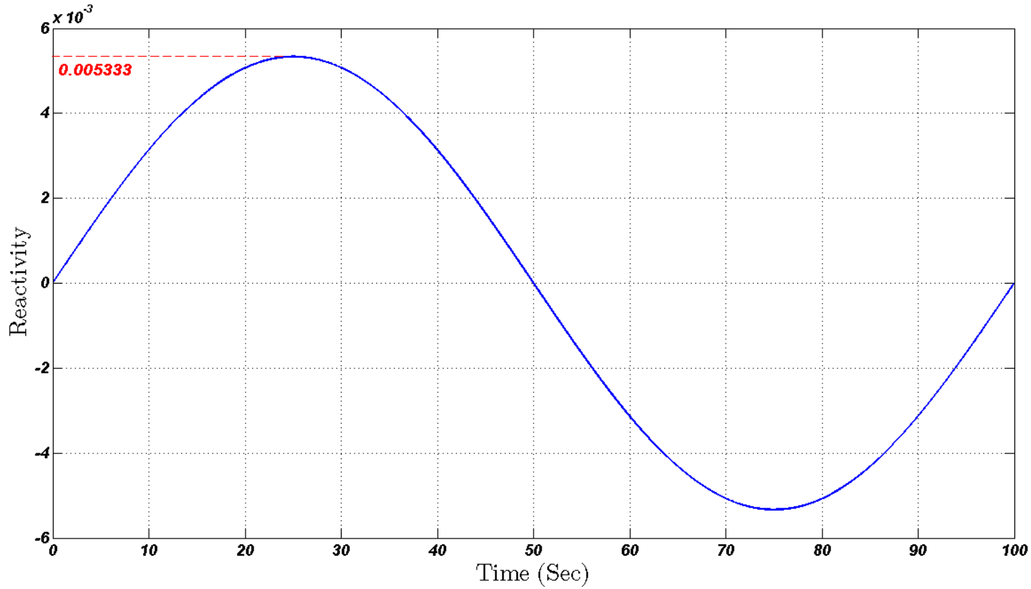
$$\begin{aligned} X^{n+1} &= a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + a_3 X^{n-3} + h.b_{-1}.f(X^{n+1}, t^{n+1}) \\ &= \frac{48}{25} X^n - \frac{36}{25} X^{n-1} + \frac{16}{25} X^{n-2} - \frac{3}{25} X^{n-3} + h\frac{12}{25} f(X^{n+1}, t^{n+1}) \end{aligned} \tag{۱۳-۷}$$

لازم به ذکر است که هیچ روش انتگرال‌گیری پایدارتری نسبت به روش گیر وجود ندارد [۵].

۲-۷- شبیه‌سازی و اعتبارسنجی روش گیر

پس از تهیه و تنظیم تمامی روابط عددی و گسسته‌سازی‌های مورد نیاز، پیاده‌سازی روش گیر در قالب کدنویسی‌های کامپیوتری انجام شده است. در ابتدا با در نظر گرفتن یک گروه نوترون‌های تأخیری، الگوریتم روش گیر پیاده شده و پس از رفع ایرادهای به وجود آمده، با مثال‌های موجود در مرجع [۱] مقایسه و اعتبارسنجی شد.

مهم‌ترین مسأله موجود در مرجع [۱]، جهت اعتبارسنجی نتایج بدست آمده از روش گیر، عبارتست از مسأله راکتیویته سینوسی که در شکل ۱ نشان داده شده است. همچنین مقادیر متغیرهای این مسأله در جدول ۱ آورده شده‌اند.



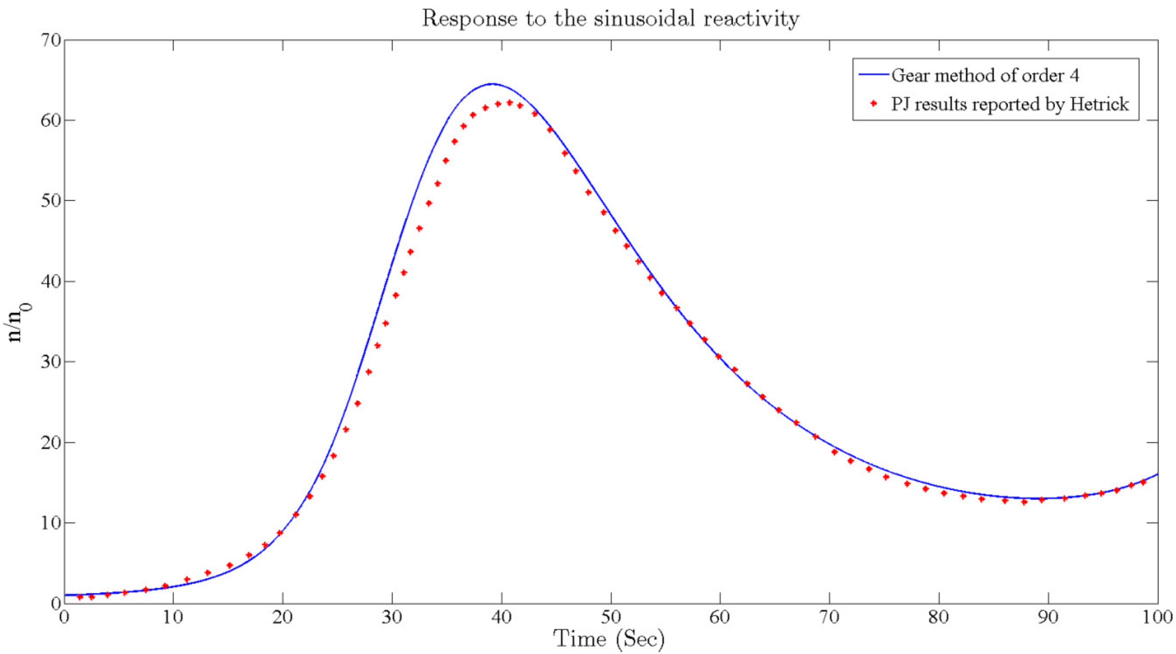
شکل ۱: ورودی راکتیویته سینوسی در مسأله اعتبارسنجی نخست

جدول ۱: مقادیر متغیرهای مورد استفاده در مسأله راکتیویته سینوسی

مقدار	متغیر
۰/۰۰۷۹	β
۰/۰۷۷ s^{-1}	λ
۱۰$^{-۴}$ s	Λ

نتایج به دست آمده از حل مسأله بالا با استفاده از روش گیر مرتبه ۴، به همراه نتایج مربوط به تقریب جهش آنی[22] [۱] در شکل ۲ نمایش داده شده‌اند.

[22] Prompt Jump (PJ) Approximation



شکل ۲: نتایج روش گیر مربوط به ورودی راکتیویته سینوسی

تقریب جهش آنی برای Λ (زمان تولید نوترون) های بسیار کوچک صادق است. در حل مسأله بالا به روش گیر، از $\Lambda = ۱۰^{-۴}\ s^{-1}$ استفاده شده است.

سپس، با در نظر گرفتن شش گروه نوترون‌های تأخیری، الگوریتم روش گیر پیاده شده و پس از رفع ایرادهای به وجود آمده، با مثال‌های موجود در مرجع [۶] مقایسه و اعتبارسنجی شد. به عنوان نمونه، مسأله ورودی راکتیویته پله[۲۳] به صورت $\rho_0 = ۰/۰۰۳$ در نظر گرفته شده است. از حل معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور با شش گروه نوترون تأخیری (جدول ۲) به روش گیر مرتبه ۴، نتایج حاصل به همراه حل دقیق (مرجع [۶]) در جدول ۳ آورده شده‌اند. همچنین، با در نظر گرفتن $\rho_0 = ۰/۰۰۷$ (بحرانی آنی[۲۴]) نتایج روش گیر در مقایسه با حل دقیق (مرجع [۶]) در جدول ۴ آورده شده‌اند.

23 Step Reactivity
24 Prompt Critical

به عنوان مسأله دیگری جهت اعتبارسنجی روش گیر، مسأله ورودی راکتیویته شیب[25] به صورت $\rho(t)=\rho_0 t$ در نظر گرفته شده است. با فرض $\rho_0 = ۰/۱\ \$/s$ و از حل معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور با شش گروه نوترون تأخیری به روش گیر مرتبه ۴، نتایج حاصل به همراه حل دقیق این معادلات (مرجع [۶]) در جدول ۵ آورده شده‌اند.

[25] Ramp Reactivity

جدول ۲: داده‌های مورد نیاز جهت حل معادلات سینتیک نقطه‌ای شش‌گروهی

متغیر	مقدار
β_1	۰/۰۰۰۲۶۶
β_2	۰/۰۰۱۴۹۱
β_3	۰/۰۰۱۳۱۶
β_4	۰/۰۰۲۸۴۹
β_5	۰/۰۰۰۸۹۶
β_6	۰/۰۰۰۱۸۲
λ_1	۰/۰۱۲۷ s^{-1}
λ_2	۰/۰۳۱۷ s^{-1}
λ_3	۰/۱۱۵ s^{-1}
λ_4	۰/۳۱۱ s^{-1}
λ_5	۱/۴ s^{-1}
λ_6	۳/۸۷ s^{-1}
Λ	۲×۱۰$^{-۵}$ s

جدول ۳: نتایج مربوط به محاسبات شش گروه نوترون تأخیری با ورودی راکتیویته پله $\rho_0=$۰/۰۰۳

زمان (s)	روش گیر ($h=$۱۰$^{-۳}$ s)	روش گیر ($h=$۱۰$^{-۴}$ s)	حل دقیق
۱	۲/۲۰۹۶	۲/۲۰۹۸	۲/۲۰۹۸
۱۰	۸/۰۱۸۶	۸/۰۱۹۱	۸/۰۱۹۲
۲۰	۲/۸۲۹۵×۱۰^{۱}	۲/۸۲۹۷×۱۰^{۱}	۲/۸۲۹۷×۱۰^{۱}

جدول ۴: نتایج مربوط به محاسبات شش گروه نوترون تأخیری با ورودی راکتیویته پله $\rho_0=$۰/۰۰۷

زمان (s)	روش گیر ($h=$۱۰$^{-۳}$ s)	روش گیر ($h=$۱۰$^{-۴}$ s)	روش گیر ($h=$۱۰$^{-۵}$ s)	حل دقیق
۰/۰۱	۴/۳۳۲۸	۴/۴۹۱۲	۴/۵۰۷۰	۴/۵۰۸۸
۰/۵	۵/۳۱۴۸×۱۰^{۳}	۵/۳۱۴۸×۱۰^{۳}	۵/۳۴۵۵×۱۰^{۳}	۵/۳۴۵۹×۱۰^{۳}
۲	۲/۰۴۷۲×۱۰^{۱۱}	۲/۰۵۷۹×۱۰^{۱۱}	۲/۰۵۹۰×۱۰^{۱۱}	۲/۰۵۹۱×۱۰^{۱۱}

جدول ۵: نتایج مربوط به محاسبات شش گروه نوترون تأخیری با ورودی راکتیویته شیب

زمان (s)	روش گیر ($h=۱۰^{-۳}$ s)	حل دقیق
۲	۱/۳۳۸۲	۱/۳۳۷۹
۴	۲/۲۲۸۴	۲/۲۲۸۳
۶	۵/۵۸۲۰	۵/۵۸۱۵
۸	$۴/۲۷۸۶\times۱۰^{۱}$	$۴/۲۷۸۱\times۱۰^{۱}$
۹	$۴/۸۷۵۲\times۱۰^{۲}$	$۴/۸۷۴۵\times۱۰^{۲}$

۸- روش طیفی جهت حل معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور

۸-۱- معرفی روش طیفی

در مورد برخی راکتیویته‌های مشخص می‌توان راه‌حل‌های تحلیلی برای معادلات سینتیک نقطه‌ای ارائه داد. به عنوان مثال، این دستگاه معادلات برای راکتیویته پله[۲۶] حل تحلیلی خواهد داشت. اگرچه در حالت کلی، راکتیویته ممکن است به صورت پیچیده‌ای برحسب زمان تغییر کند، در گام‌های زمانی به اندازه کافی کوچک می‌توان آن را ثابت فرض کرد.

[26] Step Reactivity

این فرض به تغییرات پلکانی[27] راکتیویته مشهور است [۷]. بنابراین، با فرض ثابت بودن راکتیویته در گام‌های زمانی کوچک، صورت ماتریسی-برداری دستگاه معادلات دیفرانسیل (۶-۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d}{dt}[\psi]=[R][\psi] \qquad (۱-۸)$$

که در آن بردار $[\psi]$ و ماتریس $[R]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[\psi]=\begin{bmatrix} n(t) \\ C_1(t) \\ C_2(t) \\ \vdots \\ C_G(t) \end{bmatrix} \qquad (۲-۸)$$

[27] Stairway

$$[R]=\begin{bmatrix} \frac{\rho-\beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_G \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_G}{\Lambda} & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_G \end{bmatrix} \tag{۸-۳}$$

که در آنها G نشان‌دهنده تعداد گروه انرژی نوترون‌های تأخیری می‌باشد. چنانچه تبدیل (۸-۴) برای بردار $[\psi]$ در نظر گرفته شود،

$$[\psi]=[T][\psi'] \tag{۸-۴}$$

رابطه (۸-۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{d[\psi']}{dt}=[T]^{-1}[R][T][\psi'] \tag{۸-۵}$$

عملگر $[T]$ طوری انتخاب می‌شود که ماتریس $[R]$ موجود در رابطه (۸-۵) را قطری سازد. بنابراین رابطه فوق را به صورت زیر می توان بازنویسی نمود:

$$\frac{d[\psi']}{dt}=[D][\psi'] \tag{۸-۶}$$

که ماتریس $[D]$ یک ماتریس قطری می‌باشد. بدین ترتیب، تمامی عناصر $[\psi']$ را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\psi_i'(t)=\exp\left(\omega_i\left(t-t_0\right)\right)\psi_i'(t_0) \tag{۸-۷}$$

بنابراین، تبدیل معکوس آن نتیجه می‌دهد:

$$\left[\psi(t)\right]=[T][DD][T]^{-1}\left[\psi(t_0)\right] \tag{۸-۸}$$

که در آن، ماتریس $[DD]$ به صورت زیر می‌باشد:

$$[DD]=\begin{bmatrix} \exp\left(\omega_0\left(t-t_0\right)\right) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \exp\left(\omega_1\left(t-t_0\right)\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left(\omega_2\left(t-t_0\right)\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \exp\left(\omega_G\left(t-t_0\right)\right) \end{bmatrix} \tag{۹-۸}$$

بنابراین با داشتن مقادیر ω_i و ماتریس $[T]$، از رابطه (۸-۸) بردار $\left[\psi(t)\right]$ که همان پاسخ معادلات سینتیک نقطه‌ای در زمان t می‌باشد، به دست خواهد آمد.

از آنالیز خطی، می‌دانیم که عناصر ماتریس قطری $[D]$ همان مقادیر ویژه[۲۸] ماتریس $[R]$ هستند. همچنین، بردارهای ویژه[۲۹] ماتریس $[R]$ ستون‌های ماتریس $[T]$ را تشکیل می‌دهند. مقادیر ویژه ماتریس $[R]$ پاسخ‌های معادله نوردهایم[۳۰] خواهند بود [۷]:

$$\left(\frac{\rho-\beta}{\Lambda}-\omega\right)+\sum_{i=1}^{G}\frac{\beta_i\lambda_i}{\Lambda\left(\lambda_i+\omega\right)}=0 \tag{۱۰-۸}$$

---

[28] Eigenvalue
[29] Eigenvector
[30] Nordheim Equation

همچنین ماتریس $\left[T\right]$ به صورت زیر به دست خواهد آمد [۷]:

$$\left[T\right]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{\beta_1}{\Lambda\left(\lambda_1+\omega_0\right)} & \dfrac{\beta_1}{\Lambda\left(\lambda_1+\omega_1\right)} & \cdots & \dfrac{\beta_1}{\Lambda\left(\lambda_1+\omega_G\right)} \\ \dfrac{\beta_2}{\Lambda\left(\lambda_2+\omega_0\right)} & \dfrac{\beta_2}{\Lambda\left(\lambda_2+\omega_1\right)} & \cdots & \dfrac{\beta_2}{\Lambda\left(\lambda_2+\omega_G\right)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\beta_G}{\Lambda\left(\lambda_G+\omega_0\right)} & \dfrac{\beta_G}{\Lambda\left(\lambda_G+\omega_1\right)} & \cdots & \dfrac{\beta_G}{\Lambda\left(\lambda_G+\omega_G\right)} \end{bmatrix} \quad (۱۱-۸)$$

بدین ترتیب، با دانستن مقادیرω_i و ماتریس $\left[T\right]$، پاسخ معادلات سینتیک نقطه‌ای در هر زمان از رابطه (۸-۸) به دست خواهد آمد.

۸-۲- شبیه سازی و اعتبارسنجی روش طیفی

پس از تهیه روابط عددی روش طیفی، به پیاده‌سازی این روش اقدام شده است. در ابتدا، با در نظر گرفتن شش گروه نوترون‌های تأخیری (جدول ۲) راکتیویته پله‌ای به میزان $\rho_0 = ۰/۰۰۳$ در نظر گرفته شده است. از حل معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور به روش طیفی، نتایج حاصل به همراه حل دقیق (مرجع [۶]) در جدول ۶ آورده شده‌اند. اگرچه گام زمانی محاسباتی در اینجا $\Delta t = ۱\ s$ در نظر گرفته شده است، باید در نظر داشت که روش طیفی در مورد راکتیویته ثابت (پله) پاسخ‌های تحلیلی و مستقل از گام زمانی محاسباتی ارائه می‌دهد.

به عنوان مسأله دیگری جهت اعتبارسنجی روش طیفی، ورودی راکتیویته شیب به صورت $\rho(t)=\rho_0 t$ در نظر گرفته شده است. با فرض $\rho_0 = ۰/۱\ \$/s$ و از حل معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور با شش گروه نوترون تأخیری به روش طیفی، نتایج حاصل به همراه حل دقیق این معادلات (مرجع [۶]) در جدول ۷ آورده شده‌اند.

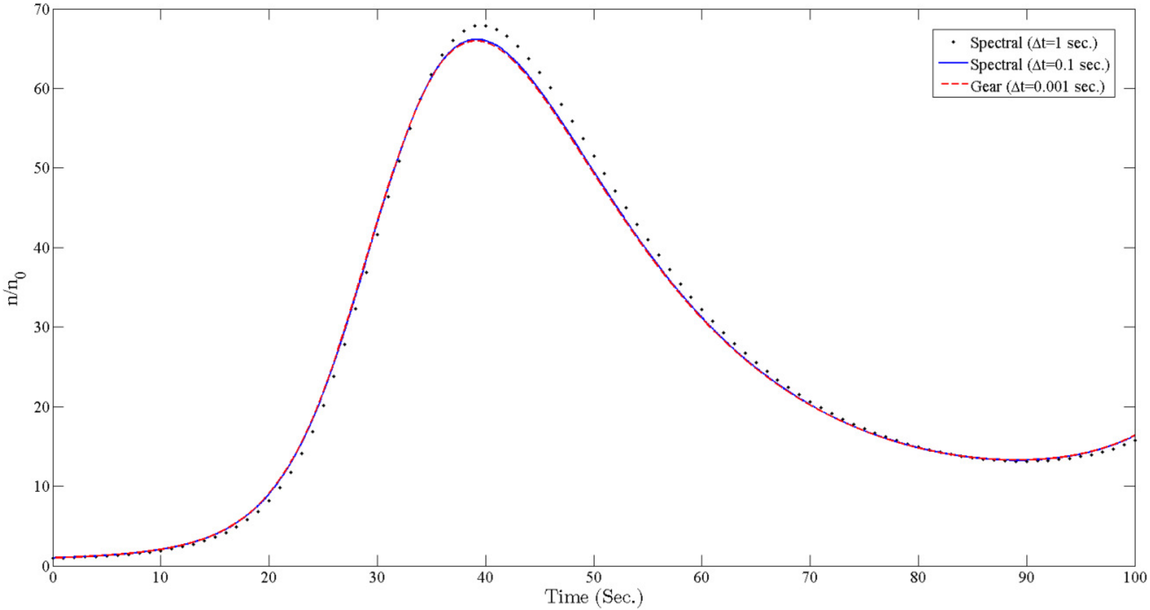
جدول ۶: نتایج مربوط به محاسبات شش گروه نوترون تأخیری با ورودی راکتیویته پله $\rho_0 = ۰/۰۰۳$

زمان (s)	**روش طیفی (h=۱ s)**	**حل دقیق**
۱	۲/۲۰۹۸	۲/۲۰۹۸
۱۰	۸/۰۱۹۲	۸/۰۱۹۲
۲۰	$۲/۸۲۹۷\times۱۰^{۱}$	$۲/۸۲۹۷\times۱۰^{۱}$

جدول ۷: نتایج مربوط به محاسبات شش گروه نوترون تأخیری با ورودی راکتیویته شیب

حل دقیق	روش طیفی ($h=۰/۰۰۱\ s$)	روش طیفی ($h=۰/۰۱\ s$)	روش طیفی ($h=۰/۱\ s$)	زمان (s)
۱/۳۳۷۹	۱/۳۳۸۲	۱/۳۳۷۸	۱/۳۳۰۴	۲
۲/۲۲۸۳	۲/۲۲۸۴	۲/۲۲۷۸	۲/۲۱۱۷	۴
۵/۵۸۱۵	۵/۵۸۲۰	۵/۵۸۰۴	۵/۵۲۲۹	۶
$۴/۲۷۸۱\times۱۰^{۱}$	$۴/۲۷۸۶\times۱۰^{۱}$	$۴/۲۷۷۴\times۱۰^{۱}$	$۴/۲۰۴۸\times۱۰^{۱}$	۸
$۴/۸۷۴۵\times۱۰^{۲}$	$۴/۸۷۵۲\times۱۰^{۲}$	$۴/۸۷۳۷\times۱۰^{۲}$	$۴/۷۶۳۹\times۱۰^{۲}$	۹

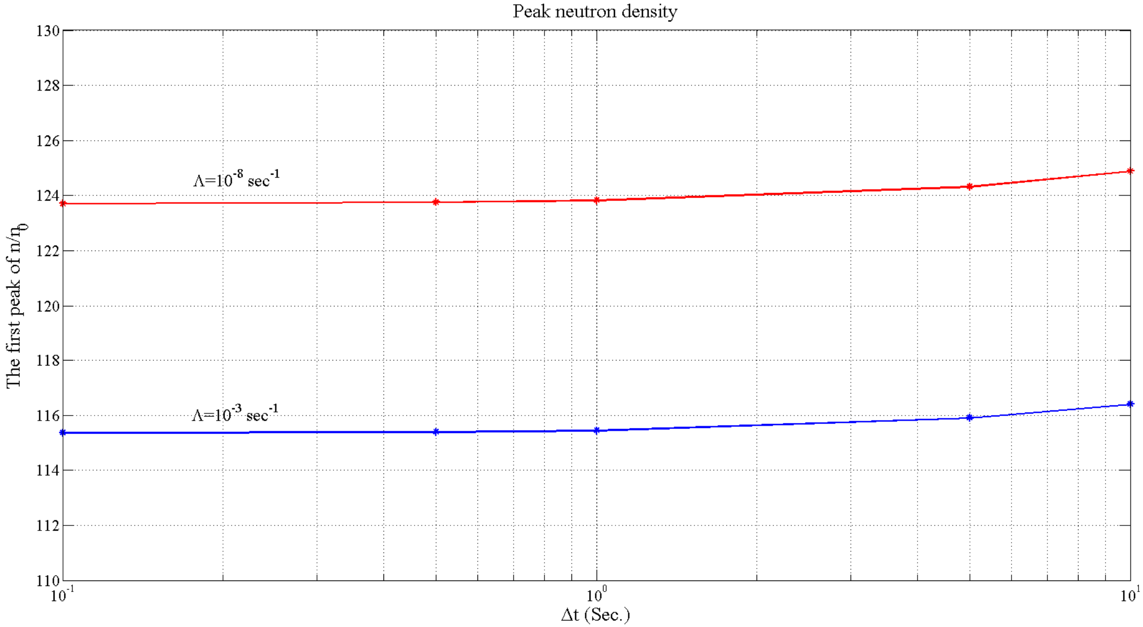
به عنوان آخرین مسأله اعتبارسنجی، با در نظر گرفتن یک گروه نوترون‌های تأخیری (جدول ۱)، روش طیفی برای مسأله راکتیویته سینوسی (شکل ۱) پیاده‌سازی شد. نتایج به دست آمده از روش طیفی با دو گام محاسباتی ($\Delta t=۱\ s$) و ($\Delta t=۰/۱\ s$)، به همراه نتایج مربوط به روش گیر با گام محاسباتی ($\Delta t=۰/۰۰۱\ s$) در شکل ۳ نشان داده شده‌اند.



شکل ۳: نتایج روش طیفی مربوط به ورودی راکتیویته سینوسی

همچنین، روش طیفی در مورد راکتیویته سینوسی (در دو حالت $\Lambda=10^{-8}\ s$ و $\Lambda=10^{-3}\ s$) در گام‌های محاسباتی مختلف به کار برده شده و نتایج آن برای قله نخست قدرت در شکل ۴ آورده شده‌اند.

همانطور که در شکل ۴ مشخص است، قله نخست قدرت در گام‌های زمانی محاسباتی ۰/۱-۱ s تغییری نداشته و در گام‌های بزرگتر نیز تغییرات بسیار کمی را به همراه دارد. بنابراین، می‌توان از روش طیفی، جهت حل معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور در گام‌های زمانی نسبتاً بزرگ بهره جست.



شکل ۴: قله نخست قدرت برحسب گام‌های محاسباتی، حاصل از روش طیفی برای راکتیویته سینوسی

۹- روش لاگرانژ جهت حل معادلات سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور

۹-۱- معرفی روش لاگرانژ

همانطور که در رابطه (۶-۲) قابل مشاهده است، جهت حل معادلات سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور، دانستن تاریخچه عملکرد راکتور (از ابتدا تا لحظه محاسبه) ضروری می‌باشد. جهت رفع این مشکل، ابتدا دستگاه معادلات (۶-۱) به صورت زیر (جهت محاسبه مقدار راکتیویته در هر زمان) بازنویسی می‌شود:

$$\rho(t)=\beta+\frac{\Lambda}{n(t)}\frac{dn(t)}{dt}-\frac{\Lambda}{n(t)}\sum_{i=1}^{6}\lambda_i c_i(t) \qquad (۹-۱)$$

$$\frac{dc_i(t)}{dt}+\lambda_i c_i(t)=\frac{\beta_i}{\Lambda}n(t), \qquad i=1,2,\ldots,6 \qquad (۹-۲)$$

در ادامه به جزئیات روش لاگرانژ جهت حل معادلات (۹-۱) و (۹-۲) پرداخته شده است. بسط چند جمله‌ای‌های لاگرانژ به صورت زیر می‌باشد [۲]:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n} f\left(t_k\right)L_k(t)+\frac{\left(t-t_0\right)\ldots\left(t-t_n\right)}{(n+1)!}f^{(n+1)}\left(\xi(t)\right) \tag{۹-۳}$$

که در آن $L_k(t)$ بیانگر ضریب چند جمله‌ای kام لاگرانژ برای تابع $f(t)$ در زمان‌های $t_0,t_1,\ldots,t_n$ می‌باشد. مشتق‌گیری زمانی از این تابع، رابطه زیر را حاصل می‌نماید:

$$f'(t_j)=\sum_{k=0}^{n} f\left(t_k\right)L'_k(t_j)+\frac{f^{(n+1)}\left(\xi(t_j)\right)}{(n+1)!}\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\left(t_j-t_k\right) \tag{۹-۴}$$

که رابطه $(n+1)$-نقطه‌ای لاگرانژ برای تخمین $f'(t_j)$ نامیده می‌شود. اگرچه استفاده از تعداد نقاط بیشتر منجر به دقت‌های بالاتر می‌شود، افزایش تعداد محاسبات و به تبع آن افزایش خطای گرد کردن[۳۱] حاصل را نیز باید در نظر گرفت. بنابراین روابطی که بیشترین مورد استفاده را دارند، روابط سه‌نقطه‌ای و پنج‌نقطه‌ای می‌باشند **[۲]**.

با توجه به رابطه (۹-۴)، روابط مشتق‌گیری عددی سه‌نقطه‌ای و پنج‌نقطه‌ای لاگرانژ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$f'\left(t_j\right)=\frac{1}{2h}\left[3f\left(t_j\right)-4f\left(t_j-h\right)+f\left(t_j-2h\right)\right]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}\left(\xi\right) \tag{۹-۵}$$

$$f'\left(t_j\right)=\frac{1}{12h}\left[25f\left(t_j\right)-48f\left(t_j-h\right)+36f\left(t_j-2h\right)-16f\left(t_j-3h\right)+3f\left(t_j-4h\right)\right]+\frac{h^4}{5}f^{(5)}\left(\xi\right) \tag{۹-۶}$$

[31] Round-off Error

همانطور که در روابط (۹-۵) و (۹-۶) قابل مشاهده است، خطای برشی[۳۲] در روابط سه‌نقطه‌ای و پنج‌نقطه‌ای به ترتیب از مرتبه h^2 و h^4 می‌باشد.

با توجه به رابطه (۹-۵)، شکل گسسته معادلات (۹-۱) و (۹-۲) با استفاده از رابطه سه‌نقطه‌ای لاگرانژ به صورت زیر در می‌آیند:

$$\rho(t) = \beta + \frac{\Lambda}{n(t)}\frac{1}{2h}\left[3n(t) - 4n(t-h) + n(t-2h)\right] - \frac{\Lambda}{n(t)}\sum_i \lambda_i c_i(t) \qquad (۹\text{-}۷)$$

$$\frac{1}{2h}\left[3c_i(t) - 4c_i(t-h) + c_i(t-2h)\right] + \lambda_i c_i(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda}n(t) \qquad (۹\text{-}۸)$$

32 Truncation Error

که از ترکیب آنها رابطه کلی زیر، جهت محاسبه مقدار راکتیویته در هر زمان، به دست می‌آید:

$$\rho(t)=\beta+\frac{\Lambda}{n(t)}\frac{1}{2h}\left[3n(t)-4n(t-h)+n(t-2h)\right]$$
$$-\frac{\Lambda}{n(t)}\sum_i \frac{\lambda_i}{\left(\frac{3}{2h}+\lambda_i\right)}\left\{\frac{\beta_i}{\Lambda}n(t)+\frac{1}{2h}\left[4c_i(t-h)-c_i(t-2h)\right]\right\} \qquad (۹-۹)$$

همچنین، با توجه به رابطه (۹-۶)، شکل گسسته معادلات (۹-۱) و (۹-۲) با استفاده از رابطه پنج‌نقطه‌ای لاگرانژ به صورت زیر در می‌آید:

$$\rho(t)=\beta+\frac{\Lambda}{n(t)}\frac{1}{12h}\left[25n(t)-48n(t-h)+36n(t-2h)-16n(t-3h)+3n(t-4h)\right] \qquad (۱۰-۹)$$
$$-\frac{\Lambda}{n(t)}\sum_i \lambda_i c_i(t)$$

$$\frac{1}{12h}\left[25c_i(t)-48c_i(t-h)+36c_i(t-2h)-16c_i(t-3h)+3c_i(t-4h)\right]+\lambda_i c_i(t)=\frac{\beta_i}{\Lambda}n(t) \tag{۱۱-۹}$$

که از ترکیب آنها رابطه کلی زیر، جهت محاسبه مقدار راکتیویته در هر زمان، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\rho(t)=\beta+\frac{\Lambda}{n(t)}\frac{1}{12h}\left[25n(t)-48n(t-h)+36n(t-2h)-16n(t-3h)+3n(t-4h)\right]\\ -\frac{\Lambda}{n(t)}\sum_i\frac{\lambda_i}{\left(\frac{25}{12h}+\lambda_i\right)}\left\{\frac{\beta_i}{\Lambda}n(t)+\frac{1}{12h}\left[48c_i(t-h)-36c_i(t-2h)+16c_i(t-3h)-3c_i(t-4h)\right]\right\}\end{aligned} \tag{۱۲-۹}$$

شرایط اولیه برای حل این معادلات (روابط ۹-۹ و ۹-۱۲) به صورت زیر می‌باشد:

$$n(0)=n_0 \tag{۱۳-۹}$$

$$c_i\left(0\right)=\frac{\beta_i}{\Lambda\lambda_i}n_0 \qquad (۱۴-۹)$$

همانطور که در روابط (۹-۹) و (۹-۱۲) می‌توان ملاحظه نمود، روش لاگرانژ برای حل معادلات سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور، تنها به دانستن مقادیر قدرت راکتور در چند گام زمانی قبل نیاز داشته و دیگر نیازی به دانستن تاریخچه تغییرات قدرت راکتور (از ابتدا تاکنون) ندارد.

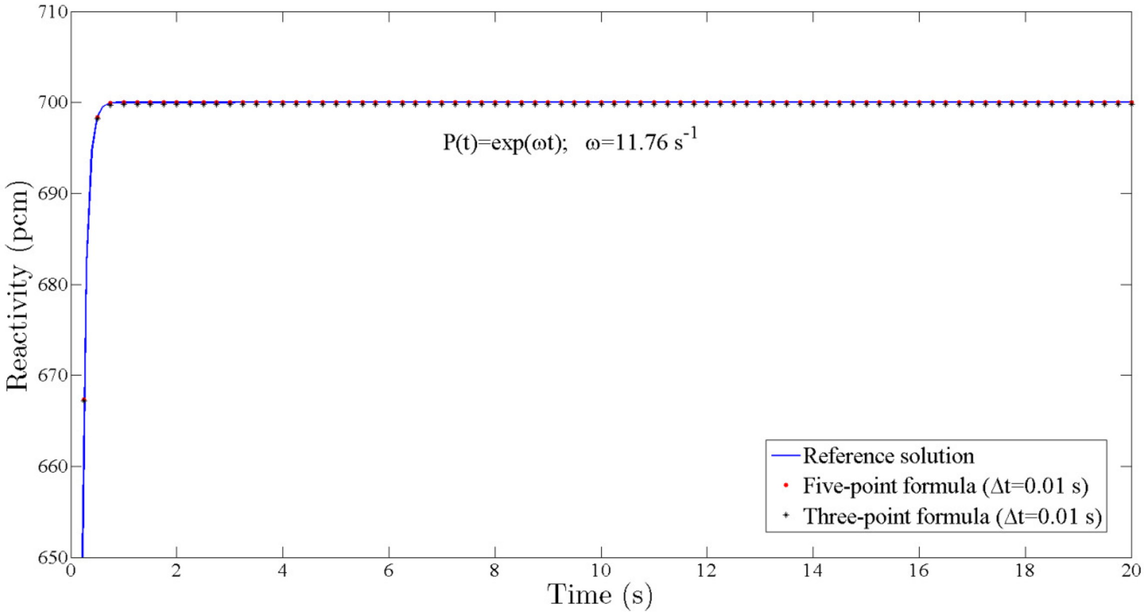
۹-۲- شبیه‌سازی و اعتبارسنجی روش لاگرانژ

پس از تهیه شکل گسسته معادلات سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور به روش لاگرانژ، به پیاده‌سازی این روش اقدام شد. سپس، نتایج به دست آمده از محاسبات با شش گروه نوترون تأخیری، در مقابل حل تحلیلی معادله (۶-۲) برای تغییرات

نمایی قدرت راکتور به صورت $n(t)=\exp(\omega t)$ مورد اعتبارسنجی قرار گرفتند. در این حالت، تغییرات راکتیویته راکتور به صورت زیر به دست می‌آید:

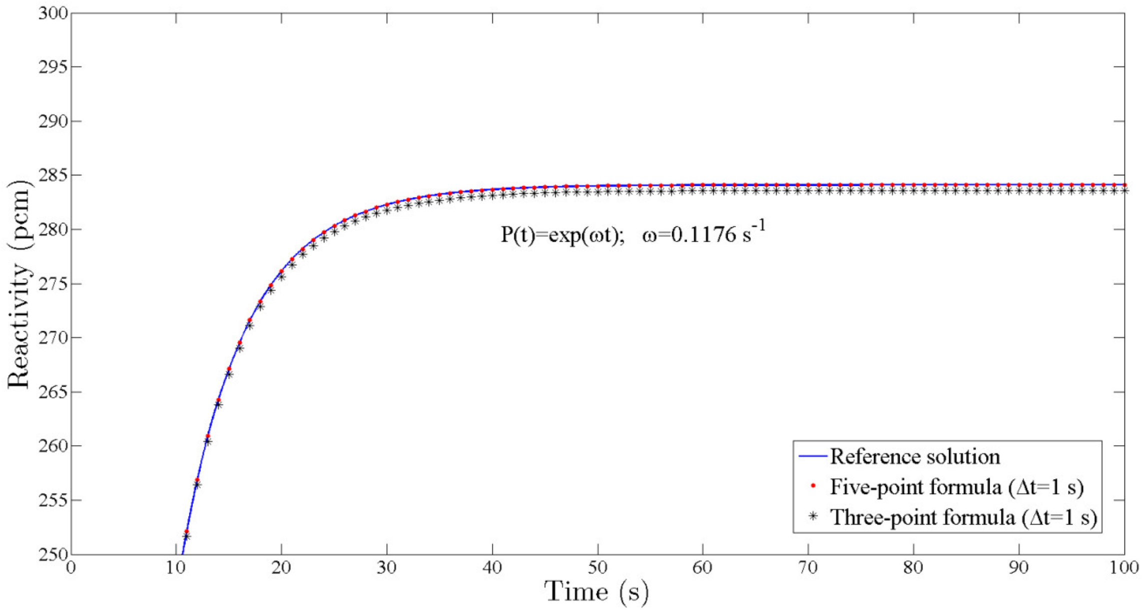
$$\rho(t)=\beta+\Lambda\omega-\sum_{i=1}^{6}\frac{\lambda_i\beta_i}{(\omega+\lambda_i)}-\sum_{i=1}^{6}\frac{\beta_i\omega}{(\omega+\lambda_i)}e^{-(\omega+\lambda_i)t} \qquad (۱۵-۹)$$

ابتدا با در نظر گرفتن تغییرات نمایی قدرت با $\omega=۱۱/۷۶\ s^{-1}$ (بحرانی آنی)، راکتیویته راکتور با استفاده از روش لاگرانژ مرتبه ۳ و ۵ محاسبه شده و با حل دقیق آن (رابطه ۹-۱۵) مورد مقایسه گرفت. شکل ۵، نتایج این مقایسه را برای گام زمانی محاسباتی $\Delta t=۰/۰۱\ s$ نشان می‌دهد. خطای ماکزیمم برای دو روش مرتبه ۳ و ۵، با $\Delta t=۰/۱\ s$، به ترتیب $-۱۰/۳۶۳۶\ pcm$ و $-۳/۰۵۷۰\ pcm$ به دست آمده است. همچنین، خطای ماکزیمم برای این دو روش با $\Delta t=۰/۰۱\ s$، به ترتیب $-۰/۱۸۹۱\ pcm$ و $-۰/۰۰۱۴\ pcm$ محاسبه شده است.



شکل ۵: راکتیویته به دست آمده از روش لاگرانژ مرتبه ۳ و ۵ برای $\omega = ۱۱/۷۶\ s^{-1}$

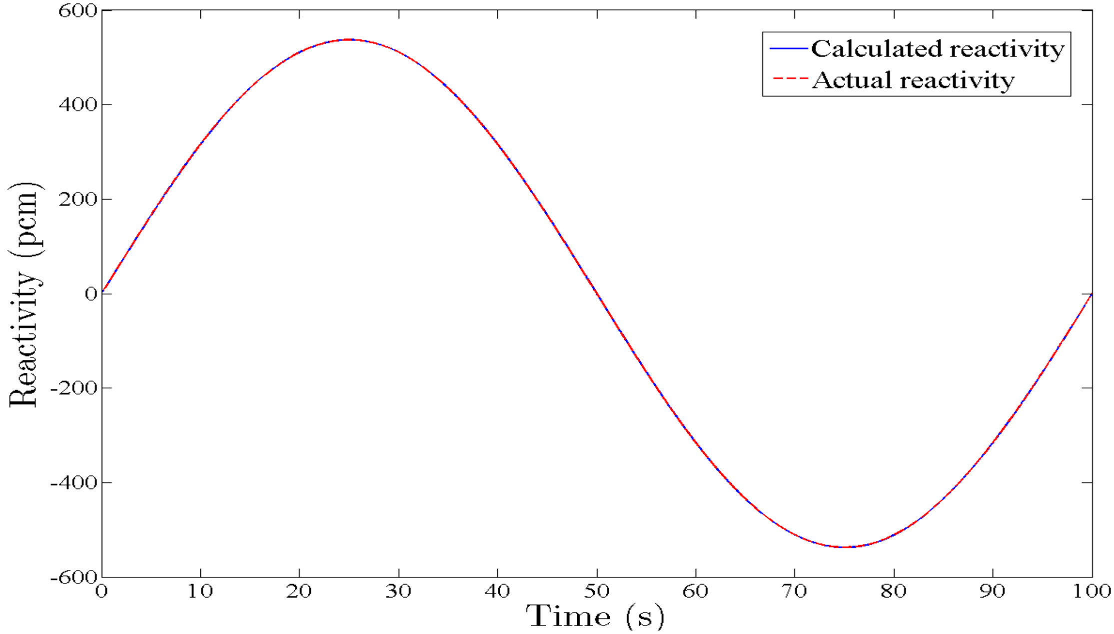
سپس، با در نظر گرفتن تغییرات نمایی قدرت با $\omega = ۰/۱۱۷۶\ s^{-1}$، راکتیویته راکتور با استفاده از روش لاگرانژ مرتبه ۳ و ۵ محاسبه شده و با حل دقیق آن (رابطه ۹-۱۵) مورد مقایسه قرار گرفت. شکل ۶، نتایج این مقایسه را برای گام زمانی محاسباتی $\Delta t = ۱\ s$ نشان می‌دهد. خطای ماکزیمم برای دو روش مرتبه ۳ و ۵، با $\Delta t = ۱\ s$، به ترتیب $-۰/۵۲۲۴\ pcm$ و $-۰/۰۰۳۸\ pcm$ به دست می‌آید. همچنین، خطای ماکزیمم برای این دو روش با $\Delta t = ۰/۱\ s$، به ترتیب $-۰/۰۰۵۶\ pcm$ و $-۴/۶۲۸\times ۱۰^{-۷}\ pcm$ می‌باشند.



شکل ۶: راکتیویته به دست آمده از روش لاگرانژ مرتبه ۳ و ۵ برای $\omega = ۰/۱۱۷۶\ s^{-1}$

همانطور که از نتایج به دست آمده می‌توان استنباط نمود، با استفاده از روش لاگرانژ می‌توان حتی با گام‌های زمانی محاسباتی نسبتاً بزرگ ($\Delta t = ۱\ s$) نیز به پاسخ‌های بسیار خوبی دست یافت. البته باید در نظر داشت که در مورد تغییرات سریع قدرت راکتور (ω های بزرگ) گام‌های زمانی محاسباتی نسبتاً بزرگ از دقت بسیار بالایی برخوردار نیستند. لازم به ذکر است که نیاز روش لاگرانژ مرتبه ۳ به اطلاعات قبلی سیستم (زمان‌های قبل‌تر) ۵۰٪ روش لاگرانژ مرتبه ۵ می‌باشد و سرعت آن نیز بالاتر است. البته روش مرتبه ۵ از دقت بالاتری برخوردار است.

به عنوان آخرین مسأله اعتبارسنجی، پاسخ راکتور به ورودی راکتیویته سینوسی به صورت شکل ۲ در نظر گرفته شده و پس از محاسبه تغییرات راکتیویته با استفاده از روش لاگرانژ مرتبه ۵ و مقادیر متغیرهای یک‌گروهی (جدول ۱)، به مقایسه نتایج آن با مقادیر ورودی راکتیویته سینوسی (شکل ۱) پرداخته شده است. نتایج این مقایسه را در شکل ۷ می‌توان مشاهده نمود.



شکل ۷: راکتیویته به دست آمده از روش لاگرانژ در مقایسه با مقادیر واقعی (سینوسی)

۱۰- روش پیش‌بینی-اصلاح آدامز جهت حل معادلات سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور

۱۰-۱- معرفی روش پیش‌بینی-اصلاح آدامز

روش آدامز، به عنوان یک روش پیش‌بینی-اصلاح، ترکیبی از روش‌های آدامز-بشفورد[۳۳] و آدامز-مولتون[۳۴] می‌باشد. روش آدامز-بشفورد یک روش انتگرال‌گیری چندگامی صریح می‌باشد (صورت کلی روش‌های انتگرال‌گیری چندگامی توسط رابطه ۷-۴ بیان می‌شود)، که در آن [۴]:

$$p = k - 1 \qquad \text{and} \qquad a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-1} = 0 \qquad \text{and} \qquad b_{-1} = 0 \tag{۱-۱۰}$$

رابطه آدامز-بشفورد مرتبه ۴ (چهارگامی) به صورت زیر می‌باشد:

33 Adams-Bashforth

34 Adams-Moulton

$$\begin{aligned} X^{n+1} &= a_0 X^n + h.b_0.f(X^n,t^n) + h.b_1.f(X^{n-1},t^{n-1}) + h.b_2.f(X^{n-2},t^{n-2}) + h.b_3.f(X^{n-3},t^{n-3}) \\ &= X^n + h\frac{55}{24} f(X^n,t^n) - h\frac{59}{24} f(X^{n-1},t^{n-1}) + h\frac{37}{24} f(X^{n-2},t^{n-2}) - h\frac{9}{24} f(X^{n-3},t^{n-3}) \end{aligned} \qquad (۲-۱۰)$$

خطای برشی در این رابطه $\tau_{i+1}(h) = \frac{251}{720} y^{(5)}(\xi_i) h^4$ می‌باشد. همچنین، رابطه آدامز-بشفورد مرتبه ۵ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} X^{n+1} &= a_0 X^n + h.b_0.f(X^n,t^n) + h.b_1.f(X^{n-1},t^{n-1}) + h.b_2.f(X^{n-2},t^{n-2}) \\ &\qquad + h.b_3.f(X^{n-3},t^{n-3}) + h.b_4.f(X^{n-4},t^{n-4}) \\ &= X^n + h\frac{1901}{720} f(X^n,t^n) - h\frac{2774}{720} f(X^{n-1},t^{n-1}) + h\frac{2616}{720} f(X^{n-2},t^{n-2}) \\ &\qquad - h\frac{1274}{720} f(X^{n-3},t^{n-3}) + h\frac{251}{720} f(X^{n-4},t^{n-4}) \end{aligned} \qquad (۳-۱۰)$$

خطای برشی در این رابطه $\tau_{i+1}(h) = \frac{95}{288} y^{(6)}(\xi_i) h^5$ می‌باشد.

روش آدامز-مولتون یک روش انتگرال‌گیری چندگامی ضمنی می‌باشد (صورت کلی روش‌های انتگرال‌گیری چندگامی توسط رابطه ۷-۴ بیان می شود)، با شرایط زیر [۴]:

$$p = k - 2 \qquad \text{and} \qquad a_1 = a_2 = \ldots = a_{k-2} = 0 \tag{۴-۱۰}$$

رابطه آدامز- مولتون مرتبه ۳ به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} X^{n+1} &= a_0 X^n + h.b_{-1}.f(X^{n+1},t^{n+1}) + h.b_0.f(X^n,t^n) + h.b_1.f(X^{n-1},t^{n-1}) + h.b_2.f(X^{n-2},t^{n-2}) \\ &= X^n + h\frac{9}{24}f(X^{n+1},t^{n+1}) + h\frac{19}{24}f(X^n,t^n) - h\frac{5}{24}f(X^{n-1},t^{n-1}) + h\frac{1}{24}f(X^{n-2},t^{n-2}) \end{aligned} \tag{۵-۱۰}$$

خطای برشی در این رابطه، $\tau_{i+1}(h) = -\frac{19}{720} y^{(5)}(\xi_i) h^4$ می‌باشد. همچنین، رابطه آدامز-مولتون مرتبه ۴ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} X^{n+1} &= a_0 X^n + h.b_{-1}.f(X^{n+1},t^{n+1}) + h.b_0.f(X^n,t^n) + h.b_1.f(X^{n-1},t^{n-1}) \\ &\qquad + h.b_2.f(X^{n-2},t^{n-2}) + h.b_3.f(X^{n-3},t^{n-3}) \\ &= X^n + h\frac{251}{720}f(X^{n+1},t^{n+1}) + h\frac{646}{720}f(X^n,t^n) - h\frac{264}{720}f(X^{n-1},t^{n-1}) \\ &\qquad + h\frac{106}{720}f(X^{n-2},t^{n-2}) - h\frac{19}{720}f(X^{n-3},t^{n-3}) \end{aligned} \tag{۶-۱۰}$$

خطای برشی در این رابطه، $\tau_{i+1}(h) = -\frac{3}{160}y^{(6)}(\xi_i)h^5$ می‌باشد.

چنانچه روش آدامز-بشفورد مرتبه m را با روش آدامز-مولتون مرتبه $m-1$ مقایسه کنیم، خواهیم دید که هر دو روش شامل خطای برشی $y^{(m+1)}(\xi_i)h^m$ می‌باشند. بنابراین، روش‌های ضمنی از یک درجه دقت بالاتر نسبت به روش‌های صریح هم‌مرتبه برخوردارند. در مقابل، روش‌های صریح نسبت به روش‌های ضمنی از سرعت انجام محاسبات بالاتری برخوردار هستند.

روش آدامز، از ترکیب دو روش آدامز-بشفورد و آدامز-مولتون، به صورت یک روش پیش‌بینی-اصلاح می‌باشد. بدین ترتیب، مقدار $f(X^{n+1},t^{n+1})$ در رابطه آدامز-مولتون با استفاده از روش آدامز-بشفورد حدس زده شده و پس از جایگذاری در رابطه آدامز-مولتون اصلاح خواهد شد. بنابراین، از مزیت‌های هر دو روش استفاده می‌گردد.

در اینجا، از روش آدامز-بشفورد مرتبه ۵ به عنوان پیش‌بینی‌کننده و از روش آدامز-مولتون مرتبه ۴ به عنوان اصلاح‌کننده نتایج، جهت محاسبه دانسیته نیاهسته‌ها در هر زمان، به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$c_{i+1}=c_i+h\frac{1901}{720}\left[\frac{\beta}{\Lambda}n(i)-\lambda c(i)\right]-h\frac{2774}{720}\left[\frac{\beta}{\Lambda}n(i-1)-\lambda c(i-1)\right]+h\frac{2616}{720}\left[\frac{\beta}{\Lambda}n(i-2)-\lambda c(i-2)\right]$$
$$-h\frac{1274}{720}\left[\frac{\beta}{\Lambda}n(i-3)-\lambda c(i-3)\right]+h\frac{251}{720}\left[\frac{\beta}{\Lambda}n(i-4)-\lambda c(i-4)\right] \qquad (۷-۱۰)$$

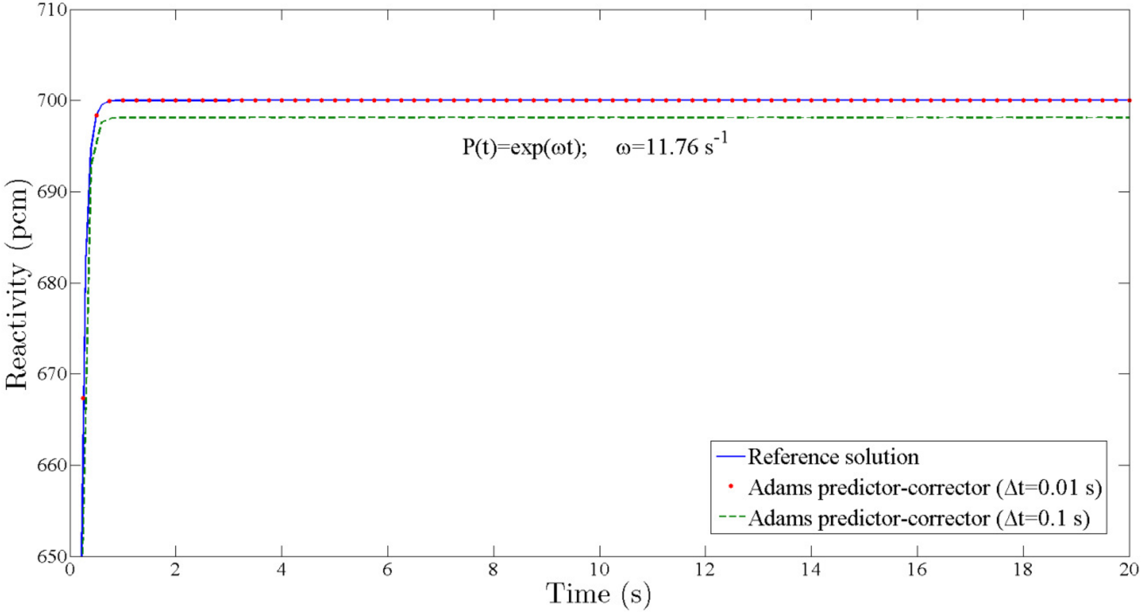
$$c_{i+1}=c_i+h\frac{251}{720}\left[\frac{\beta}{\Lambda}n(i+1)-\lambda c(i+1)\right]+h\frac{646}{720}\left[\frac{\beta}{\Lambda}n(i)-\lambda c(i)\right]-h\frac{264}{720}\left[\frac{\beta}{\Lambda}n(i-1)-\lambda c(i-1)\right]$$
$$+h\frac{106}{720}\left[\frac{\beta}{\Lambda}n(i-2)-\lambda c(i-2)\right]-h\frac{19}{720}\left[\frac{\beta}{\Lambda}n(i-3)-\lambda c(i-3)\right] \quad (۸-۱۰)$$

این بدان معنی است که مقادیر دانسیته نیاهسته‌ها توسط رابطه (۱۰-۷) تخمین زده شده و سپس توسط رابطه (۱۰-۸) اصلاح می‌گردند. اندیس i در اینجا به معنای گام زمانی انجام محاسبات بوده و نشان‌دهنده گروه انرژی نوترون‌های تأخیری نمی‌باشد. در حالتی که چندین گروه نوترون‌های تأخیری در نظر گرفته شوند، روابط (۱۰-۷) و (۱۰-۸) باید در مورد تمامی این گروه‌های انرژی به کار برده شوند.

پس از محاسبه دانسیته نیاهسته‌ها (روابط ۱۰-۷ و ۱۰-۸) و جایگذاری آنها در رابطه (۹-۱)، با داشتن یک رابطه گسسته عددی برای مشتق زمانی دانسیته نوترونی (مثلاً رابطه لاگرانژ)، می‌توان مقدار راکتیویته را در هر زمان با دقت از مرتبه h^5 به دست آورد.

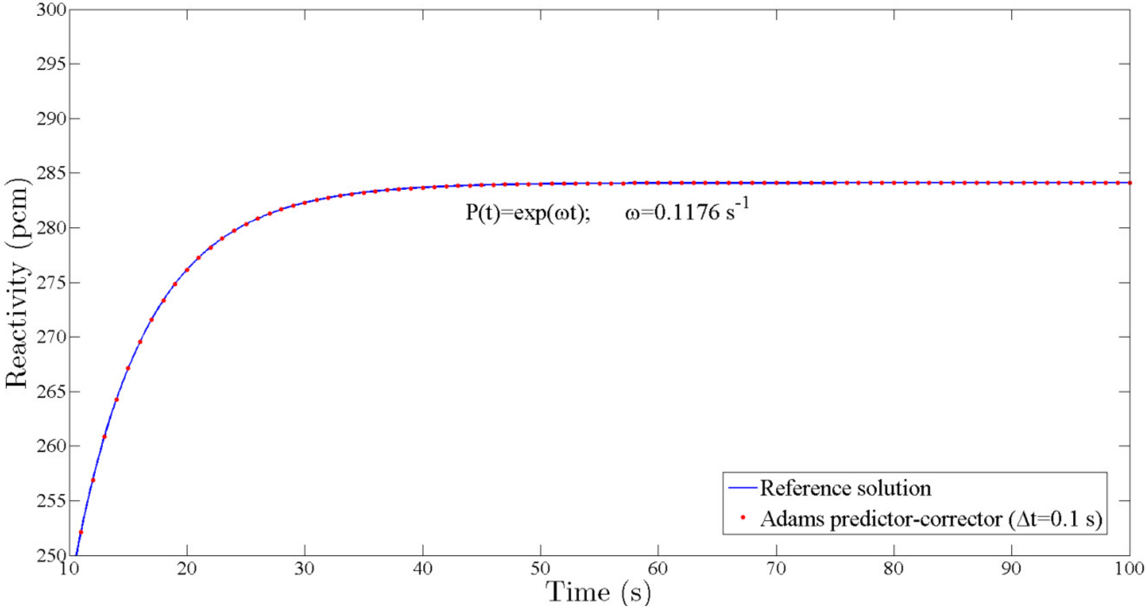
۱۰-۲- شبیه‌سازی و اعتبارسنجی روش پیش‌بینی-اصلاح آدامز

پس از تهیه معادلات گسسته سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور به روش آدامز، پیاده‌سازی آن انجام گرفته است. جهت اعتبارسنجی نتایج به دست آمده، ابتدا با در نظر گرفتن تغییرات نمایی قدرت با $\omega = ۱۱/۷۶\ s^{-1}$ (بحرانی آنی)، راکتیویته راکتور با استفاده از روش آدامز مرتبه ۵ محاسبه شده و با حل دقیق آن (رابطه ۹-۱۵) مورد مقایسه قرار می‌گیرد. شکل ۸، نتایج این مقایسه را برای گام‌های زمانی محاسباتی $\Delta t = ۰/۱\ s$ و $\Delta t = ۰/۰۱\ s$ نشان می‌دهد. خطای ماکزیمم در این حالت، برای $\Delta t = ۰/۱\ s$ و $\Delta t = ۰/۰۱\ s$ به ترتیب $-۱/۸۹۶۷\ pcm$ و $-۷/۴۹۵۱\times۱۰^{-۴}\ pcm$ به دست آمده است.



شکل ۸: راکتیویته به دست آمده از روش آدامز مرتبه ۵ برای $\omega = ۱۱/۷۶\ s^{-1}$

سپس، با در نظر گرفتن تغییرات نمایی قدرت با $\omega = ۰/۱۱۷۶\ s^{-1}$، راکتیویته راکتور با استفاده از روش آدامز مرتبه ۵ محاسبه شده و با حل دقیق آن (رابطه ۹-۱۵) مقایسه شده است. شکل ۹، نتایج این مقایسه را برای گام زمانی محاسباتی $\Delta t = ۰/۱\ s$ نشان می‌دهد. خطای ماکزیمم در این حالت، pcm $-۱/۳\times۱۰^{-۹}$ به دست آمده است. لازم به ذکر است که روش آدامز برای گام‌های زمانی بزرگتر (مثلاً $\Delta t = ۱\ s$) ناپایدار شده و پاسخ ندارد. در واقع می‌توان گفت که تنها ایراد این روش نسبت به روش لاگرانژ همین مورد است.



شکل ۹: راکتیویته به دست آمده از روش آدامز مرتبه ۵ برای $\omega = ۰/۱۱۷۶\ s^{-1}$

۱۱- نتیجه‌گیری

در این پروژه، به تهیه نرم‌افزاری جهت حل معادلات سینتیک نقطه‌ای مستقیم و معکوس راکتور اقدام شد. برای حل معادلات سینتیک نقطه‌ای مستقیم راکتور، دو روش گیر و طیفی معرفی شدند. پس از تهیه شکل گسسته عددی روابط مربوطه، به پیاده‌سازی این روش‌ها پرداخته شده و نتایج آنها در مورد چند مسأله مرجع اعتبارسنجی شده‌اند.

روش گیر، به عنوان یک روش مطمئن جهت حل دستگاه معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور معرفی شده است. این روش که به عنوان یک روش چندگامی ضمنی مطرح می‌باشد، تنها در گام‌های زمانی محاسباتی بسیار کوچک (از مرتبه s ۱۰$^{-۳}$–۱۰$^{-۴}$) پایدار بوده و همگرا می‌شود. بنابراین، چنانچه کاربر گام‌های زمانی محاسباتی بزرگتری را برای انجام محاسبات مدنظر داشته باشد، ناچار به استفاده از روش‌های دیگر جهت حصول پاسخ‌های مناسب می‌باشد.

در ادامه، روش طیفی به عنوان یک روش مطمئن جهت حل دستگاه معادلات سینتیک نقطه‌ای راکتور برای گام‌های زمانی نسبتاً بزرگ (از مرتبه s ۱-۰/۱) معرفی شده است. این روش که حل دقیقی (تحلیلی) برای راکتیویته‌های ثابت می‌دهد، از فرض تغییرات پلکانی راکتیویته و ثابت بودن آن در گام‌های زمانی کوچک استفاده نموده و پاسخ‌های بسیار خوبی را به همراه دارد.

برای حل معادلات سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور، دو روش لاگرانژ و پیش‌بینی-اصلاح آدامز معرفی شدند. پس از تهیه شکل گسسته عددی روابط مربوطه، به پیاده‌سازی این روش‌ها پرداخته شده و نتایج آنها در مورد چند مسأله مرجع اعتبارسنجی شده‌اند.

روش لاگرانژ، به عنوان یک روش مطمئن جهت حل معادلات سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور معرفی شده است، که نیازی به دانستن تاریخچه تغییرات قدرت راکتور ندارد. با استفاده از این روش می‌توان راکتیویته راکتور را به صورت لحظه‌ای و با گام‌های زمانی نسبتاً بزرگ (از مرتبه s ۱-۰/۱) محاسبه نمود. نتایج اعتبارسنجی این روش در موارد مختلف، نشان از دقت بالای آن دارد.

در انتها روش پیش‌بینی-اصلاح آدامز به عنوان یک روش مطمئن دیگر جهت حل معادلات سینتیک نقطه‌ای معکوس راکتور معرفی شده است، که این روش نیز نیازی به دانستن تاریخچه تغییرات قدرت راکتور (از ابتدا تاکنون) ندارد. نتایج اعتبارسنجی این روش نیز در موارد مختلف، نشان از دقت بالای آن دارد. تنها تفاوت این روش با روش لاگرانژ، در این است که این روش برای گام‌های زمانی نسبتاً بزرگتر (از مرتبه s ۱) ناپایدار شده و پاسخ‌های مناسبی را به همراه نخواهد داشت.

۱۲- مراجع

1. Hetrick, D.L., 1971. “Dynamics of Nuclear Reactors”, The University of Chicago Press.
2. Burden, R.L., and Faires, J.D., 2010. “Numerical Analysis”, Ninth Edition. Brooks/Cole Press.
3. SSL, 1995. Dynamic Complex Calculation Software (DynCo code), Appendix A: Theory and Numerical Procedure. http://www.ssl.obninsk.ru
4. Jahn, S., 2007. “Integration Methods”, http://www.qucs.sourceforge.net/tech/node24.html
5. Gear, C.W., 1971. “Simultaneous Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations”, IEEE Transactions on Circuit Theory, vol. 18, no. 1, pp. 89-95.
6. Kinard, M., 2003. “Efficient numerical Solution of the Point Kinetics Equation”, M.Sc. Thesis, Texas Tech University.
7. Koclas, J., 1996. “Reactor Control and Simulation”, Chulalongkorn University, Chapter 1.